Bolema, Rio Claro (SP), v. 23, nº 36, p. 657 a 682, agosto 2010 *ISSN 0103-636X*

Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade[1]

A New Game for the Study of Combinatorial Reasoning and Calculation of Probability

José Marcos Lopes[2]
Josiane de Carvalho Rezende[3]

Resumo

O objetivo deste artigo é desenvolver uma proposta de ensino para o estudo do raciocínio combinatório e do cálculo de probabilidades através de um jogo e utilizando-se da metodologia de Resolução de Problemas, bem como subsidiar a prática docente desses conteúdos matemáticos. Desse modo, o presente trabalho apresenta uma pesquisa bibliográfica que tem como intuito o ensino e aprendizagem de conceitos de combinatória e probabilidade. O jogo é original, utiliza um tabuleiro similar ao do *Jogo da Velha* e os movimentos de suas peças têm algumas semelhanças, em particular, com aqueles realizados com as peças peão e torre do jogo de xadrez. Formulamos várias atividades (problemas) envolvendo esse jogo que para suas soluções, utilizando-se a metodologia de resolução de problemas e uma adequada intervenção do professor, os alunos são estimulados a desenvolverem estratégias de contagem, ferramenta indispensável no estudo inicial de Análise Combinatória e do Cálculo de Probabilidades.

Palavras chaves: Jogos. Resolução de Problemas. Raciocínio Combinatório. Probabilidade.

[1] Projeto parcialmente financiado pela PROEX e PROGRAD/UNESP.
[2] Professor Livre Docente UNESP/FEIS. Professor do Departamento de Matemática da UNESP/Ilha Solteira-SP. Endereço para correspondência: Av. Brasil, 56. Caixa Postal 31, Ilha Solteira, SP. CEP 15385-000. E-mail: jmlopes@mat.feis.unesp.br.
[3] Licencianda em Matemática da UNESP/Ilha Solteira-SP. Endereço para correspondência: Av. Brasil, 56 . Caixa Postal 31, Ilha Solteira, SP. CEP 15385-000. E-mail: xyjosixy@hotmail.com.

Abstract

We present an educational proposal for the study of combinatorial reasoning and calculation of probabilities based on a game and problem solving methodology, aiming to support the teaching of mathematical content. A review of the literature related to the teaching and learning of the concepts of combinatorial reasoning and probability is presented. The game is original, using a board game similar to Tic-tac-toe, and the movements of its parts have some similarities, in particular those made with the rook and pawn pieces of the game of chess. We formulate various activities (problems) involving the game which, in the process of solving them, using the problem solving methodology and with the appropriate intervention of the teacher, encourage students to develop strategies for counting, an indispensable tool in the initial study of Combinatorial Analysis and Calculation of Probabilities.

Keywords: Games. Problem Solving. Combinatorial Reasoning. Probability.

Introdução

O raciocínio combinatório e o cálculo de probabilidades são conceitos apresentados aos alunos tanto do Ensino Fundamental como do Ensino Médio. No presente artigo apresentamos um novo jogo que pode ser utilizado para o ensino e aprendizagem desses conceitos. Formulamos vários problemas envolvendo situações de jogo, onde para suas soluções, com a adequada intervenção do professor, os alunos poderão desenvolver algumas estratégias como aquelas utilizadas nas soluções de problemas de contagem e de cálculo de probabilidades.

Para Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997) a definição clássica de probabilidade depende fortemente de técnicas combinatórias. Nesta abordagem, a probabilidade de um evento A é definida como a fração $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$, onde $n(\Omega)$ denota o número total de resultados possíveis do experimento aleatório e n(A) denota o número de resultados que conduz à ocorrência do evento A.

A concepção clássica de probabilidade é atribuída a Laplace (1749-1827). Entretanto, “a definição de probabilidade como quociente do número de *casos favoráveis* sobre o número de *casos possíveis* foi a primeira definição formal de probabilidade, e apareceu pela primeira vez em forma clara na obra

Liber de Ludo Aleae (O livro dos jogos de azar) de Jerônimo Cardano (1501-1576)" (MORGADO et al., 2004, p. 119).

Cada elemento do Espaço Amostral Ω é chamado de Evento Elementar. A definição de probabilidade de Laplace é válida somente quando o Espaço Amostral possui um número finito de elementos e os Eventos Elementares são equiprováveis, ou seja, possuem a mesma probabilidade de ocorrência. De acordo com Piaget e Inhelder (1951 apud BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1997), se o sujeito não possuir capacidade combinatória, não será capaz de usar esta idéia de probabilidade, exceto em casos de Experimentos Aleatórios muito elementar.

Os Standards (NCTM; 1989) recomendam o seguinte procedimento combinatório para que os alunos compreendam matematicamente a origem e aprendam o conceito implícito na definição laplaciana de probabilidade: construir uma tabela ou diagrama de árvore, fazer uma lista e usar um simples procedimento de contagem. Mesmo quando os Eventos Elementares não são igualmente prováveis, para a solução de muitos problemas de probabilidade, o diagrama de árvore mostra-se muito adequado (*problema 6)*.

Uma outra concepção de probabilidade que pode e deve ser trabalhada no Ensino Médio é a *frequentista*, isto é, a definição de probabilidade obtida por um processo de experimentação e simulação. Convém salientar que não é nossa pretensão discutir neste artigo as diferentes concepções de probabilidade. Apresentamos com algum destaque a concepção clássica tendo em vista sua evidente conexão com o raciocínio combinatório. O leitor interessado nas diferentes concepções de probabilidade pode consultar, por exemplo, as seguintes referências: Godino, Batanero e Cañizares (1996), Carvalho e Oliveira (2002) e Batanero (2005).

Para Inhelder e Piaget (1955 apud BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1997), operações combinatórias representam algo mais importante do que um mero ramo da matemática. Elas constituem um esquema tão geral como a proporcionalidade e correlação, que emergem simultaneamente após a idade de 12 a 13 anos (Estado das operações formais na teoria Piagetiana). A capacidade combinatória é fundamental para o raciocínio hipotético-dedutivo, o qual opera pela combinação e avaliação das possibilidades em cada situação.

Conforme o caderno do professor, elaborado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo: “os conteúdos pertinentes à Análise Combinatória e ao Cálculo de Probabilidades, [...] costumam trazer desconforto não apenas aos estudantes, mas também aos professores” (SÃO PAULO (Estado), 2008, p. 9).

Parece-nos que este “desconforto” não é sentido apenas pelos estudantes e professores de nosso país.

