ISBN 978-85-89082-23-5

Como Alunos do Curso de Licenciatura em Matemática Lidam com Alguns Conceitos Básicos de Cálculo I[1]

How Undergraduate Mathematics Students Deal with Some Basic Calculus I Concepts

Luciana Gastaldi Sardinha Souza[2]

Luci Harue Fatori[3]

Regina Luzia Corio de Buriasco[4]

Resumo

A disciplina Análise Real sempre foi considerada uma disciplina difícil e seletiva. Nela, os alunos apresentam fraco desempenho e isso vem sendo tratado como uma fatalidade. Visto que a disciplina de Cálculo I é considerada como uma base para a de Análise Real, fizemos um estudo avaliativo para verificar como os alunos lidam com alguns conceitos matemáticos considerados básicos. Participaram desse estudo alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), que tinham cursado uma vez a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I. Para subsidiar teoricamente o trabalho, foram utilizados os termos Imagem Conceitual e Definição do Conceito[5] de Vinner.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino de Cálculo Diferencial Integral. Ensino de Análise Real. Definição do Conceito. Imagem Conceitual.

---

[1] Digitalizado por Douglas Marin e Luciano Feliciano de Lima.

[2] Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina – UEL. Professora Adjunta do Departamento de Matemática da UEL.
Endereço para correspondências: Depto. de Matemática - Universidade Estadual de Londrina – UEL, Cx Postal 6001. Londrina, PR, Brasil. CEP 86051-990. lucianagastaldi@sercomtel.com.br

[3] Doutora em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ. Professora Adjunta do Departamento de Matemática da UEL.
Endereço para correspondências: Depto. de Matemática - Universidade Estadual de Londrina – UEL, Cx Postal 6001. Londrina, PR, Brasil. CEP 86051-990.luci@uel.br

[4] Doutora em Educação pela Universidade Estadual Paulista – UNESP, campus de Marília. Professora Associada do Departamento de Matemática da UEL.
Endereço para correspondências: Depto. de Matemática - Universidade Estadual de Londrina – UEL, Cx Postal 6001. Londrina, PR, Brasil. CEP 86051-990. reginaburiasco@terra.com.br.

[5] A terminologia original em inglês é "concept image" e “concept definition”. Em português esses termos já foram traduzidos como conceito imagem e conceito definição, imagem do conceito e definição conceitual ou da forma que foi utilizada nesse artigo.

Abstract

Real Analysis has always been considered a difficult and selective discipline. Thus, the poor performance of our students has so far been taken for granted. As the discipline Calculus I is considered to be the basis for Analysis, an evaluative study was carried out to see how undergraduate students from the State University of Londrina deal with some basic Math concepts. The participants had already taken the course Differential and Integral Calculus I. Vinner's Concept Image and Definition gave theoretical support to this study's findings.

Keywords: Mathematics Education. Integral Differential Calculus Teaching. Real Analysis Teaching. Concept Definition. Concept Image.

Em vista de que a maioria dos alunos de Licenciatura em Matemática tem um baixo desempenho na disciplina de Análise Real e que a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I é considerada básica para a mesma, buscamos analisar quais as possíveis causas deste fracasso e propor soluções para evitá-lo (Souza, 2003).

A forma de pesquisa utilizada foi a análise documental, com dados obtidos por meio de uma prova com dez questões, retiradas dos provões de 1998, 1999, 2000, 2001 e 2002 e de provas de Cálculo I do ano de 2001. Estas questões foram escolhidas pelos professores de Análise do Departamento, por serem as mais adequadas para verificar se um aluno que lida bem com elas possui grande chance de sair-se bem em Análise. A prova foi aplicada a alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina que já haviam cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I ao menos uma vez e teve a duração de quatro horas/aula.

A nossa maior preocupação não foi saber se o aluno acertou ou errou a questão, mas sim como ele 'pensou' para resolvê-la, estando ou não correta. Em relação a isso, Ludke e André (1986, p.12) citam cinco características básicas que configurariam uma Pesquisa Qualitativa em Educação, entre elas, "A preocupação com o processo é maior do que com o produto". Acreditamos que a análise do 'pensamento' do aluno é uma arma poderosa para tocá-lo e guiá-lo na direção pretendida. É o elo de ligação entre o conhecimento já apropriado e o conhecimento desejado. Na busca da compreensão da produção escrita dos alunos, encontramos o apoio de Vinner (1991) ao que ele chama de **Definição do Conceito e Imagem Conceitual**, que serão definidos a seguir.

ISBN 978-85-89082-23-5

Imagem Conceitual

A *Imagem Conceitual* consiste de toda estrutura cognitiva na mente de um indivíduo, que é associada a um conceito dado, a qual inclui todas as imagens mentais, propriedades associadas e processos. Esta pode não ser globalmente coerente e pode conter aspectos que são um pouco diferentes da definição formal deste conceito.

A *Imagem Conceitual* está ligada à primeira visão ou sensação que vem à mente ao ouvir ou ler uma palavra. Por exemplo, ao ler "**árvore",** todos pensam no mesmo tipo de árvore? Pode ser um eucalipto bem alto, junto com o seu perfume, ou uma árvore com tronco largo e copa bem definida, do tipo que aparece nos desenhos em quadrinhos. Cada pessoa tem uma Imagem Conceitual individual, própria, que foi formada por meio de suas experiências anteriores de todos os tipos. Às vezes nem precisa ser uma imagem. Pode ser um conjunto de sensações vividas.

Este conceito pode vir a ser modificado conforme o sujeito amadurece e vivencia novas experiências. Por exemplo, quando uma criança aprende o conceito de subtração, está sempre trabalhando com quantidades que envolvem números inteiros positivos. Dessa forma, pode observar que a subtração de um número sempre reduz este número. Esta observação pode criar problemas mais tarde, quando ela se deparar com a subtração de dois números negativos. Assim sendo, uma mesma pessoa pode ter duas visões conflitantes guardadas na memória e nem se dar conta disto até que estas sejam "evocadas" ao mesmo tempo.

A Imagem Conceitual, ou seja, as representações visuais, as pinturas mentais, as impressões e as experiências associadas com um nome podem ser traduzidas na forma verbal, gerando a definição do conceito.

Definição do Conceito

A definição do conceito é a forma de palavras pessoal que o aluno usa para explicar a sua imagem conceitual. Segundo Dias (2002, p.2), quando um indivíduo passa a ter uma definição do conceito, possui uma idéia clara em sua mente do significado deste conceito**:**

> O conceito definição é um conceito formado na estrutura cognitiva do sujeito, é a especificação do conceito pelo indivíduo em forma de palavras. Pode ser apreendido por um indivíduo na escola ou não, relacionando-se em maior ou menor grau com um conceito constituído pela comunidade [...] O conceito definição é considerado inexistente quando ainda não é formado ou esquecido. O conceito definição também pode existir e ser inativo, como a memorização de uma definição [...]. A formação do conceito definição pode ocorrer no ato em que o indivíduo é questionado para explicar um conceito.

Vinner (1991, p.70) assume que saber de cor uma definição do conceito não garante o entendimento deste conceito. Para passar a ter tal conceito faz-se necessário formar uma imagem conceitual do mesmo. Pode variar com o tempo e diferir da definição do conceito formal (definição do conceito aceita por toda a comunidade matemática). Para cada indivíduo, a definição do conceito formal gera sua própria Imagem Conceitual, o qual Vinner chamou caprichosamente de “definição do conceito imagem”.

