ISBN 978-85-89082-23-5

As Produções Matemáticas de Estudantes Universitários ao Estender Modelos Lineares a Contextos Não-lineares[1][2]

Mathematical production of university students who extend linear models to non-linear contexts

Mónica E. Villarreal[3]
Cristina B. Esteley[4]
Humberto R. Alagia[5]
Tradução: Maria Ednéia Martins[6]

Resumo

Este artigo apresenta um estudo realizado a partir de produções matemáticas escritas de alunos universitários, nas quais está presente o fenômeno que denominamos *extensão de modelos lineares a contextos não-lineares*. Ao falarmos em modelo linear, referimo-nos ao modelo $y = a.x+b$, às representações particulares de proporcionalidade direta ou ao esquema de regra de três simples. A metodologia de pesquisa é do tipo qualitativa. Trata-se de um estudo descritivo no qual foram analisados os tipos de problemas que os estudantes resolvem por extensão de modelos lineares, distintas abordagens dos estudantes nessas resoluções, o texto de ensino e os ambientes de aprendizagem dos quais participam os alunos. A partir dessa análise, que constata a presença e persistência do fenômeno de extensão de modelos lineares a contextos não-lineares, são realizadas algumas propostas cuja implementação poderia ajudar na superação do fenômeno.

Palavras-chave: Produções matemáticas de estudantes universitários. Ilusão de linearidade. Modelos matemáticos lineares e não-lineares.

[1] Digitalizado por Marcílio Leão e Sinval de Oliveira.
[2] Este trabalho foi realizado com o apoio da Secretaria de Ciência e Tecnologia da Universidade Nacional de Córdoba e da Agência Córdoba Ciência da Província de Córdoba, Argentina.
[3] Universidade Nacional de Córdoba - Faculdade de Ciências Agropecuárias (Argentina).
Endereços para correspondência: Av. Cornelio Saavedra 3113, Barrio Granadero Pringles, 5008, Córdoba, Argentina. mvilla@agro.uncor.edu.
[4] Universidade Nacional de Vila Maria - Instituto Acadêmico Pedagógico de Ciências Humanas (Argentina).
Endereços para correspondências: Gay Lussac 6158, Barrio Villa Belgrano, 5147 Córdoba, Argentina. rguillet@arnet.com.ar.
[5] Universidade Nacional de Córdoba - Faculdade de Matemática, Astronomia e Física (Argentina).
Endereços para correspondências: Facultad de Matemática, Astronomía y Física - Universidad Nacional de Córdoba, Ciudad Universitaria, 5000, Córdoba, Argentina. alagia@mate.uncor.edu.
[6] Mestranda em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro.
Endereços para correspondências: Rua Pedro de Oliveira, 79. Jardim Fernanda, Santa Cruz do Rio Pardo, S.P, Brasil. CEP: 18.900-000. mared.martins@ig.com.br.

ISBN 978-85-89082-23-5

Abstract

This article contains a study of students' written work where an extension of linear models to non-linear situations can be observed. By linear models we mean the model $y= a.x+b$, particular representations of direct proportionality and the diagram for the rule of three. We use a qualitative methodology to make a descriptive analysis of types of non-linear problems that students work out applying a linear model. We consider different approaches used by the students, the learning environments the students share and the 'teaching text'. Based on this,analysis, we suggest possible ways to deal with this phenomenon in the classroom.

Keywords: University students' mathematical productions. Illusion of linearity. Linear and non-linear mathematical models.

Introdução

O trabalho que apresentamos está relacionado com a compreensão matemática de estudantes universitários de carreiras não-matemáticas, centrando-nos na descrição e na análise de um fenômeno que se produz entre estes estudantes, ao qual denominamos *extensão de modelos lineares a contextos não-lineares ou sobregeneralização de modelos lineares*. Tal fenômeno mostra a resolução de certas questões matemáticas que vinculam duas variáveis, empregando modelos lineares, ainda que a situação colocada, a partir da perspectiva do docente, seja obviamente não-linear. De Bock, Verschaffel e Janssens (1998a) se referem, também, a este fenômeno indicando que, para os estudantes, o modelo linear tem uma aplicação universal que os leva a tratar relações numéricas como se fossem lineares. Cabe esclarecer que a presença deste fenômeno não implica necessariamente que os estudantes estejam conscientes de que estão fazendo uso de modelos lineares em contextos não-lineares. Ao falar de modelo linear[7], nos referimos em geral à representação algébrica $y=a.x+b$, às representações particulares de proporcionalidade direta, ou ao esquema clássico de regra de três simples, trabalhado na Argentina desde a escola primária: se a x_1 corresponde y_1, então, a x_2 corresponde $y_2 = (x_2 . y_1) / x_1$, que geralmente é esquematizado da seguinte forma:

$$x_1 \to y_1$$
$$x_2 \to \frac{x_2 \cdot y_1}{x_1}$$

[7] Usamos a expressão “modelo linear” para nos referirmos tanto à função de proporcionalidade direta $y = a.x$ *como* à função afim $y = a.x+b$, pois esta é a denominação que normalmente se utiliza na escola secundária ou no primeiro ano da universidade na Argentina.

No âmbito da pesquisa em Educação Matemática, este fenômeno tem sido estudado com alunos da escola elementar, focando-se a representação particular de proporcionalidade direta, e é conhecido como *"linear misconception"*, *ilusão de proporcionalidade ou de linearidade* e, inclusive, *de armadilha da proporcionalidade* (BEHR; HARE; POST; LESH, 1992). A propensão a sobregeneralizar o emprego de modelos lineares além de seu domínio de aplicação está presente também no nível médio. Os estudos de De Bock, Von Doorem, Verschaffel e Janssens (2001) e De Bock, Verschaffel e Janssens (1998a, 1998b), realizados com estudantes secundários (12 a 16 anos), revelam uma forte e resistente tendência à mudança, ao aplicar modelos lineares para resolver situações problemáticas, que envolvem comprimento e área de figuras planas semelhantes. Esses autores realizaram um estudo baseado na resolução de provas escritas que são analisadas através de técnicas estatísticas e, também, qualitativamente. Nessas pesquisas têm prevalecido as explicações da ocorrência do fenômeno considerando o erro como ignorância do estudante. Existem, inclusive, trabalhos nos quais, sem que a "ilusão da linearidade" seja o foco do estudo, nota-se sua presença. Por exemplo, um artigo de Karrer e Magina (2000, p. 18), que apresenta uma seqüência de ensino para a introdução de logaritmos, indica que "houve uma tendência à utilização do pensamento linear" e mostra vários episódios nos quais se pode observar essa tendência.

Esse fenômeno também tem sido observado informalmente por outros colegas no âmbito de ensino médio ou universitário de diversas origens. Em geral, o descrevem como persistente, e a explicação de sua ocorrência tem sido buscada a partir do erro como ignorância de quem aprende.

No entanto, devido à persistência e presença da sobregeneralização de modelos lineares em diversos tipos de problemas e contextos no ensino universitário, consideramos necessário buscar explicações a partir de outras perspectivas. Analisar esta problemática, considerando o erro como deficiência, não traz elementos que a expliquem ou permitam superá-la. Neste sentido, resgatamos a noção de erro de Brousseau (apud BALACHEFF, 1984), que expressa:

> Um erro não é apenas conseqüência de ignorância, de incerteza ou de um acidente. Um erro poderia ser a conseqüência de um conhecimento prévio que tem seu próprio interesse, seu próprio êxito, mas que aparece como

ISBN 978-85-89082-23-5

> falso diante de novas circunstâncias, ou, simplesmente, não adaptado. Assim, na análise didática, os erros não são entendidos como meras falhas dos alunos, mas muito mais como sintomas da natureza das concepções que estão subjacentes em suas atividades matemáticas.

Ao considerar as concepções subjacentes às atividades matemáticas dos estudantes, podemos destacar os trabalhos de Confrey (1991a, 1994) e Confrey e Smith (1994), os quais, a partir da análise de seus "experimentos de ensino", trazem questões sobre o *status* epistemológico de certas construções matemáticas dos estudantes, entre outras. Neste sentido, Confrey (1991a) argumenta que compreender as ações dos estudantes implica introduzir-se em sua problemática e não pressupor que ela coincida com a do docente/investigador. As respostas dos estudantes que se desviam da expectativa do docente/investigador podem ser legítimas como perspectivas alternativas, ou válidas e efetivas em outros contextos. Incentivar o estudante a mostrar seus pontos de vista implica uma oportunidade para que o docente/investigador vislumbre as perspectivas dos estudantes e possa questionar as próprias, examinando-as à luz dos discentes: *"Enquanto aprendemos a ser mais e mais conscientes desta relação dual, podemos chegar a ver como, freqüentemente, o que é rotulado como inadequação do estudante é realmente o resultado de nossa própria inflexibilidade para considerar perspectivas alternativas"* (CONFREY, 1994).