> Na Espanha, o ensino da Combinatória no Bacharelado tem ficado separado do resto do currículo, exceto na sua relação com a probabilidade. Seu ensino tem sido focado na aprendizagem das definições, fórmulas das operações combinatórias e em exercícios de cálculo com expressões combinatórias. A Combinatória é considerada difícil pelos professores que, por vezes, têm preferido ignorar seus ensinamentos (NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996, p. 27) (tradução nossa).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) estabelecem que a contagem permite uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório, a contagem dos casos possíveis não deve ser apreendida como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação, deve-se evitar a teorização excessiva e estéril (BRASIL, 1997a).

Os conteúdos de Análise Combinatória são pouco explorados no Ensino Médio. Quando o professor aborda esses conteúdos, valoriza apenas o uso de fórmulas prontas e acabadas. Desse modo, os alunos acabam por mistificar a Matemática, não compreendem como surgiram aquelas fórmulas misteriosas que geralmente envolvem quocientes de fatoriais. Muitos professores apóiam-se em livros didáticos de qualidade duvidosa, colaborando assim para formar estudantes “que não compreendem a análise combinatória, não percebem os princípios básicos por trás da solução dos problemas, e que detestam esta parte da Matemática” (LIMA, 2001, p. 395).

Segundo este mesmo autor, “a Analise Combinatória é um excelente meio de ensinar os alunos a tomarem decisões acertadas, a usarem a imaginação e a organizarem disciplinadamente seu raciocínio" (LIMA, 2001, p. 66).

Uma das principais dificuldades para a resolução dos problemas combinatórios é identificar a(o) operação(conceito) combinatória(o) envolvida(o) no enunciado. Em alguns problemas vários conceitos combinatórios devem ser mobilizados. Além disso, "a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema" (MORGADO et al., 2004, p. 2).

A Probabilidade é uma área da Matemática a qual trata do estudo e da modelagem de fenômenos aleatórios ou não determinísticos, a probabilidade proporciona um modo de medir a incerteza [...] como aplicar a matemática para resolver problemas reais. Para isso, recomenda-se um ensino das noções probabilísticas a partir de uma metodologia heurística e ativa, através da proposição de problemas concretos e da realização de experimentos reais ou simulados (LOPES, 2006).

Com efeito, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997b), estabelecem que a principal finalidade para o estudo de probabilidade

> é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (BRASIL, 1997b, p. 56)

Pode-se afirmar com relação aos conteúdos de probabilidade que deveriam ser abordados no Ensino Médio, que a situação não é diferente daquela já mencionada para a Análise Combinatória. Pois, já tivemos alunos do curso de Licenciatura em Matemática que disseram nunca ter estudado probabilidade. "É frequente o tema Probabilidade não ser estudado no Ensino Fundamental e Médio e, quando é abordado, reduzir-se à resolução mecânica de exercícios padrões na qual é suficiente aplicar uma fórmula" (CARVALHO; OLIVEIRA, 2002).

Originalmente o cálculo de probabilidades era voltado para a previsão das chances de vitória em alguns jogos de azar e/ou de baralho. O trabalho de

Cardano já mencionado é considerado o marco inicial da teoria de probabilidades. Entretanto, muitos historiadores concordam que a criação dessa área da matemática foi o *problema dos pontos.* Nesse problema deve-se determinar a divisão das apostas de um jogo de azar interrompido, entre dois jogadores igualmente hábeis, supondo-se conhecida a contagem no momento da interrupção e o número de pontos necessários para se ganhar o jogo. O problema mencionado foi proposto a Pascal pelo hábil e experiente jogador Chevalier de Méré. Pascal interessou-se pelo problema e iniciou correspondência com Fermat. "Essa correspondência lançou os fundamentos da moderna teoria das probabilidades" (EVES, 2004, p. 366).

Nos dias atuais, a teoria de probabilidade possui aplicações importantes nos mais diversos ramos da atividade humana, por exemplo: na Economia, na Política, na Medicina, etc. Ainda, a teoria de probabilidades é o fundamento matemático que garante a validade dos procedimentos da inferência estatística.

Mais do que saber ler as informações que circulam na mídia, espera-se do aluno do Ensino Médio uma reflexão mais crítica sobre seus significados. Godino et al. (1998 apud LOPES, 2006) apontam uma razão do tipo social para defender a educação da intuição probabilística na Educação Básica, que é tornar os alunos conscientes da natureza probabilística de distintos jogos de azar (loterias, máquinas caça-níqueis, bingos, etc.), jogos que são magníficos negócios para os que os promovem e um risco desproporcional de perder dinheiro para quem aposta.

Jogos e Resolução de Problemas

Os PCN destacam que "um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar a potencialidade educativa dos diferentes jogos" (BRASIL, 1997b, p. 49).

Segundo Borin (2004, p. 8)

> A atividade de jogar, se bem orientada, tem papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio como organização, atenção e concentração, tão necessárias para

> o aprendizado, em especial da Matemática, e para a resolução de problemas em geral. [...] Também no jogo, identificamos o desenvolvimento da linguagem, criatividade e raciocínio dedutivo, exigidos na escolha de uma jogada e na argumentação necessária durante a troca de informações.

Considerando o jogo como instrumento de ensino, Moura (1992) os classifica em dois grandes blocos: o jogo desencadeador de aprendizagem e o jogo de aplicação. No primeiro bloco, se o jogo é utilizado para ensinar matemática, esse "deve cumprir o papel de auxiliar no ensino do conteúdo, propiciar a aquisição de habilidades, permitir o desenvolvimento operatório do sujeito e, mais, estar localizado no processo que leva a criança do conhecimento primeiro ao conhecimento elaborado" (MOURA, 1992, p. 47).

O ensino tradicional da matemática que se baseia na apresentação oral do conteúdo pelo docente abordando definições e posteriormente demonstrações de propriedades, exercícios de fixação e de aplicação, tem-se mostrado ineficaz. "É relativamente recente, na história da Didática, a atenção ao fato de que o aluno é agente da construção do seu conhecimento, pelas conexões que estabelece com seu conhecimento prévio num contexto de resolução de problemas" (BRASIL, 1997b, p. 39).

Segundo os PCN "a resolução de problemas é peça central para o ensino de matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios" (BRASIL, 1997a, p. 112).