Por exemplo, a definição do conceito função deveria ser tomada como sendo “uma relação entre dois conjuntos A e B, na qual para cada elemento de A é associado um único elemento de B”. Entretanto, muitos alunos não lembram deste conceito definição. Para eles, uma função é uma fórmula, uma tabela de valores, um gráfico, ou ainda alguma coisa do tipo:

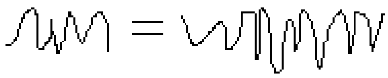


Figura 1 – Imagem Conceitual de função

ou seja, alguma coisa escrita antes e depois de um sinal de igual. A provável causa desta idéia de função que possuem é que os professores apresentam rapidamente a definição de função nas aulas e trabalham muito mais tempo com exemplos dados por uma única fórmula ou por um gráfico. Dessa forma, a Imagem Conceitual de função do aluno é desenvolvida de uma forma restrita. Inicialmente, isto pode não ter importância, pois esta noção restrita é adequada a contextos restritos. Mais tarde, porém, este conceito pode causar problemas.

Vinner (1991, p. 69) considera a existência de duas células na nossa estrutura cognitiva: uma célula para a definição do conceito e uma para a Imagem Conceitual:

ISBN 978-85-89082-23-5

Definição do conceito **Imagem Conceitual**

Figura 2: Existência de definição do conceito e imagem conceitual.

Uma delas ou até mesmo ambas podem estar vazias. O caso de ambas estarem vazias pode ocorrer quando o indivíduo decora a definição de um termo desconhecido sem entender do que se trata, sem atribuir significado algum para ela.

Segundo Vinner (1991), estas células podem ser formadas independentemente, sem existir interação entre elas. Cita, como exemplo, a aquisição do conceito de sistemas coordenados. Um aluno pode, por exemplo, ter uma imagem conceitual de sistema coordenado obtido somente pela visualização de vários gráficos, sem nunca ter entrado em contato com sua definição formal. Pode formar, portanto, uma imagem conceitual segundo a qual um sistema coordenado é formado por dois eixos perpendiculares. Mais tarde, o professor pode definir um sistema coordenado como formado por quaisquer duas retas que se interceptem. Diante disso, três situações podem ocorrer:

- A imagem conceitual de sistema coordenado é trocada, incluindo também eixos não perpendiculares. Neste caso, a imagem conceitual acomoda a nova definição;
- A imagem conceitual permanece inalterada. A definição do professor é colocada na célula da definição do conceito por um tempo e depois é esquecida ou distorcida, de modo que o aluno afirme que num sistema coordenado os eixos são perpendiculares;
- Ambas as células permanecem inalteradas, ou seja, quando o professor pedir para o aluno definir um sistema coordenado, ele irá repetir a definição que o professor deu, mas em outras situações que não tiverem a interferência do professor, ele irá pensar em eixos perpendiculares. Neste caso, a definição do conceito encontra-se presente, mas as duas células não se juntam e são evocadas independentemente.

Uma situação similar ocorre quando o aluno é apresentado pela primeira vez a um conceito por meio da sua definição formal, só que neste caso a imagem conceitual é vazia

ISBN 978-85-89082-23-5

no início. Ela é formada gradativamente após vários exemplos e discussões. Em geral, os professores esperam o seguinte caminho para um conceito em formação:

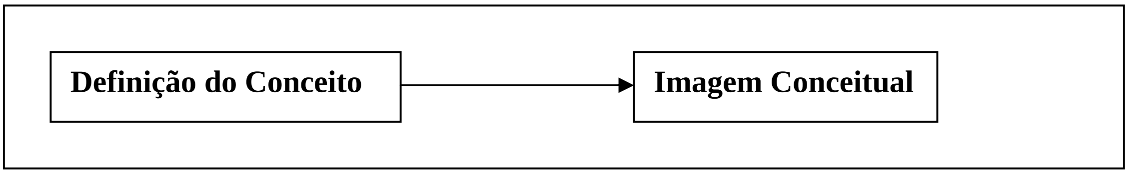


Figura 3: construção esperada de um conhecimento formal

ou seja, esperam que a imagem conceitual seja formada depois da definição do conceito e que seja controlada por ele. Pensamos que é assim que são escritos muitos dos livros de Cálculo. As definições sempre precedem os problemas.

Segundo Vinner (1991, p.73), a maneira mais simples de saber qual é a definição do conceito de uma pessoa é fazer perguntas diretas. O que é uma função? O que é uma tangente? E assim por diante. Isso porque as definições são verbais e explícitas. Em compensação, a imagem conceitual é não-verbal e implícita.

Ao resolver problemas, espera-se que o aluno ative ambas as células. Na nossa opinião, um bom caminho para chegar a respostas corretas seria o seguinte:

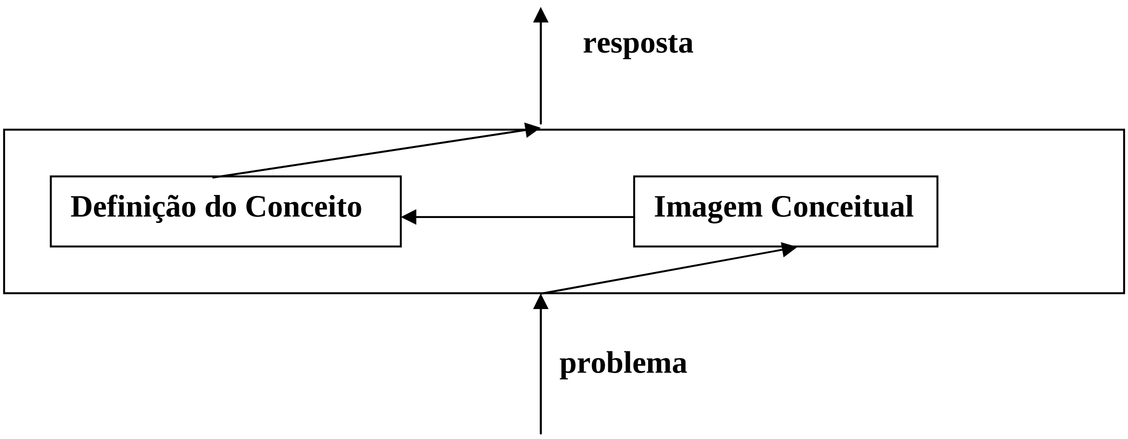


Figura 4: Pensamento intuitivo seguido de dedução

ou seja, ao ler um problema, a pessoa imediatamente relaciona os termos constantes no enunciado com a sua imagem conceitual dos mesmos, mas nunca dá a resposta sem antes consultar a sua definição do conceito.

Outros caminhos razoáveis seriam os representados pelas figuras 5 e 6, a seguir:

ISBN 978-85-89082-23-5

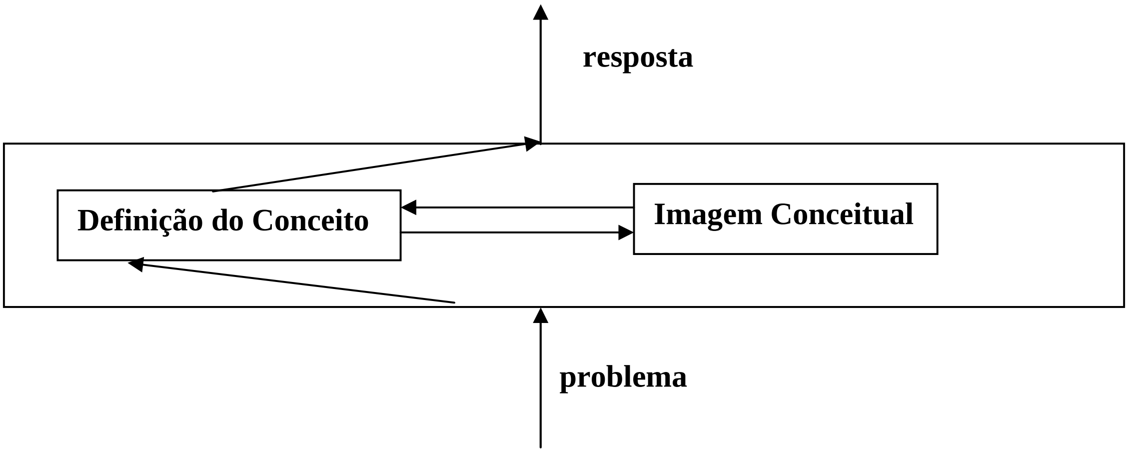


Figura 5: Interação entre definição e imagem

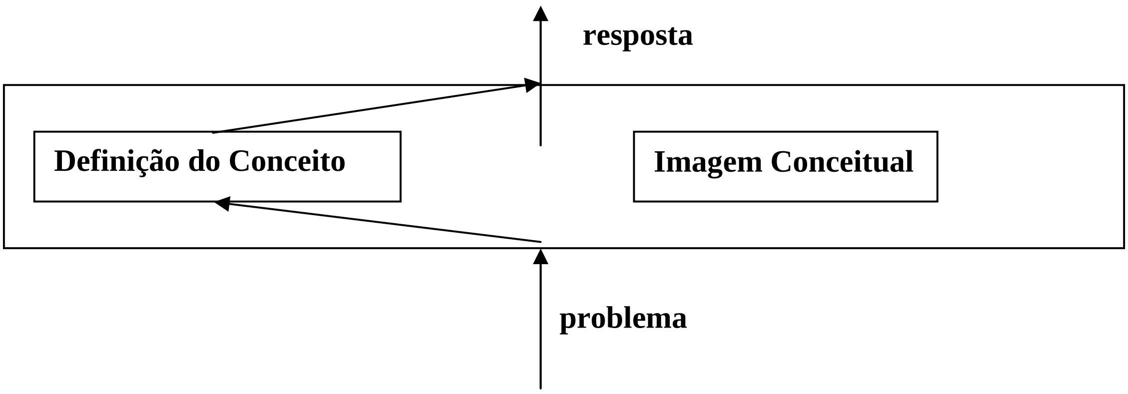


Figura 6: Definição formal pura

Os caminhos de resolução anteriores podem levar o aluno a dar respostas não corretas se a imagem conceitual ou a definição do conceito utilizadas não forem condizentes com a definição matemática formal do conceito. Foi o que ocorreu nas questões 1b e 3a da prova.

Questão 1b. Considere os intervalos fechados A = [1, 3] e B = [2, 4]. Diz-se que um número real "a" é uma cota superior de um conjunto A se $a \geq x$, para qualquer $x \in A$. Quais são as cotas superiores do conjunto A?
Resolução: As cotas superiores de A são todos os números reais do intervalo $[3, \infty)$.

O gráfico a seguir mostra a proporção de acertos da questão por ano:

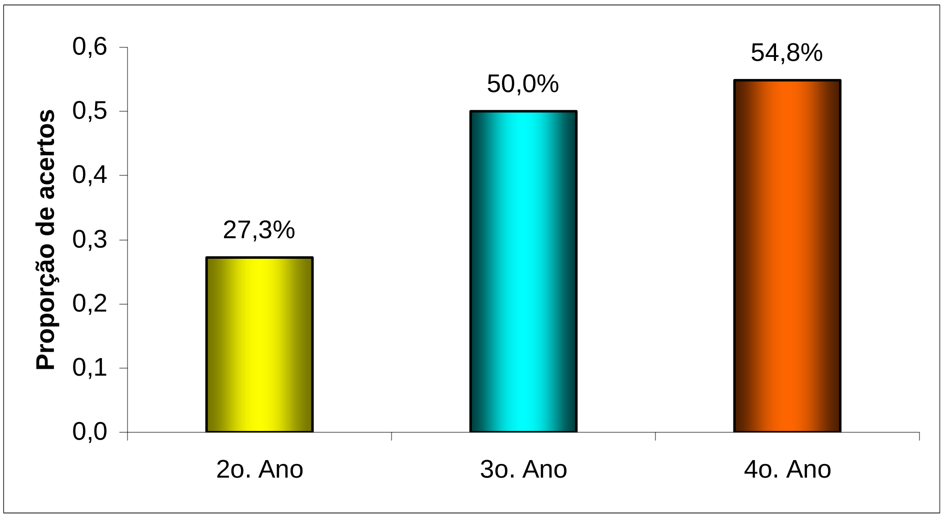


Figura 7: Proporção de acertos da questão 1b por ano

Processo de resolução de alguns alunos da questão 1b:

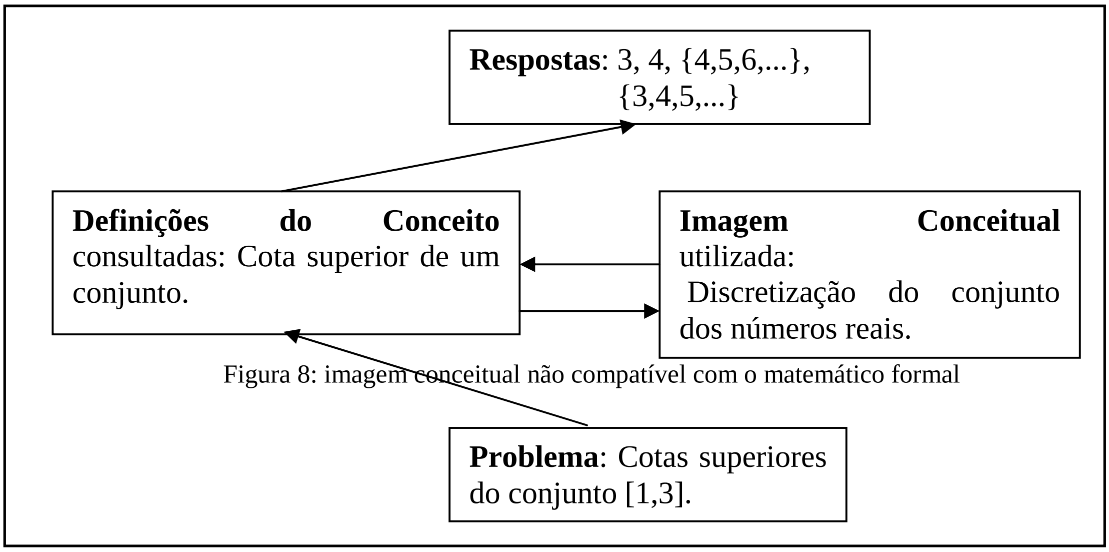


Figura 8: imagem conceitual não compatível com o matemático formal

Este resultado mostra que os alunos que deram este tipo de resposta possuem uma imagem conceitual discreta para os reais, o que veio confirmar a afirmação de Dias (2002, p.76):

> Um conceito imagem quase discreto para os reais revelou-se nesta pesquisa, por meio de considerações subjacentes à inexistência ou finitude de números, entre dois reais distintos. Como também, pela existência de um número máximo como atributo dos reais e de uma "sucessão de decimais", e até de irracionais. Assim interpretamos esses *conceitos imagem* como uma *generalização abusiva* da discretização do conjunto dos inteiros.

Cobianchi (2001), que apresenta em seu trabalho uma revisão bibliográfica sobre o assunto números reais, no qual analisa livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral, dissertações de Mestrado e Teses de Doutorado que tratam do assunto, chega à conclusão que os livros de Cálculo não tratam o conteúdo números reais de uma maneira eficaz, prejudicando o ensino deste importante tema:

> O conteúdo números reais ministrado nas licenciaturas em Matemática é falho devido a ementas inadequadas e falta de preparo dos professores que abordam esse tema e também pela falta de material didático adequado. Essa deficiência pode ser causada também pela maneira pouco eficaz com que os livros de Cálculo tratam desse assunto.....Julgamos válido o procedimento usado na disciplina de Análise, introduzindo o conjunto de números reais como corpo ordenado completo. Mas, consideramos que, além dessa construção, deveriam ser incluídas – principalmente nos cursos de Licenciatura em Matemática – outras construções de números reais, direcionadas para o futuro professor, e que proporcionassem subsídios a serem empregados na sua futura prática pedagógica nos ensinos fundamental e médio. (COBIANCHI, 2001, p.418).