Embora Confrey não faça referência explícita à extensão de modelos lineares a contextos não-lineares, podemos encontrar passagens de seus experimentos de ensino onde ocorre este fenômeno, ao trabalhar com um estudante universitário (CONFREY, 1991b).

O tratamento do fenômeno de extensão da aplicabilidade de modelos lineares a contextos não-lineares em estudantes universitários não é freqüente na literatura. Neste sentido, concordamos com De Bock, Verschaffel e Janssens (1998a, p. 65) quando indicam que *"o predomínio da linearidade no raciocínio dos estudantes tem sido freqüentemente descrito e ilustrado com respeito a diferentes domínios da Matemática nesta literatura, mas tem sido propiciada pouca ou nenhuma investigação empírica sistemática"*. É por isso que os objetivos gerais deste trabalho são:

- Estudar e documentar o fenômeno da extensão da aplicabilidade de modelos lineares a contextos não-lineares, a partir de produções escritas de alunos universitários.

- Interpretar a origem e persistência do fenômeno no contexto de ensino onde os dados foram recolhidos.
- Realizar algumas sugestões que poderiam contribuir para superar a problemática da persistência.

Metodologia

A metodologia de pesquisa proposta é do tipo qualitativo, já que procuramos a compreensão profunda de um fenômeno e não sua medição. O desenho metodológico foi emergente (LINCOLN; GUBA, 1985) já que a decisão na realização de algumas atividades foi tomada com base em resultados de atividades anteriores ou com a finalidade de estudar conjecturas que surgiram no decorrer do trabalho. Trata-se de um estudo descritivo baseado na análise do texto de ensino, com os ambientes de aprendizagem que este gera, os problemas matemáticos formulados e as produções escritas de estudantes.

Ao analisar o texto de ensino, nos referimos às características das aulas teóricas ou práticas ministradas pelos docentes, e à bibliografia empregada ou sugerida nos cursos de Matemática que os estudantes de Agronomia cursaram.

Os problemas analisados correspondem a:

- Evoluções parciais ou globais realizadas por 300 estudantes de Matemáticas da Faculdade de Ciências Agropecuárias (FCA) da Universidade Nacional de Córdoba (UNC-Argentina) e 53 estudantes de Matemática I para Agronomia na Universidade da Frontera (UFRO-Temuco-Chile) durante o ano de 2001.
- Exercícios especificamente projetados para este estudo, e que foram resolvidos por grupos de estudantes que eram alunos da pesquisadora, docente na FCA durante os anos 2001 e 2002.

As produções escritas são as resoluções que os estudantes deram aos problemas antes mencionados, e que mostram o fenômeno que estamos abordando.

Os procedimentos utilizados para alcançar os objetivos propostos são: a realização de uma lista com exemplos de produções escritas dos estudantes, que mostram a extensão da aplicação de modelos lineares em contextos não-lineares, a análise dos diferentes tipos

ISBN 978-85-89082-23-5

de problemas apresentados e soluções encontradas, a descrição do contexto de ensino relacionado com as funções, em particular com as funções que descrevem modelos lineares, quadráticos, exponenciais e logarítmicos. Também desenvolvemos alguns procedimentos não previstos antecipadamente em função das conjecturas que emergiram durante o estudo.

O processo de análise seguido é do tipo indutivo/construtivo (LINCOLN; GUBA, 1985), já que não partimos de hipóteses previamente estabelecidas, e, sim, a partir dos dados recolhidos, geraram-se categorias e conjecturas cuja validade foi posta à prova no decorrer do trabalho.

A análise das produções escritas dos estudantes não se realizou em termos de atribuição de valores do tipo certo/errado. Ainda que possam surgir concepções que não são aceitas como corretas pelos matemáticos, a ênfase está posta no processo seguido pelos estudantes, sem pretender fazer comparações, e, sim, buscando “escutar suas vozes” (CONFREY, 1991a, 1994). Assim, nossas perspectivas são questionadas, criando a necessidade de modificá-las para conseguir, a partir de uma nova perspectiva, uma melhor compreensão, uma nova interpretação das concepções dos estudantes, manifestadas na forma escrita.