Dentre as várias interpretações para a metodologia de Resolução de Problemas, a que utilizamos neste trabalho e a que parece ser a mais consistente com as propostas dos PCNs é aquela fornecida por Mendonça (1993) que descreve que a resolução de problemas é utilizada como **ponto de partida** para a construção de conceitos matemáticos, o problema "dispara" o movimento de aprendizagem, ou seja, o problema é visto como desencadeador da formação de conceitos matemáticos (MENDONÇA, 1993).

A situação problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. Assim na análise dessas situações pode-se utilizar recursos abordados na Matemática, lançar mão de situações-problema para a construção e aplicação de conceitos matemáticos. Em termos metodológicos, relativos ao ensino do conteúdo, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisam desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-los. A situação-problema deve expressar aspectos chaves para o conceito que se quer estudar, o aluno deve ser levado a interpretar o enunciado da questão, estruturar a situação que lhe é apresentada, utilizar o que aprendeu para resolver outros problemas, o que exige transferências, retificações e rupturas. Assim, um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos através de uma série de generalizações.

Onuchic e Allevato (2005) dizem que quanto mais condições se dêem aos alunos para pensar e testar uma idéia emergente, maior é a chance de essa idéia ser formada corretamente e integrada numa rica teia de idéias e de compreensão relacional.

Para a obtenção da aprendizagem, Brosseau (1996 apud BATANERO, 2001) estabelece que o aluno deve interessar-se pessoalmente pela resolução do problema estabelecido na situação didática. Assim,

> o trabalho intelectual do aluno deve ser em certos momentos comparável ao dos próprios matemáticos. O aluno deve ter a oportunidade de investigar sobre problemas ao seu alcance, formular, provar, construir modelos, linguagens, conceitos, teorias, intercambiar suas idéias com os outros, reconhecer as que são adequadas com a cultura matemática e adotar as idéias que sejam úteis. Pelo contrário, o trabalho do professor é de certa maneira inverso ao trabalho do matemático profissional. Em lugar de inventar métodos matemáticos adequados para resolver problemas, deve inventar problemas interessantes que conduzem a um certo conhecimento matemático (BROSSEAU, 1996 apud BATANERO, 2001, p. 125). (grifo nosso).

Para Moura (1992) a união entre jogo e a resolução de problemas está intimamente vinculada à intencionalidade do professor.

> É possível combinar jogo e resolução de problemas nas séries iniciais; porém, fazer isto é muito mais que uma simples atitude, é uma **postura que deve ser** assumida na condução do ensino. E assumi-la com vistas ao

> desenvolvimento de conceitos científicos exige um projeto de ensino, inserido no projeto coletivo da Escola. Fazer isto é dar um sentido humano ao jogo, à resolução de problemas e, sendo assim, **à Educação Matemática** (MOURA, 1992, p. 51).

Este mesmo autor mostra como uma situação problema que trata da construção do signo numérico pode ser trabalhada como um jogo, para alunos das séries iniciais. Afirma ainda que "nas séries iniciais é que vamos encontrar as maiores possibilidades de trabalhar o problema e o jogo como elementos semelhantes. O que os unifica é predominantemente o lúdico" (MOURA, 1992, p. 51).

Neste contexto, o presente trabalho apresenta uma investigação que se caracteriza como uma pesquisa bibliográfica, que tem como intuito o ensino e aprendizagem de alguns conceitos de Análise Combinatória e de Probabilidade. E, além disso, posteriormente, pretendemos utilizar as atividades desenvolvidas nesta pesquisa como proposta de ensino desses conceitos em sala de aula, transformando-a em uma experiência de ensino.

A principal contribuição do nosso artigo é oferecer um novo jogo, que juntamente com o uso da metodologia de resolução de problemas pode ser utilizado na construção efetiva de conceitos matemáticos básicos do último ciclo do Ensino Fundamental e também do segundo ano do Ensino Médio. Neste caso, o raciocínio combinatório e o cálculo de probabilidades.

O Jogo do Quadrado

O *Jogo do Quadrado* utiliza o mesmo tabuleiro do Jogo da Velha. Os movimentos e as capturas de suas peças possuem algumas semelhanças com as peças peão e torre do jogo de xadrez. Descrevemos a seguir os materiais necessários, o objetivo e as regras do jogo.

MATERIAL: Tabuleiro 3x3 e duas peças distintas, uma para cada jogador.
INÍCIO DO JOGO: O jogo é disputado por dois jogadores, cada qual tem apenas uma peça. O Jogador 1 coloca a sua peça na extremidade esquerda

inferior do tabuleiro e o Jogador 2 coloca a sua peça na extremidade direita superior do tabuleiro. O jogo é iniciado pelo Jogador 1, que é escolhido através de sorteio.
OBJETIVO: Eliminar a peça ou chegar ao ponto de partida de seu adversário.
REGRAS:

1ª) não pode voltar ao ponto de partida;

2ª) é permitida a eliminação da peça do adversário somente na diagonal e as peças se movem apenas uma casa na vertical ou uma casa na horizontal;

3ª) a eliminação da peça adversária, tal como a ocupação do ponto de partida do adversário, serão obrigatórias quando for à ocasião.

NÚMERO DE MOVIMENTOS: O número máximo de movimentos permitido para as peças é de 8 (oito). Quando ocorrerem 8 movimentos das peças e não finalizar o jogo, define-se um empate, mesmo que no nono movimento haja vencedor, somente vale o resultado do oitavo movimento.

Comentários e observações sobre o Jogo do Quadrado

O material utilizado no jogo é muito simples e pode ser confeccionado pelos próprios alunos através de materiais recicláveis como papelão (para o tabuleiro) e tampinhas de garrafas (para as peças).

Vence o jogo o primeiro jogador a eliminar a peça adversária ou ocupar o quadrado do ponto de partida do outro competidor. O número de movimentos deve ser contado sem distinção de quem joga, ou seja, no início o Jogador 1 faz a sua jogada (um movimento), depois vem a vez do Jogador 2 fazer a sua jogada (dois movimentos) e assim sucessivamente até contabilizarem oito movimentos. Assim, cada jogador poderá efetuar no máximo 4 movimentos de sua peça. Desse modo, restringimos o número de movimentos a 8 para não tornar o jogo muito extenso (cansativo) e também facilitar a solução dos problemas envolvendo o jogo.

Supondo que a peça do Jogador 1 seja “**x**” e a do Jogador 2 seja “**o**”, a posição inicial do tabuleiro é apresentada abaixo:

		o
x		

Figura 1 - Posição inicial do jogo do quadrado.