Atualmente, a abordagem de números reais na disciplina de Análise do Curso de Licenciatura é feita dentro de um enfoque mais estático: apresentando o conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo e deduzindo dessa estrutura as demais propriedades. Uma sugestão de Bassanezi[6], para superar a imagem conceitual discreta dos reais, seria trabalhar com o conceito de número real do ponto de vista de seqüência já no Curso de Cálculo. Desse modo, ao chegar ao Curso de Análise, o aluno chega com a idéia de que número é uma entidade que se movimenta: todo número real possui uma seqüência de números racionais que converge para ele. Um trabalho nesse sentido foi feito por Penteado e Silva (2004), no qual, por meio de uma seqüência didática, foi estabelecido um

[6]Sugestão dada no exame de qualificação de Luciana Gastaldi em 07/08/03, por Rodney Carlos Bassanezi, membro titular da banca.

ISBN 978-85-89082-23-5

procedimento para a obtenção de números racionais e irracionais entre dois reais distintos, abordando, desse modo, a propriedade da densidade dos mesmos nos números reais.

Questão 3ª. Sejam A e B conjuntos não vazios e $f : A \rightarrow B$ uma função. O que significa dizer que " f é injetiva"?
Resolução: Função injetiva e injetora são a mesma coisa. Significa dizer que para qualquer $x_1,\ x_2 \in A$, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Analogamente: Se $f(x_1) \in B$ e $f(x_2) \in B$, com $f(x_1) = f(x_2)$, então f será uma função injetora se $x_1 = x_2$.

O gráfico a seguir mostra a proporção de acertos da questão por ano:

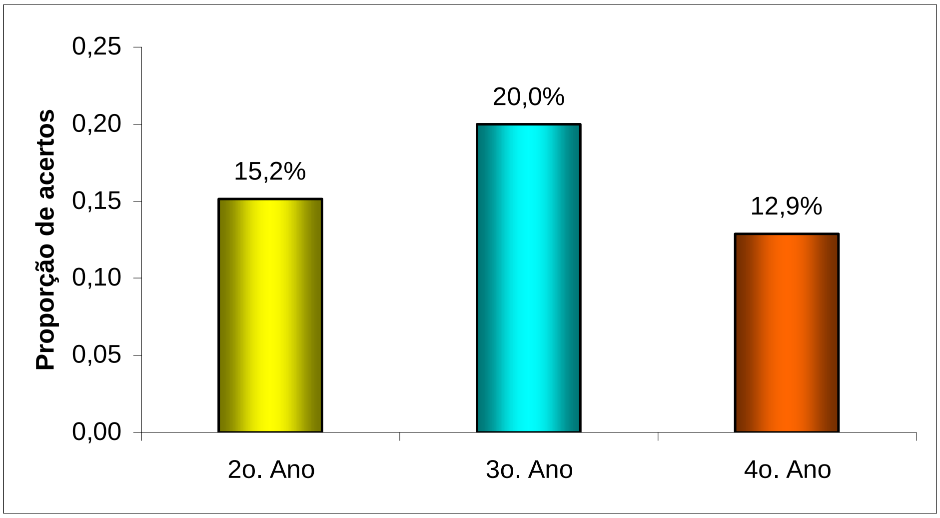


Figura 9: Proporção de acertos da questão 3a por ano

Esta questão teve um baixo número de acertos, o que leva-nos a pensar que o conceito de função injetora não foi incorporado pela maioria dos alunos. Uma possível causa disso pode ser o fato de que este conceito não tinha sentido no momento em que o aluno o aprendeu.

ISBN 978-85-89082-23-5

Processo de resolução de alguns alunos da questão 3a:

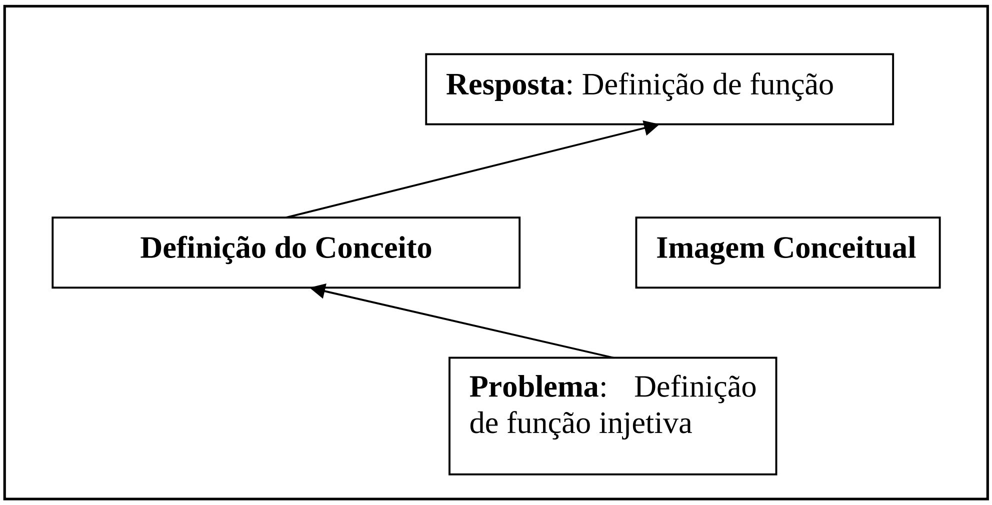


Figura 10: Definição de Conceito não compatível com o formal

Os erros apresentados deixam à mostra que a **definição do conceito de função injetora** para a maioria dos alunos se aproxima do **definição do conceito de função**, qual seja: dados dois conjuntos A e B, dizemos que uma relação f de A em B é uma função, se para todo x de A existir um único y em B tal que $f(x) = y$.

A característica comum aos três processos postos anteriormente é que a resposta ao problema nunca é dada sem antes ser consultada a definição do conceito. Infelizmente, o que ocorre com mais freqüência na prática pode ser observado na Figura 11:

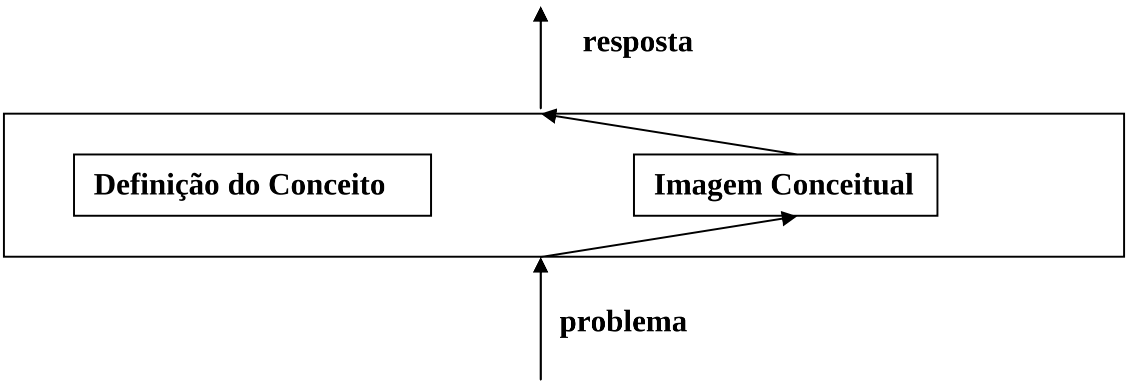


Figura 11: Resposta Intuitiva

Neste texto, chamamos de resposta intuitiva a resposta dada pelo aluno quando este consulta apenas a sua imagem conceitual.

Casos deste tipo (resposta intuitiva) ocorreram nas questões **10b** e **6**:

Questão 10b. O valor médio de uma função contínua e positiva f em um intervalo [a, b] pode ser definido geometricamente como a altura de um retângulo com base [a, b] e com área equivalente à área sob a curva y = f(x) nesse intervalo.