Resultados e análise

A seguir, relataremos os resultados obtidos das observações realizadas a respeito do texto de ensino e os ambiente de aprendizagem que este gera nas aulas de Matemática, os problemas formulados para os estudantes e suas produções escritas ao resolvê-los.

Texto de ensino e ambientes de aprendizagem

As aulas de Matemática ministradas aos estudantes, cujas produções são analisadas neste estudo, seguem o modelo clássico, caracterizado pela seqüência: exposição – exemplos – exercícios (ALAGIA, 1994). Na Faculdade de Ciências Agropecuárias da Universidade Nacional de Córdoba, o curso está dividido em aulas teóricas e práticas. De acordo com análise realizada por Alagia (1999) a respeito da estrutura de cursos

ISBN 978-85-89082-23-5

universitários de Matemática, no que se refere à separação entre teoria e prática, observa que:

> O contrato é diferente em cada caso, na teoria se utiliza o discurso da apresentação de noções e resultados matemáticos, enquanto que na prática se estabelece, ainda que seja parcialmente, um contrato de aprendizagem empirista. Ao resolver problemas formalmente ligados ao discurso da teoria, se supõe que haja um processo de aquisição direta de estratégias e destrezas matemáticas. Está comprovado empiricamente que os estudantes percebem a diferença, usualmente, ao não vincular ambos aspectos como integrantes do mesmo domínio de conhecimento. (ALAGIA, 1999, p.40)

As aulas teóricas ocorrem semanalmente para um público aproximado de 400 alunos, que são divididos em dois grupos. Nestas aulas, inicialmente o professor apresenta os conceitos centrais e algumas técnicas e exemplos de aplicação das mesmas. A seqüência de conteúdos obedece a ordem que descrevemos a seguir: funções (definição, correspondência, domínio, imagem, formas de representação, intersecção com os eixos das coordenadas, crescimento, composição, inversa, transformações), estudo de funções particulares: função linear, função quadrática, função exponencial, função logarítmica, funções trigonométricas. Em geral, se introduz o estudo de cada uma delas através de um exemplo de aplicação. Em particular, o exemplo escolhido para função linear responde ao modelo $y= a.x$. Posteriormente, estende-se esse modelo a sua forma geral $y = a.x + b$. Faz-se explícito que a forma *$y= a.x$ representa uma proporcionalidade direta com razão de proporcionalidade a*. No entanto, não se estabelecem relações com o esquema de regra de três simples, aprendido na escola primária. Posteriormente é analisado o significado dos parâmetros a e b da função.

Ao estudar funções quadráticas ($y= a.x^2+b.x+c$) novamente parte-se de uma situação problema cuja solução requer o uso deste tipo de função e, a seguir, constrói-se seu gráfico realizando uma análise do efeito de cada parâmetro, para finalmente chegar às fórmulas que permitem calcular, a partir dos ditos parâmetros, as coordenadas do vértice e o valor das raízes.

O tratamento das funções exponenciais inicia-se com a construção de uma função exponencial particular que modela uma dada situação. Define-se a expressão que corresponde a este tipo de funções, realizando restrições sobre sua base. Para isso se recorda como se calculam as potências a^x, começando com expoentes naturais, para em seguida estender-se a expoentes inteiros não positivos e racionais, explicando esta extensão a partir da conservação das propriedades das potências. A partir desta análise se deduz que a base das funções exponenciais $y= a^x$ deve ser positiva e diferente de um, indicam-se domínio e imagem destas funções e se constroem gráficos com bases maiores ou menores que um. Este tratamento tradicional de expressões e funções exponenciais tem sido também relatado por Confrey (1991b, p. 125-126) ao descrever a apresentação desse conteúdo em textos de Pré-cálculo, de uso freqüente em universidades, coincidente com a descrição antes apresentada.

A função logarítmica é introduzida como operação e função inversa da exponencial, que permitirá determinar incógnitas que estão no expoente de alguma expressão. Ao gerar os gráficos das funções logarítmicas, emprega-se o recurso gráfico que permite gerar funções inversas. Finalmente, são expostas as propriedades do logaritmo, associada às propriedades das potências.