A numeração dos quadrados não é necessária; mas, com o propósito de facilitar a descrição de um movimento no jogo, podemos representar cada quadrado do tabuleiro com um número entre 1 e 9 da seguinte forma:

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**

Figura 2 - Tabuleiro numerado.

Na sequência o professor pode solicitar aos alunos que em duplas disputem o jogo numa melhor de 5 rodadas. É importante lembrar que o Jogador 1 é sempre escolhido por sorteio no início de cada rodada. O objetivo desta ação é fazer que os alunos tenham pleno domínio das regras do jogo, o que será fundamental para o trabalho com a resolução dos problemas.

Deve-se solicitar aos alunos que elaborem algum esquema para anotar suas jogadas; tal procedimento é importante para a correção de jogadas mal sucedidas e para a definição de possíveis estratégias vencedoras.

Depois de realizado o jogo, o professor pode fazer os questionamentos abaixo.

Será que o Jogador 1 sempre vence? Por quê?

É possível ocorrer empate? Por quê? O Jogador 2 poderá vencer o jogo?

O jogo é de azar ou de estratégia? Se aumentarmos a quantidade de movimentos para nove, quais os possíveis resultados do jogo?

Conceitos básicos de contagem e de probabilidade

O objetivo desta seção é trabalhar com as idéias básicas envolvidas em problemas de contagem e de probabilidade. Assim, formulamos vários problemas sobre o *Jogo do Quadrado*, em que tais conceitos aparecem quando os resolvemos. Dessa forma, fica evidente que usamos o problema para ensinar matemática, o que é diferente de ensinar matemática para resolver problemas. Os alunos deverão oferecer suas soluções utilizando-se de sua própria linguagem. Apenas no final das atividades é que os conceitos matemáticos aprendidos pelos alunos deverão ser sistematizados usando-se o formalismo e o rigor característicos da Matemática.

Pode-se afirmar que geralmente os alunos gostam de jogar, mas quando se passa a trabalhar com problemas, existe certa resistência por parte de muitos deles. É neste ponto que entra o trabalho do professor. Deve-se esclarecer que com a resolução dos problemas eles se tornarão melhores jogadores e poderão descobrir estratégias vitoriosas.

Para a resolução dos problemas, o trabalho deve ser realizado em grupo. Um aluno, provavelmente, fica intimidado em defender sua resposta, porém, após socializar seus resultados com o grupo sentir-se-á mais confiante para expor suas idéias.

Problema 1. Suponha que após o 4º movimento a peça do Jogador 1 esteja no quadrado 1, a do Jogador 2 esteja no quadrado 9 e que, neste momento, é a vez do Jogador 1 efetuar o seu movimento. Para garantir a vitória este jogador deve posicionar sua peça em qual quadrado?

É importante que o professor socialize com a classe as soluções apresentadas pelos grupos, isto é, tanto as soluções corretas como as incorretas, se existirem. Como todos contribuíram para a solução do problema terão interesse em defender seus pontos de vistas e suas idéias.

O principal objetivo desta atividade lúdica é fazer com que os alunos desenvolvam alguma estratégia de contagem. Como a árvore de possibilidades é utilizada desde o primeiro ciclo do Ensino Fundamental é provável que seja utilizada por algum grupo.

Para o problema aqui considerado, existem dois possíveis movimentos para o Jogador 1; ou muda sua peça para o quadrado 2 ou para o quadrado 4. Porém, para garantir a vitória o Jogador 1 deve escolher o quadrado 2. Veja todos os casos possíveis descritos através de uma árvore de possibilidades expostos na Figura 3.

Da análise da árvore de possibilidades, observa-se que o jogo pode se desenrolar de 6 maneiras diferentes; destas, 3 fornecerão a vitória para o Jogador 1 e nas outras 3 ocorrerá empate. Assim, neste caso o Jogador 2 não poderá vencer o jogo, mesmo que escolha a melhor estratégia em cada movimento. Lembrando que o jogo termina no oitavo movimento das peças. Se o Jogador 1 escolher o quadrado 4 poderá vencer ou empatar o jogo. Agora, se escolher o quadrado 2 sempre vencerá. Portanto, a vitória do Jogador 1 estará garantida caso escolha o quadrado 2 no quinto movimento.

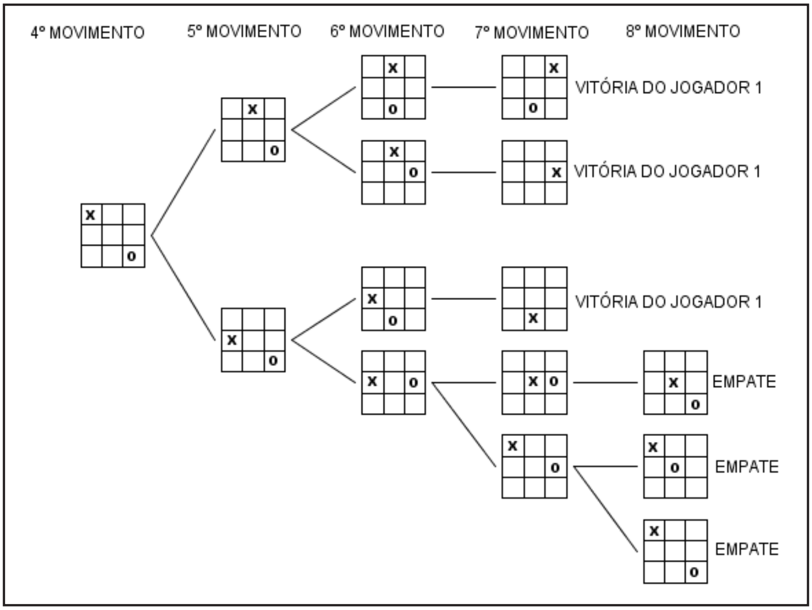

Figura 3 - Árvore de possibilidades para o problema 1.

Geralmente, as árvores de possibilidades utilizadas em problemas de Análise Combinatória e Probabilidade são apresentadas horizontalmente como na Figura 3. Para o *Jogo do Quadrado*, consideramos mais adequado representar os casos possíveis verticalmente. Desse modo, conseguimos uma forma mais compacta para sua representação; elaboramos assim a árvore apresentada na Figura 4.