Calcule o valor médio de f(x) = sen x no intervalo $[0, \pi]$.

Resolução esperada:

A área sob a curva $f(x) = senx$ é dada por:

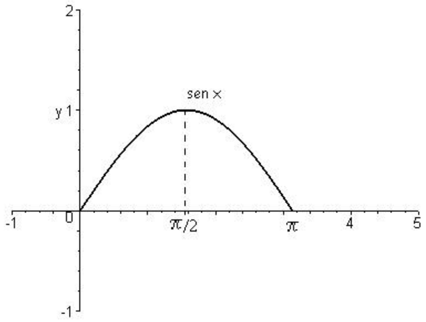
$$A = \int_0^{\pi} senx dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = 2$$

O valor médio será dado pela altura de um retângulo de base π e área 2. Como a área de tal retângulo é dada por πh, temos que

$$\pi h = 2$$

Portanto,

$$h = \frac{2}{\pi}$$



O gráfico a seguir mostra a proporção de acertos da questão por ano:

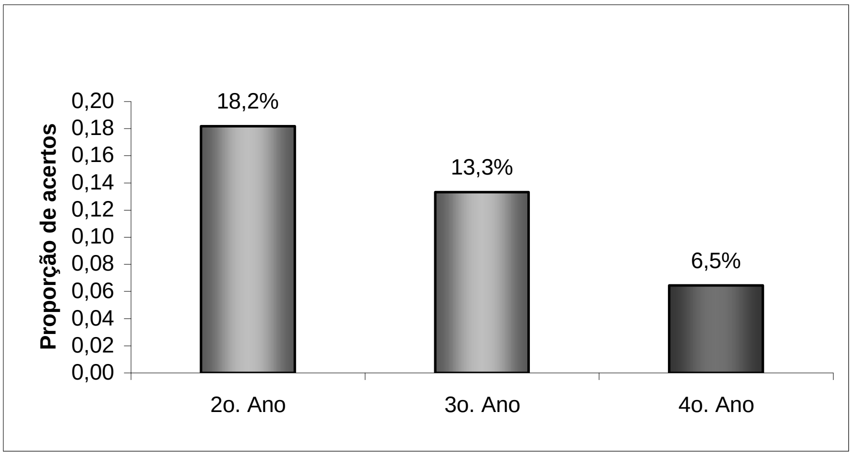


Figura 12: Proporção de acertos da questão 10b por ano

Respostas Intuitivas apresentadas 1:

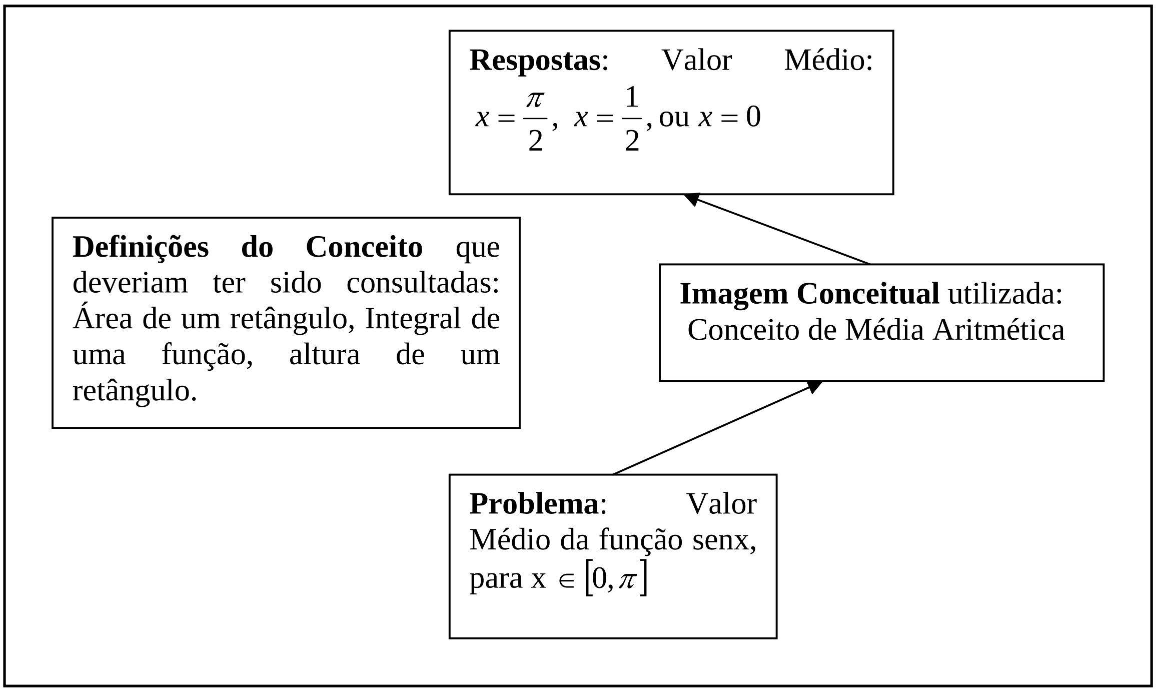


Figura 13: Resposta Intuitiva 1

Apesar da definição de Valor Médio estar escrita, enunciada na questão, alguns alunos apresentaram como Valor Médio a <u>média aritmética</u> entre dois valores, ou seja, utilizaram como imagem conceitual o conceito de <u>média,</u> ou <u>o que está no meio</u> e nem se preocuparam em ler a definição dada, acharam que só lendo a palavra "Médio" já sabiam do que se tratava. Outros alunos consideraram como Valor Médio o ponto médio do

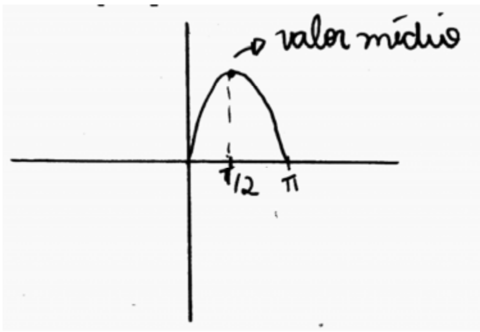
ISBN 978-85-89082-23-5

intervalo $[0, \pi]$, ou fizeram a média aritmética entre o valor mínimo 0 e o valor máximo 1 e deram como resposta $\frac{1}{2}$.

A justificativa para o valor médio 0 foi:

“valor médio= $\frac{sen 0 + sen \pi}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$”

Uma aluna apenas indicou:



considerando como Valor Médio a ordenada do ponto $x = \frac{\pi}{2}$.

Respostas Intuitivas apresentadas 2:

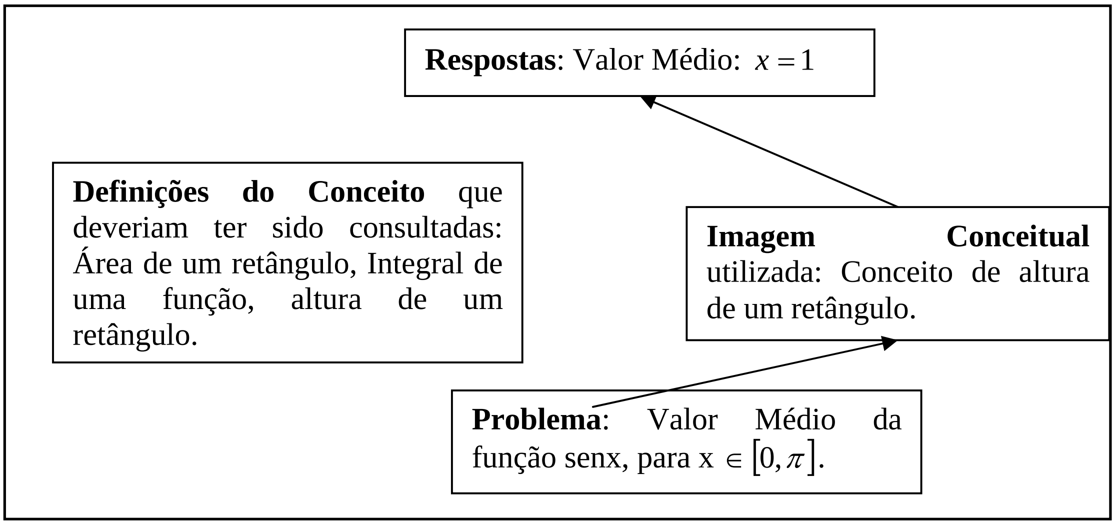
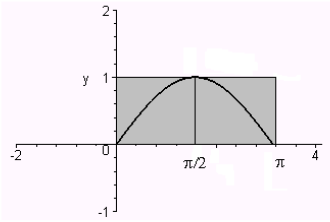