Em todos estes casos, ao construir os gráficos de algumas funções (por exemplo $y= x^2$, $y=2^x$ ou $y= (1/2)^x$) emprega-se como recurso auxiliar uma tabela com alguns valores particulares, ainda que em nenhum caso se realize um estudo das diferenças, para além do gráfico.

Cabe notar que o texto de ensino segue, em geral, a estrutura clássica de um curso de Pré-cálculo, sendo importante notar que, para introduzir os conteúdos, apresentam-se, como meio para motivar, problemas de aplicação nas Ciências Agropecuárias. Não obstante isso, logo se retorna a um tratamento clássico com predomínio do cálculo algébrico.

Além das aulas teóricas massivas, desenvolvem-se também as chamadas aulas práticas, organizadas em torno do trabalho dos estudantes, os quais resolvem em grupo ou individualmente, exercícios e problemas que foram preparados para cada uma das unidades que constituem o programa e que formam parte do "Guia de Exercícios e Problemas". O total de estudantes é separado em dez grupos de aproximadamente cinqüenta alunos. Cada um destes grupos está a cargo de um professor, sendo que nenhum deles ministra as aulas teóricas. Cada docente responsável pelas aulas práticas responde às perguntas dos estudantes procurando estabelecer relações entre a teoria e a prática. Para cada um dos temas propõem-se exercícios de cálculo, problemas de aplicação e exercícios que demandam justificar a verdade ou falsidade de certas afirmações matemáticas. Os exercícios de cálculo têm como objetivo reforçar o manejo de certas técnicas e fórmulas e a aquisição de habilidades no uso da calculadora. Os problemas de aplicação procuram mostrar o uso da Matemática na resolução de situações do âmbito agronômico. Os exercícios que demandam justificativas pretendem garantir o uso dos conceitos matemáticos e desenvolver a capacidade de elaborar justificativas que validem ou refutem uma proposição.

Por outro lado, as aulas de Matemática I, na UFRO, estavam distribuídas em três aulas semanais para um único grupo de cinqüenta e três estudantes. Essas aulas estavam a cargo de um único docente e se trabalhavam, simultaneamente, aspectos teóricos e práticos dos conteúdos selecionados. A seqüência dos conteúdos e tipos de exercícios e problemas é equivalente ao descrito anteriormente para as aulas da UNC.

Esta forma de trabalho, estruturada nas aulas teóricas e práticas, responde a uma educação matemática tradicional, que pode se enquadrar no que Skovsmose (2000) denomina o paradigma do exercício, onde a preocupação central está posta sobre os conteúdos a serem ensinados e aprendidos para resolver os exercícios formulados. A premissa central do paradigma do exercício é a existência de uma única resposta para cada exercício. De acordo com a classificação realizada por este autor, poderíamos dizer que os ambientes de aprendizagem gerados, tanto nas aulas teóricas como nas práticas, estão dominados pela presença de exercícios e problemas apresentados em contextos de Matemática pura ou de semi-realidade, definidos pelo próprio problema. Os problemas que analisaremos na próxima seção são exemplo disso.

Os problemas

Em relação aos problemas que os estudantes resolveram, observamos a presença de dois tipos:

(I) Problemas em que um modelo não-linear é explicitado através de uma expressão algébrica (funções quadráticas, exponenciais ou logarítmicas).

ISBN 978-85-89082-23-5

Exemplos deste tipo de problemas são:

Problema 1: Depois do primeiro mês de vida, o crescimento de uma certa espécie de árvore responde à equação:

$$h(t) = 12 . \log_3 (t) + 7 ,$$

onde a altura está dada em cm e o tempo em meses.

a) Quanto medirá a árvore aos 4 meses?
b) Quanto tempo deverá transcorrer para que a árvore alcance a altura de 1m?

Problema 2: Em um experimento biológico, determinou-se que a população de uma certa espécie de microorganismos está dada pela fórmula:

$$N(x) = -2.x^2 + 360.x + 8000 ,$$

onde $N(x)$ é o número de microorganismos depois de x dias.

a) Quantos microorganismos haverá depois de 10 dias?
b) Em quanto tempo a população alcança seu máximo?
c) Qual é o número máximo de microorganismos que a população alcança?
d) Em quantos dias a população desaparece?
e) Depois de quantos dias o número de microorganismos na população chega a 21000?
f) De acordo com o contexto do problema, para que valores de x tem sentido considerar esta função?
g) Esboce o gráfico da função, levando em consideração os dados obtidos nos itens anteriores.