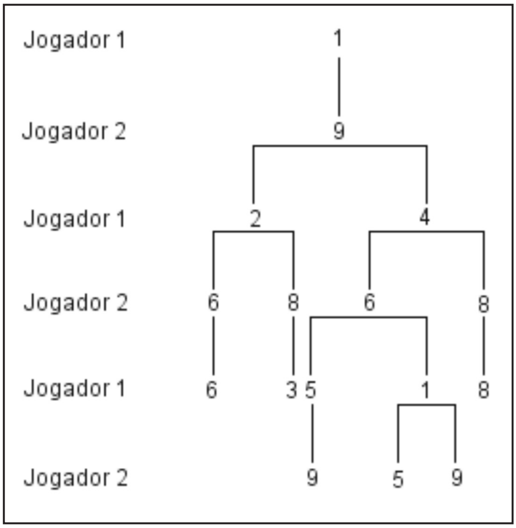

Figura 4 - Árvore de possibilidades para o problema 1.

No esquema de árvore na vertical pode-se observar que quando não existe sequência nos ramos da árvore, então ocorreu a vitória de algum jogador. Neste exemplo se deu no sétimo movimento nos respectivos quadrados 6, 3 e 8 com a vitória do Jogador 1.

Outra forma compacta de representar o desenvolvimento do jogo é utilizar uma sequência numérica da forma (1, 9, 4, 6, 5, 9); tal sequência representa as posições de cada jogador em cada momento do jogo. Assim, o Jogador 1 iniciou no quadrado 1 e o Jogador 2 iniciou no quadrado 9. Posteriormente, o Jogador 1 mudou sua peça para o quadrado 4 e o Jogador 2 para o quadrado 6 e assim sucessivamente. A sequência representa as posições de cada jogador: (Jogador 1, Jogador 2, Jogador 1, Jogador 2, Jogador 1, ...).

Nesta representação podemos concluir que quando os últimos dois números da sequência forem iguais ocorreu a vitória do último a jogar; quando o último número da sequência for 3 ocorreu a vitória do Jogador 1; quando o último número da sequência for 7 ocorreu a vitória do Jogador 2 e se em oito movimentos não constar nenhuma das situações anteriores então ocorreu um empate. Temos, para o *problema 1,* três sequências que fornecem vitória para o Jogador 1, são elas: (1, 9, 2, 6, 6) ou (1, 9, 2, 8, 3) ou (1, 9, 4, 8, 8).

Se algum grupo representou a solução do *problema 1* através de um esquema diferente dos três anteriormente mencionados (árvore horizontal, árvore vertical e sequência numérica), e dependendo de sua conveniência, o professor poderá utilizá-lo nas soluções dos próximos problemas.

Observação. Para a elaboração do *problema 1* nos baseamos na Questão 11 do ENEM 2008 (Prova 1 – AMARELA). A questão mencionada envolve a garantia de vitória de um dos jogadores para certa disposição no Jogo da Velha.

Problema 2. Após o segundo movimento do *Jogo do Quadrado* o tabuleiro encontra-se na disposição apresentada na figura 5.

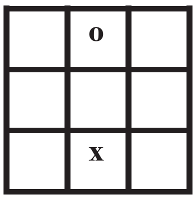

Figura 5 – Disposição do tabuleiro do Jogo do Quadrado após o segundo movimento.

Em quantos movimentos o jogo termina mais rápido? Quem vence?

Pelas regras do jogo o próximo movimento (terceiro) é do Jogador 1. Os resultados possíveis estão descritos na árvore vertical apresentada na Figura 6.

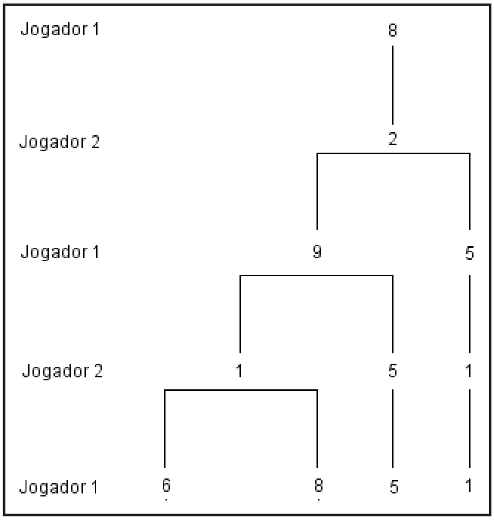

Figura 6 - Árvore de possibilidades para o problema 2.

Podemos também representar os resultados possíveis do jogo para o *problema 2* usando uma tabela que fornece as posições de partida e os movimentos executados pelos jogadores (Quadro 1).

Posição de Partida	Movimentos Executados
8, 2	9, 1, 6, ...
	9, 1, 8, ...
	9, 5, 5
	5, 1, 1

Quadro 1 - Posições iniciais e movimentos executados pelos jogadores.

Como o interesse deste problema é verificar em quantos movimentos o jogo termina mais rápido, então não foi necessário o cálculo de todas as sequências, por isso estão representadas com reticências àquelas que ainda não terminaram. Portanto o jogo, nesta situação, termina com a sucessão de mais três movimentos, tendo vitória nos dois casos pelo Jogador 1. As duas sequências de vitória são: (8, 2, 9, 5, 5) e (8, 2, 5, 1, 1).

Problema 3. Em seu primeiro movimento, o Jogador 1 pode escolher o quadrado 4 ou o quadrado 8. Se esse jogador escolheu o quadrado 4 então o Jogador 2 poderá vencer o jogo? Justificar sua resposta.
Neste caso não existe possibilidade de vitória para o Jogador 2. Todos os

resultados possíveis são mostrados na árvore descrita na Figura 7.

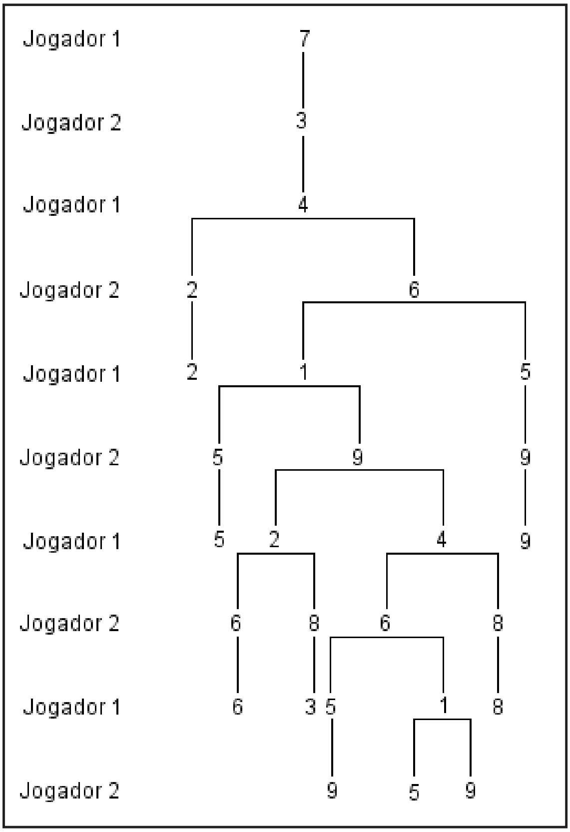

Figura 7 - Árvore de possibilidades para o problema 3.