Figura 14: Resposta Intuitiva 2

A resposta valor médio 1 foi dada pelos alunos que consideraram como Valor Médio a <u>altura</u> do retângulo de base $[0, \pi]$ e altura 1:



Decerto leram: "O valor médio de uma função contínua e positiva f em um intervalo [a, b] pode ser definido geometricamente como a <u>altura</u> de um retângulo com base [a, b]" e não deram importância ao resto do texto, que tratava da área do retângulo. A imagem conceitual evocada foi "valor médio= altura do retângulo de base $[0, \pi]$."

Respostas Intuitivas apresentadas 3:

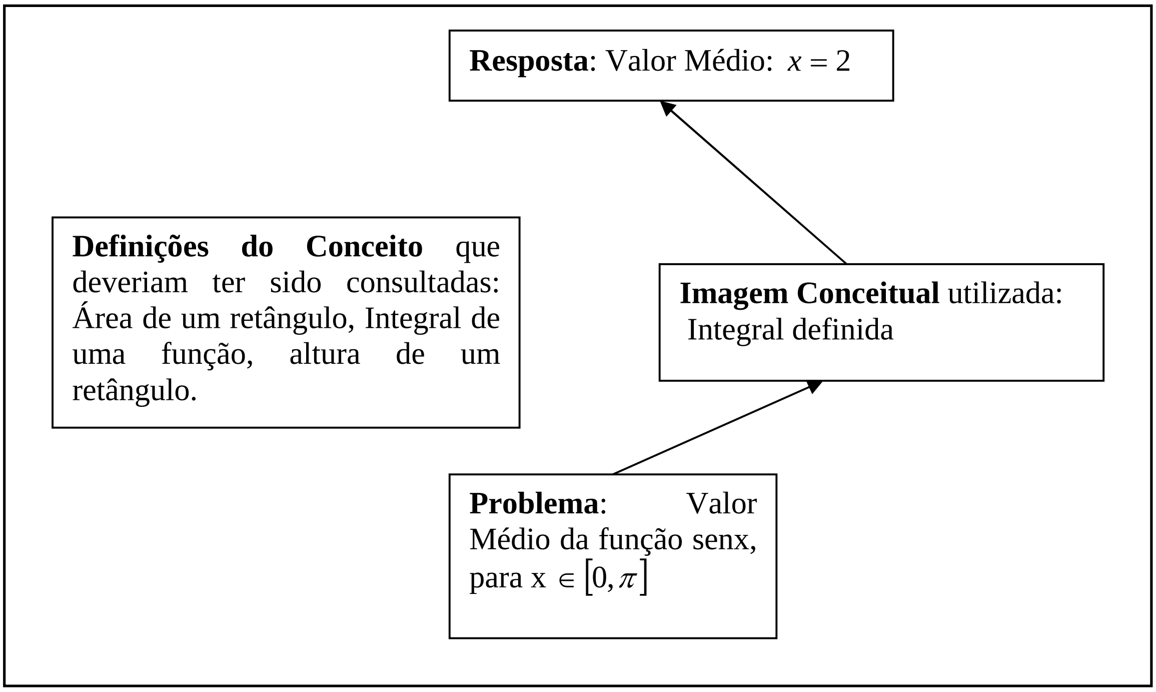


Figura 15: Resposta Intuitiva 3

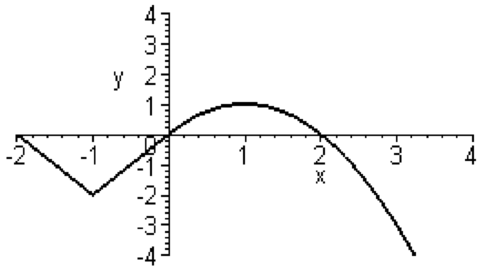
ISBN 978-85-89082-23-5

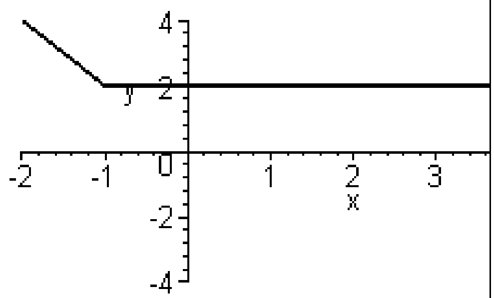
Os alunos que deram como valor médio 2, consideraram apenas o resultado da integral $\int_{0}^{\pi} senx dx$. A imagem conceitual evocada foi “valor médio=área sob a curva”.

Questão 6. Por meio de um gráfico, dê o exemplo de uma função f, <u>definida</u> e <u>contínua em ϒ,</u> tal que f ’(1) = 0 e que seja derivável em todos os pontos, exceto em –1. Justifique.

Resolução:

Estará correto qualquer gráfico de uma função contínua em ϒ, que possua derivadas laterais distintas à esquerda e à direita de x = -1 e que possua um ponto de máximo local ou de mínimo local em x = 1 ou que seja uma função constante numa vizinhança do ponto x = 1. Exemplos:





O gráfico a seguir mostra a proporção de acertos da questão por ano:

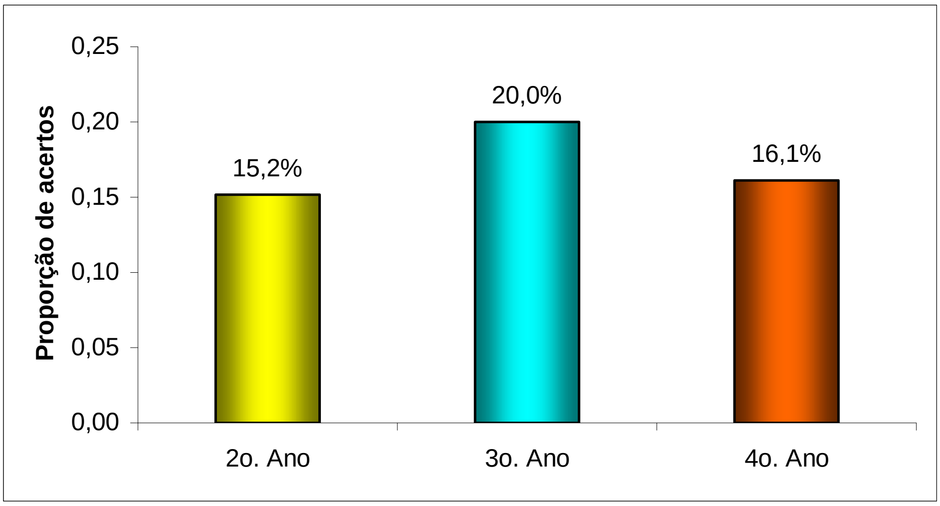


Figura 16: Proporção de acertos da questão 6 por ano

Respostas Intuitivas apresentadas:

Respostas: Figura 18.

Definições do Conceito que deveriam ter sido consultadas: continuidade e derivabilidade de uma função em um ponto.

Imagem Conceitual utilizada: função não derivável em um ponto é uma função descontínua neste ponto.

Problema: Obter f contínua em ϒ tal que f ’(1) = 0 e derivável em todos os pontos, exceto em -1.

Figura 17: Resposta Intuitiva de função não derivável

ISBN 978-85-89082-23-5

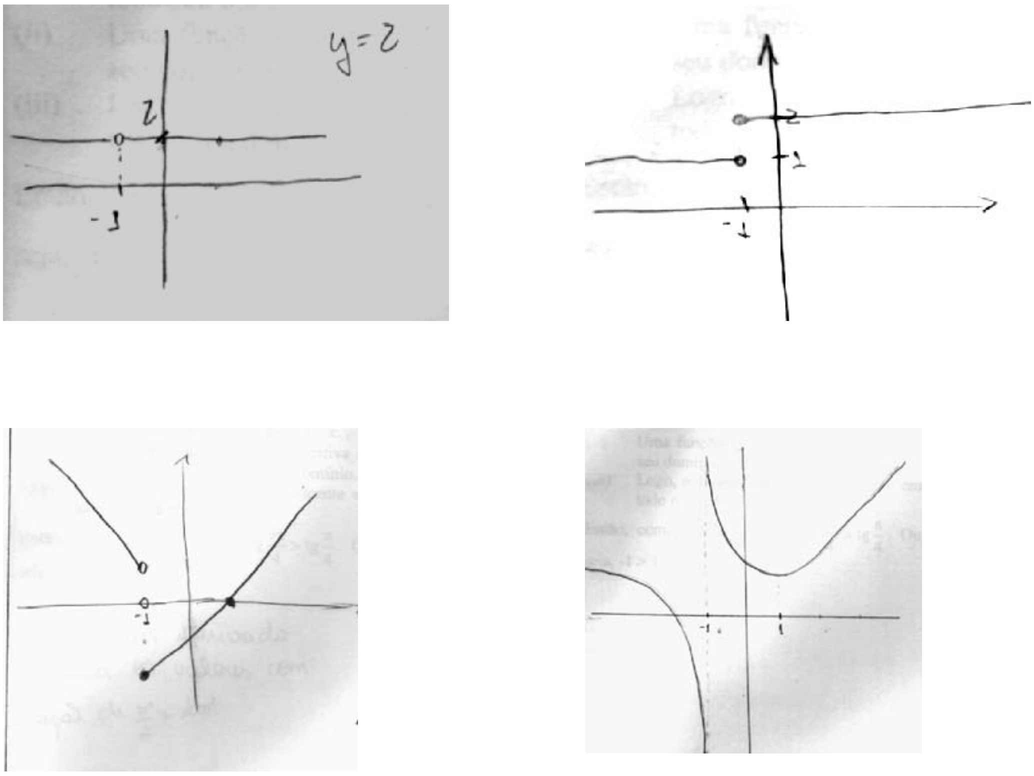


Figura 18: gráficos apresentados pelos alunos

Percebe-se, por meio destes gráficos, que o conceito de diferenciabilidade é confundido com o conceito de continuidade, o que também foi constatado no trabalho de Pinto (1998, p.119). Em geral, as imagens gráficas de funções contínuas apresentadas pelos estudantes eram de funções diferenciáveis. Funções não diferenciáveis eram identificadas como funções descontínuas e o teorema que diz que diferenciabilidade implica continuidade era muitas vezes confundido com continuidade implica diferenciabilidade. Existia uma grande dificuldade, às vezes até uma impossibilidade dos estudantes apresentarem um exemplo de uma função contínua, mas não diferenciável.

Ao nosso ver, uma saída para esta problemática seria a de tratar este assunto por meio da Investigação Matemática. Segundo Ponte (1999, p.111):

> Investigar é um termo que, muitas vezes, é usado em sentido lato para descrever um certo tipo de atividade a que se associam características, tais como, descoberta, exploração, pesquisa, autonomia, tomada de decisões, espírito crítico.

ISBN 978-85-89082-23-5

Uma atividade deste tipo poderia ser conduzida mediante a apresentação de vários gráficos como, por exemplo, os mostrados a seguir:

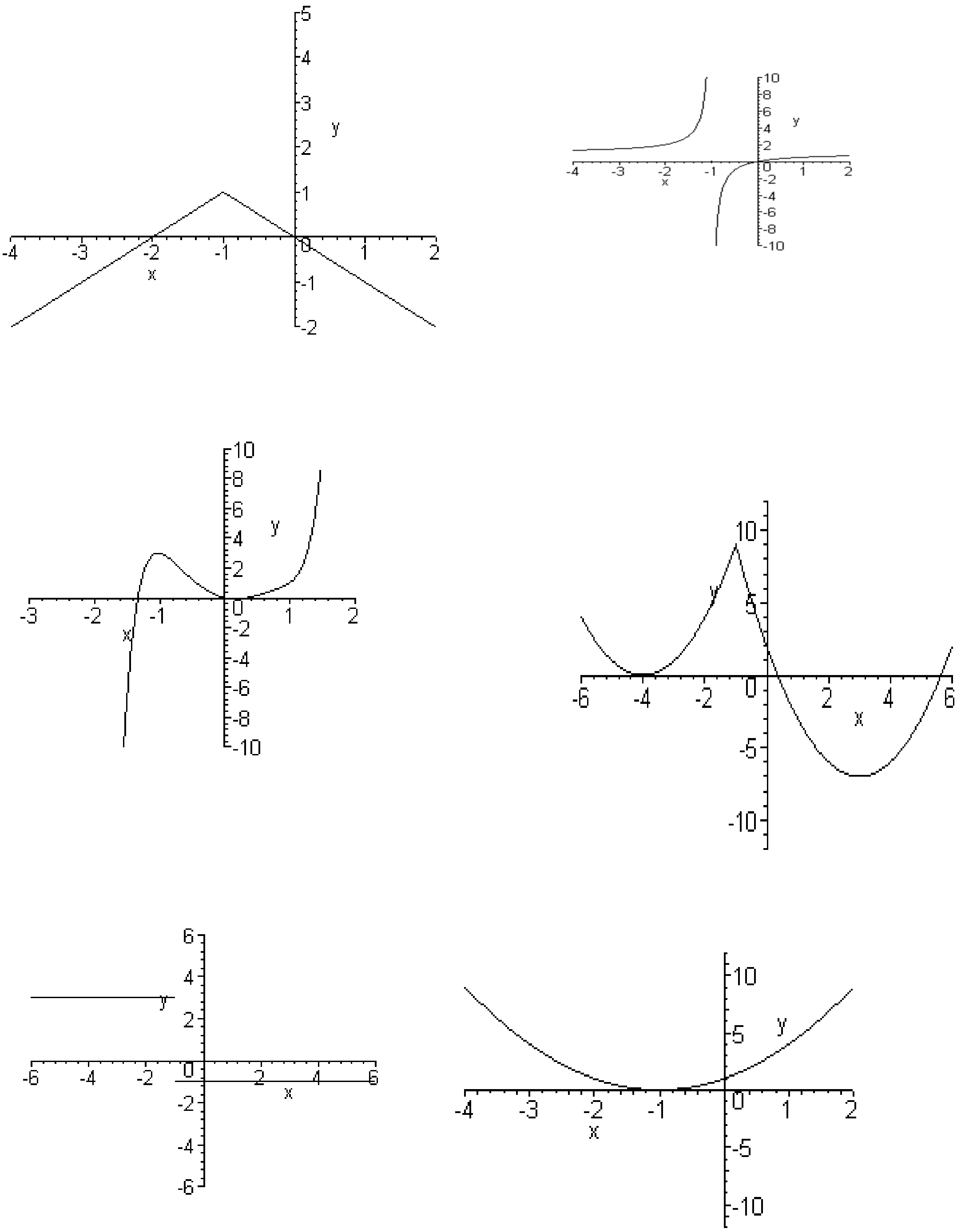


Figura 19: Sugestões de gráficos

Poderia ser perguntado:

Quais as características das funções apresentadas nos gráficos?