Da árvore de possibilidades concluímos que existem 9 resultados possíveis (9 ramos), sendo que em seis desses ramos ocorreu a vitória do Jogador 1 e nos outros 3 ocorreu empate (o jogo termina no oitavo movimento).

A vitória do Jogador 1 é obtida nas seguintes 6 sequências:

$S_1 = (7, 3, 4, 2, 2)$; $S_2 = (7, 3, 4, 6, 1, 5, 5)$; $S_3 = (7, 3, 4, 6, 1, 9, 2, 6, 6)$;
$S_4 = (7, 3, 4, 6, 1, 9, 2, 8, 3)$; $S_5 = (7, 3, 4, 6, 1, 9, 4, 8, 8)$ e $S_6 = (7, 3, 4, 6, 5, 9, 9)$.

Problema 4. Existe uma estratégia vencedora para o Jogador 1? Em caso afirmativo, descreva-a.

Após uma análise cuidadosa do jogo podemos observar que independentemente do Jogador 1 escolher em seu primeiro movimento o quadrado 4 ou 8, se esse jogador usar uma estratégia conveniente sempre vencerá, mesmo que o Jogador 2 também utilize sua melhor estratégia. Com efeito, esta estratégia é apresentada na Figura 8 e a vitória do Jogador 1 ocorre no quinto movimento do jogo em ambos os casos.

Se após o primeiro movimento o Jogador 1 está no quadrado 4 então no segundo movimento do jogo, o Jogador 2 não deve mudar sua peça para o quadrado 2; pois neste caso o jogo já terminaria no próximo movimento com a vitória do Jogador 1. A mesma coisa vale para o outro ramo da árvore. Se o Jogador 1 está na posição 8, então o Jogador 2 não deve mudar sua peça para o quadrado 6. Sua melhor escolha neste caso é o quadrado 2.

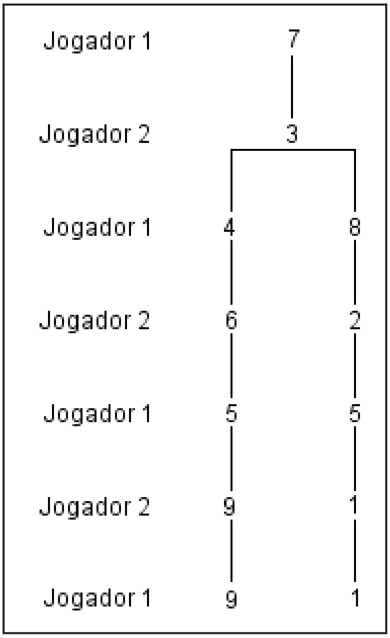

Figura 8 - Árvore de possibilidades para a estratégia vencedora do Jogador 1.

Problema 5. Quantos e quais são os resultados possíveis do *Jogo do Quadrado*?

Estamos interessados aqui em saber de quantas maneiras o jogo pode se desenrolar. Com efeito, essa pergunta pode ser respondida através de uma árvore de possibilidades conforme se apresenta na Figura 9.

Quando na solução do *problema 5* tentamos descrever todos os resultados possíveis do jogo, estamos intuitivamente trabalhando o conceito de Espaço Amostral. Neste caso, o jogo pode ser realizado de 18 maneiras diferentes. Cada ramo da árvore será um elemento do Espaço Amostra, ou seja, um Evento Elementar. Se estamos interessados no evento: "O Jogador 1 vence o jogo", devemos escolher dentre os 18 casos em quais o Jogador 1 vence; tal fato ocorre em 12 destes elementos. O empate ocorre em 6 ramos da árvore (6 elementos do Espaço Amostral) e em nenhum deles ocorre a vitória do Jogador 2. Assim, se estamos interessados no evento: "O jogador 2 vence o jogo", temos um exemplo de Evento Impossível, um evento que não pode ocorrer.

Para as resoluções dos problemas anteriores, trabalhamos as primeiras idéias de contagem utilizando-se a árvore de possibilidades. O diagrama de árvore é sem dúvida o principal instrumento de contagem para este nível de ensino; implicitamente estamos também trabalhando os Princípios Aditivo e Multiplicativo. Esses dois princípios constituem a ferramenta básica para resolver os problemas de contagem a nível de Ensino Médio.

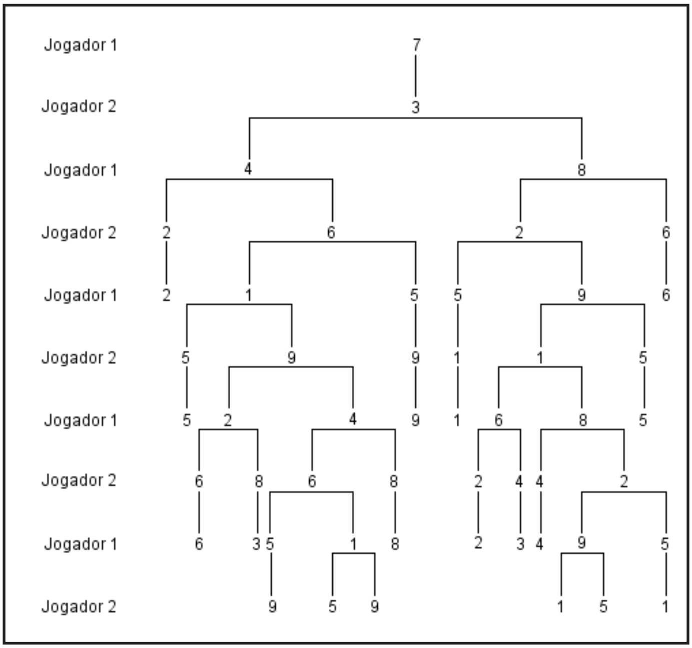

Figura 9 - Árvore de possibilidades para o problema 5.