Como se comportam no ponto x = -1?

A que conclusões você pode chegar?

O aluno, por si mesmo, poderia chegar à conclusão de que toda função diferenciável é contínua.

Durante o processo de Investigação, o aluno pode ser convidado a transcrever as suas respostas utilizando também a definição formal, pois, via de regra, essas são baseadas somente na imagem conceitual. Isto poderia criar o hábito no aluno de dar uma resposta sempre consultando sua imagem conceitual atrelada à definição do conceito.

Em todos os casos de respostas intuitivas apresentadas neste trabalho, a célula da definição do conceito, mesmo não vazia, não foi consultada durante o processo de solução do problema, o que é confirmado em várias pesquisas citadas por Pinto (1998, p. 33). Estas pesquisas mostraram que os estudantes geralmente não consultam sua definição do conceito para responder a situações-problema ou a tarefas cognitivas. Ao invés disso, eles evocam a sua imagem conceitual, construída por meio de suas experiências diárias. Pinto diz que definições do conceito deveriam ser consultadas antes de formular soluções para as questões. Na sua pesquisa Pinto (1998, p. 61) cita que somente uma pequena minoria dos estudantes usou a definição formal.

Algumas considerações

Foi possível constatar que os alunos têm uma grande dificuldade no manejo da língua escrita, o que os impede de expressar fielmente suas idéias e avançar para um pensamento matemático mais avançado. Isto também foi percebido por Lachini (2001, p.171):

> A análise de provas e de exercícios resolvidos revela um déficit lingüístico por parte do aluno que chega à Universidade; mal alfabetizados em matemática, muitos alunos têm dificuldade em perguntar, apresentar dúvidas ou defender soluções encontradas.

ISBN 978-85-89082-23-5

Na maioria dos problemas, uma simples referência à imagem conceitual dá resultado. Isto porque a grande maioria dos problemas impostos ao aluno são problemas rotineiros[7]. Somente problemas não-rotineiros[8], nos quais o aluno pode cair em erros por imagens conceituais incompletas, o forçam a se reportarem à definição do conceito. Infelizmente, tais problemas são raros e muitas vezes considerados "injustos" pelos alunos. Quebrar esse hábito dos alunos de resolver um problema sem consultar a célula da definição conceitual é, portanto, uma batalha árdua, uma vez que a forma de pensar do aluno, envolvida neste hábito, é imprópria quando se quer atingir um pensamento matemático avançado. A meta a ser atingida é fazer com que os alunos resolvam questões sem se reportarem única e exclusivamente à imagem conceitual. As definições podem ter papéis extremamente importantes, como salvar o estudante de muitas armadilhas colocadas pela imagem conceitual.

Para os alunos cursarem Análise com êxito, seria fundamental que eles utilizassem suas imagens conceituais e definições do conceito todas as vezes que fossem responder uma questão. Seria essencial que eles tivessem bem claro as definições dos conceitos mais importantes do Cálculo como: Função, Derivada, Integral e que o professor fosse capaz de compreender as imagens conceituais de seus alunos. Para isso, deveria trabalhar com atividades que permitissem essa leitura. Isso não é uma coisa fácil. É como colocar o aluno para escutar uma música e tentar perceber como ele a está ouvindo. A música é uma só, mas a maneira de ouvir é individual, única e vai depender de todas as suas experiências anteriores. Um músico pode escutar as notas, o tipo de acorde, a tonalidade, o tipo de ritmo, etc, enquanto um leigo já escutaria uma melodia ou se ateria mais à letra.

De posse desta imagem conceitual, o professor poderia trabalhar para que o aluno entendesse a definição matemática do conceito e formasse a sua própria definição do conceito imagem. Quando um professor de Cálculo for trabalhar o conceito de derivada, por exemplo, deve estar ciente do fato de que os alunos já tiveram alguma experiência com tangentes a circunferências no Ensino Médio e que o Conceito Imagem que possuem, neste

---

[7] Neste trabalho chamaremos rotineiros os problemas que aparecem com muita freqüência em grande parte dos livros didáticos.

[8] Não rotineiros os problemas que quase não aparecem nos livros didáticos.

caso, é o de que a reta tangente deve tocar a curva em um único ponto, sem nunca atravessá-la, de tal modo que a reta toda esteja em apenas um lado da curva. Esse conceito **deve ser trocado** pelo novo conceito de tangente ligado à noção de um limite de secantes.

Foi observado por Pinto (1998, p.62) que o impacto do curso de Análise Matemática nos estudantes não foi efetivo em introduzi-los a um modo formal de pensamento e trabalho em Matemática e não estruturou suas imagens conceituais prévias no sentido de entender as definições formais apresentadas no curso.

A maioria dos professores acredita que quanto mais "arrumada" deixar a aula, mais organizadas e encadeadas tiverem as suas idéias, melhor para o aluno aprender. Às vezes passa horas preparando as suas aulas, pensando qual é o caminho mais curto e mais rápido para alcançar determinado resultado, e deixa tudo pronto, arrumado, para a hora da aula. Quando chega na sala, reproduz no quadro de giz o produto final de tudo o que pensou e se 'sente um herói'. Às vezes, por um descuido, pode até esquecer uma passagem. Neste caso, resolve sozinho em um canto do quadro a sua dúvida e depois apaga, apresentando só o resultado perfeito para os estudantes. Ou seja, os alunos não têm a oportunidade de observar como foi o desenvolvimento que gerou esse produto final, quais conflitos apareceram e como foram superados, qual a seqüência de dedução escolhida para se chegar àquele resultado, qual a lógica utilizada. O aluno, obviamente, irá achar tudo muito difícil, pois já recebe tudo formalizado, sem passar pelos processos intermediários. O que é essencial para os estudantes é uma abordagem ao conhecimento matemático que cresça com eles, que leve em consideração o desenvolvimento da estrutura do seu conhecimento e seu processo de pensamento.

Propomos que a disciplina de Análise Real seja conduzida por meio da Investigação Matemática por entender que esta promove uma dinâmica de aula mais ativa e envolvente, permitindo a argumentação, o uso da indução e da analogia como ferramentas para a formação/aquisição de imagens conceituais e definições do conceito compatíveis com os matemáticos formais, refinando, deste modo, o pensamento dos alunos, gerando uma aprendizagem significativa e mais eficaz.

ISBN 978-85-89082-23-5

Referências

COBIANCHI, A. S. **Estudos de Continuidade e Números Reais:** Matemática, Descobertas e Justificativas de Professores. 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

DIAS, M. S. **Reta Real –** conceito, imagem e conceito definição. 2002. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2002.

LACHINI, J. Subsídios para explicar o fracasso de alunos em Cálculo. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. **A prática educativa sob o olhar de professores de cálculo**. Belo Horizonte: Fumarc, 2001. p. 146-188.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em Educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

PENTEADO, C.B.; SILVA, B.A. Concepções do Professor do Ensino Médio relativas à Densidade do Conjunto dos Números Reais e suas Reações frente a Procedimentos para a Abordagem desta Propriedade. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Londrina. **Anais...** Londrina: UEL, 2004. 1 CD-ROM.

PINTO, M.M.F. **Students' understanding of real analysis**. 1998. Tese (Doutorado em Educação) – Education Institute, Universidade de Warwick, Coventry, Inglaterra, 1998.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.;VARANDAS, J. M.; FERREIRA, C. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. **Quadrante**, Lisboa, v. 7, n. 2, p. 41-70, 1999.

SOUZA, L.G.S. **Como alunos do Curso de Licenciatura em Matemática que já cursaram uma vez a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I lidam com alguns conceitos matemáticos básicos.** 2003. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2003.

VINNER, S. The Role Definitions in the Teaching and Learning of Shlomo Vinner. In TALL, D. (Org.). **Advanced mathematical thinking.** Dordrecht: Kluwer, 1991, p. 65-79.