Após o trabalho com os problemas apresentados anteriormente ou outros que o professor julgar necessários, este certamente terá mais facilidade para sistematizar os conceitos de Espaço Amostral e Evento. Fornecemos assim algumas opções diferentes daquelas tradicionalmente apresentadas nos livros didáticos e referentes a lançamentos de moedas e/ou de dados para o trabalho inicial com Análise Combinatória e Cálculo de Probabilidades.

O *problema 6* refere-se ao cálculo de soma e/ou produto de probabilidades em que os Eventos Elementares não são igualmente prováveis. Problemas em que os Eventos Elementares são igualmente prováveis são mais fáceis de serem trabalhados. Assim, consideramos conveniente o trabalho com esse problema mais para o final do conteúdo. Geralmente os alunos têm muitas dificuldades em saber quando devem somar ou multiplicar probabilidades. Em linhas gerais, se necessitamos que *exigências sucessivas* sejam satisfeitas, então usamos o produto. Agora, quando podemos satisfazer uma exigência ou outra, então usamos a soma.

Problema 6. Se os Jogadores 1 e 2 realizarem seus movimentos aleatoriamente:
(a) determine o Espaço Amostral do jogo;
(b) calcule a probabilidade de cada Evento Elementar;
(c) calcule a probabilidade de que o Jogador 2 vença;
(d) calcule a probabilidade de que ocorra empate;
(e) calcule a probabilidade de que o Jogador 1 vença.

Por movimento aleatório podemos entender o seguinte: antes de realizar seu movimento o jogador lança uma moeda (honesta) se der cara, movimenta sua peça na horizontal e se der coroa, movimenta sua peça na vertical. É obvio que as regras do jogo devem ser respeitadas, ou seja, se o jogador tirou cara e a casa da horizontal está ocupada ou é sua posição de origem, então este movimento não é permitido. Da mesma forma, se tiver possibilidade de eliminar a peça do seu adversário, então este é o movimento obrigatório a ser feito. Quando existem duas casas adjacentes disponíveis, então o jogador terá probabilidade $\frac{1}{2}$ de mudar sua peça para a horizontal e probabilidade $\frac{1}{2}$ para a vertical.

(a) Vamos representar os resultados possíveis através de sequências numéricas. Assim, da solução do *problema 5* (Árvore de Possibilidades) temos que o Espaço Amostral Ω = {(7, 3, 4, 2, 2); (7, 3, 4, 6, 1, 5, 5); (7, 3, 4, 6, 1, 9, 2, 6, 6); (7, 3, 4, 6, 1, 9, 2, 8, 3); (7, 3, 4, 6, 1, 9, 4, 6, 5, 9); (7, 3, 4, 6, 1, 9, 4, 6, 1, 5); (7, 3, 4, 6, 1, 9, 4, 6, 1, 9); (7, 3, 4, 6, 1, 9, 4, 8, 8); (7, 3, 4, 6, 5, 9, 9); (7, 3 , 8, 2, 5, 1, 1); (7, 3, 8, 2, 9, 1, 6, 2, 2); (7, 3, 8, 2, 9, 1, 6, 4, 3); (7, 3, 8, 2, 9, 1, 8, 4, 4); (7, 3, 8, 2, 9, 1, 8, 2, 9, 1); (7, 3, 8, 2, 9, 1, 8, 2, 9, 5); (7, 3, 8, 2, 9, 1, 8, 2, 5, 1); (7, 3, 8, 2, 9, 5, 5); (7, 3, 8, 6, 6)}, possui 18 elementos. Cada elemento corresponde a um Evento Elementar (ramo da árvore).

(b) Para o primeiro elemento do Espaço Amostral, como a probabilidade do Jogador 1 ocupar o quadrado 4 é $\frac{1}{2}$ e a probabilidade do Jogador 2 ocupar o quadrado 2 é $\frac{1}{2}$ então a probabilidade deste Evento Elementar será:

$$p = P[(\ 7, 3, 4, 2, 2\ )] = \frac{1}{2} \text{x} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Observar neste caso o papel do "**e**", por isso multiplicamos as probabilidades. No terceiro movimento o Jogador 1 não tem opções, deve obrigatoriamente eliminar a peça do seu opositor. Assim, esse movimento é feito com probabilidade 1 (Evento Certo). Poderíamos, então, equivalentemente, ter escrito $p = P[(\ 7, 3, 4, 2, 2\ )] = \frac{1}{2} \text{x} \frac{1}{2} \text{x} 1 = \frac{1}{4}$.

De maneira análoga, podemos mostrar que as probabilidades do segundo, terceiro, ... e décimo oitavo Evento Elementar são dadas respectivamente por:

$$\frac{1}{16}; \frac{1}{64}; \frac{1}{64}; \frac{1}{128}; \frac{1}{256}; \frac{1}{256}; \frac{1}{64}; \frac{1}{8}; \frac{1}{8}; \frac{1}{64}; \frac{1}{64}; \frac{1}{64}; \frac{1}{256}; \frac{1}{256}; \frac{1}{128}; \frac{1}{16} \text{ e } \frac{1}{4}.$$

É conveniente observar que $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ... + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = 1$, ou seja, a soma das probabilidades dos Eventos Elementares é igual a 1.

(c) Já observamos, anteriormente, que o Jogador 2 nunca vencerá o jogo.

Assim,

P(Jogador 2 vencer) = 0.

(d) O jogo pode terminar empatado se ocorrer a sequência S_1 = (7, 3, 4, 6, 1, 9, 4, 6, 5, 9) **ou** S_2 = (7, 3, 4, 6, 1, 9, 4, 6, 1, 5) **ou** S_3 = (7, 3, 4, 6, 1, 9, 4, 6, 1, 9) **ou** S_4 = (7, 3, 8, 2, 9, 1, 8, 2, 9, 1) **ou** S_5 = (7, 3, 8, 2, 9, 1, 8, 2, 9, 5) **ou** S_6 = (7, 3, 8, 2, 9, 1, 8, 2, 5, 1). Assim, a probabilidade de ocorrer empate será dada por:

$$p = P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) + P(S_4) + P(S_5) + P(S_6)$$

$$p = \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} + \frac{1}{128} = \frac{8}{256} = \frac{1}{32}.$$

Deve-se destacar nesta solução o papel do "**ou**". Com efeito, se ocorrer qualquer uma das sequências mencionadas, então o jogo termina empatado, por isso devemos somar as probabilidades.

(e) Utilizando os resultados dos itens (c) e (d) e o conceito de Evento Complementar temos que P(Jogador 1 vencer) = $1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32} \cong 96{,}87\%$.

Considerações finais

Apresentamos neste artigo algumas possibilidades metodológicas alternativas ao tratamento tradicional dos conteúdos da Análise Combinatória e do Cálculo de Probabilidades. "Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção" (FREIRE, 2006, p. 22)

Não existe um caminho que possa se considerado como único e melhor para o ensino da Matemática, "conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática" (BRASIL, 1997b, p. 42).

A principal estratégia de contagem que utilizamos foi a árvore de possibilidades. Em conformidade, com o entendimento e proposta da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, em particular, com os objetivos propostos no Caderno do Professor: Matemática que entende que a principal metodologia para o tratamento de conteúdos matemáticos é a da Resolução de Problemas. Ainda, para o ensino de Análise Combinatória destaca a

> importância da representação das soluções com a utilização da árvore de possibilidades e [...] a ineficácia da aplicação de fórmulas de cálculo para um grande número de problemas de agrupamentos. A adoção da representação das resoluções por intermédio das árvores ilustra os dois principais tipos de raciocínio envolvidos na totalidade dos problemas de Análise Combinatória: o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo. (SÃO PAULO (Estado), 2008, p. 24 - 25).

Combinatória não é simplesmente uma regra de cálculo para probabilidade, mas existe uma estreita relação entre ambos os tópicos, razão pela qual Heitele (1995 apud BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1997) inclui combinatória na sua lista das dez idéias fundamentais da Estocástica, a qual deve estar presente, explicita ou implicitamente, em cada situação de ensino no currículo da Estocástica. Por Estocástica entendemos a abordagem conjunta de Estatística e Probabilidade.

Para Grando (2007) a utilização de jogos em sala de aula nem sempre é feita de um modo adequado e produtivo,

> é comum o professor utilizar os jogos no final da aula, nos minutos restantes, para fixar um determinado conteúdo ou desenvolver uma habilidade. Raras vezes existe um trabalho intencionalmente planejado, com intervenções pedagógicas previstas pelo professor e com continuidade de várias aulas. [...] Acreditamos que isto ocorra, muitas vezes, pelo pouco conhecimento por parte dos educadores das potencialidade e limites de cada jogo. Além do desconhecimento de um trabalho sistemático de intervenção pedagógica com jogos em sala de aula (GRANDO, 2007, p. 45).

Apresentamos neste artigo uma proposta de trabalho intencionalmente planejada, a qual poderá trazer benefícios no processo de aquisição do conhecimento matemático por parte dos alunos. Em uma situação de jogo, o processo de busca por uma estratégia vencedora exige dos alunos “habilidades de tentar, observar, analisar, conjecturar, verificar, compõe o raciocínio lógico que é uma das metas prioritárias do ensino de Matemática e a característica primordial do fazer ciência" (BORIN, 2004, p. 3).

A associação do jogo com a resolução de problema torna as aulas mais atraentes e participativas, os alunos tornam-se ativos na construção de seu próprio conhecimento. Desse modo, acreditamos que essa forma de abordar esses conteúdos contribui eficazmente para uma construção/ reconstrução do conhecimento matemático que se realiza de modo mais significativo para o aluno. Além disso, buscamos o desenvolvimento do raciocínio dedutivo do aluno e não a memorização de fórmulas. A memorização pode ser temporária, mas o desenvolvimento do raciocínio e a apreensão do conhecimento é para toda a vida.

O objetivo do artigo foi apresentar um novo jogo (Jogo do Quadrado) que pode ser utilizado juntamente com a metodologia de Resolução de Problemas, para o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidades. Em virtude, da importância e principalmente pelas dificuldades encontradas pelos professores para ministrarem esses conteúdos que compõem os currículos de Matemática tanto do Ensino Fundamental como do Ensino Médio, acreditamos que os problemas (atividades) aqui formulados poderão subsidiar os professores no ensino desses conteúdos, no sentido de oferecer uma proposta de ensino mais prazerosa, motivadora e contribuir para uma compreensão mais significativa desses conceitos.

Para as resoluções dos problemas, o aluno torna-se ativo na construção do seu próprio conhecimento, "o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo" (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003, p. 23).

Referências

BATANERO, C. **Didáctica de la estadística**. Granada: Universidad de Granada, 2001.

BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa**, México, v. 8, n. 3, p. 247 - 263, nov. 2005.

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; NAVARRO-PELAYO,V. Combinatorial reasoning and its assessment. In: GAL, I.; GARFIELD, J. B. (Ed.). **The assessmentt challenge in statistics education**. Minnesota: IOS Press, 1997. p. 239 – 252. Disponível em: <www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/assessbkref>. Acesso em: 20 fev. 2009.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP, 2004.
BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática (PCN_+). Brasília: MEC/SEMT, Brasília. 1997a.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997b.

CARVALHO, D. L.; OLIVEIRA, P. C. Quatro concepções de probabilidade manifestadas por alunos ingressantes na licenciatura em matemática: Clássica, Frequentista, Subjetiva e Formal. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 25., 2002, Caxambu. **Anais...** Caxambu: Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação, 2002. 1 CD.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Ed. da UNICAMP, 2004.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 2006.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; CAÑIZARES, M. J. **Azar y probabilidad**. Madrid: Síntesis Editorial, 1996.

GRANDO, R. C. Concepções quanto ao uso de jogos no ensino de matemática. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo: SBEM-SP, v. 10, n. 12, p. 43 - 50, 2007.

LIMA, E. L. **Exame de textos**: análise de livros de matemática para o ensino médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LOPES, C. A. E. A estatística e a probabilidade na educação básica e a formação dos educadores matemáticos. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2006, Águas de Lindóia. **Anais...** Curitiba: SBEM, 2006. 1 CD.

MENDONÇA. M. C. D. **Problematização**: um caminho a ser percorrido em educação matemática. 1993. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 1993

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**: com as soluções dos exercícios. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

MOURA, M. O. **O jogo e a construção do conhecimento matemático**. São Paulo: FDE, 1992. (Série Idéias, 10).

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

NAVARRO-PELAYO, V.; BATANERO, C.; GODINO, J. D. Razonamiento combinatorio em alumnos de secundaria. **Educación Matemática,** México, v. 8, n. 1, p. 26 - 39, 1996.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. 2.ed. São Paulo: Cortez, 2005. p 213 - 231.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. **Caderno do professor**: matemática. São Paulo: SEE, 2008. (Ensino Médio 2ª série, 3º bimestre).

Submetido em Março de 2009
Aprovado em Maio de 2009