ISBN 978-85-89082-23-5

(II) Problemas que representam uma situação não-linear, em que a expressão algébrica que a descreve não se apresenta de forma explícita. Exemplos deste tipo de problemas são:

Problema 3: Indique se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta. Um inseto, que, ao nascer, pesa 30 g., aumenta seu peso mensalmente uns 20%. Então, o peso, ao final de dois meses, é de 43,2 g.

Problema 4: Se uma planta mede, ao começar um experimento, 30 cm e aumenta em 50% de sua altura mensalmente, quanto medirá ao final de 3 meses?

A porcentagem dos estudantes que realizam extensões de modelos lineares em problemas de tipo (I) é de aproximadamente 10%. Cabe notar que em enunciados de problemas como o 1, a ordem dos itens poderia estar influenciando a estratégia de resolução, já que, com os dados obtidos previamente com facilidade (o cálculo de $h(4)$ no item a) consegue-se uma estrutura de "três dados conhecidos e um quarto por encontrar", o qual poderia estar induzindo a formulação do esquema da regra de três simples, mostrado na Introdução. Esta conjectura estudou-se apresentando em exames de 2002 problemas similares ao 1, nos quais se inverteu a ordem dos itens. Naquela oportunidade, somente em 2,3% do total de alunos examinados (427) pôde-se determinar a presença do fenômeno de extensão, resultado inferior ao de 2001.

A porcentagem de estudantes que realizaram extensões de modelos lineares em problemas de tipo (II) é de aproximadamente 50%, em todos os grupos analisados. Com respeito a este tipo de problemas, pode-se conjeturar que a existência de diferentes interpretações poderia estar associada à clareza de redação dos enunciados. Por exemplo, no Problema 4, pode não estar claro se o incremento de 50% na altura da planta deve ser calculado em cada mês, sobre a altura que a planta tem ao iniciar esse mês ou se a porcentagem de crescimento de 50% deve ser calculada sempre sobre a altura inicial da planta.

ISBN 978-85-89082-23-5

No primeiro caso, o modelo subjacente é exponencial, e é o esperado pelo docente. Uma possível solução seria:

1º mês	$30+\frac{50}{100}30=45\ cm$
2º mês	$45+\frac{50}{100}45=67{,}5\ cm$
3º mês	$67{,}5+\frac{50}{100}67{,}5=101{,}25\ cm$

No segundo caso, o modelo subjacente é linear e a planta cresceria constantemente 15 cm por mês, e assim, ao final de três meses, sua altura seria de 30 *cm* + 15 *cm/mês*. 3 *meses* = 75 *cm*.

Para indagar se as diferentes interpretações do enunciado do problema estão associadas com uma possível falta de clareza em seu enunciado, no ano de 2002 fizemos sua reformulação, entendendo que poderia ser mostrada mais claramente a presença de um modelo exponencial, segundo o pretendido originalmente pelo docente. Trabalhamos com 85 estudantes, dos quais um grupo de 42 deles resolveu o problema 4 com o enunciado original e outro grupo, formado por 43 estudantes, trabalhou com o enunciado modificado: *Se uma planta mede, ao começar um experimento, 30 cm, e a cada mês sua altura aumenta 50% da altura do mês anterior, quanto medirá ao final de 3 meses?* Naquela oportunidade encontramos que, no primeiro grupo, 61,9% resolveram o problema manifestando o uso de um modelo linear enquanto que esta porcentagem baixou para 46,5% no segundo grupo.

Se agora analisamos detalhadamente os contextos dos problemas, podemos notar, como se indicou na seção anterior, que se referem a semi-realidades. Por exemplo, um inseto não pode pesar ao nascer 30 g (ver Problema 3), tampouco pode aumentar seu peso exponencialmente. Embora esse modelo possa ser válido num curto período de sua vida, essa informação não aparece no enunciado do problema. Observamos, também, que o modelo para o crescimento na altura de uma árvore, proposto no Problema 1, tampouco resulta realista já que, segundo o mesmo, a árvore demoraria 415 anos aproximadamente

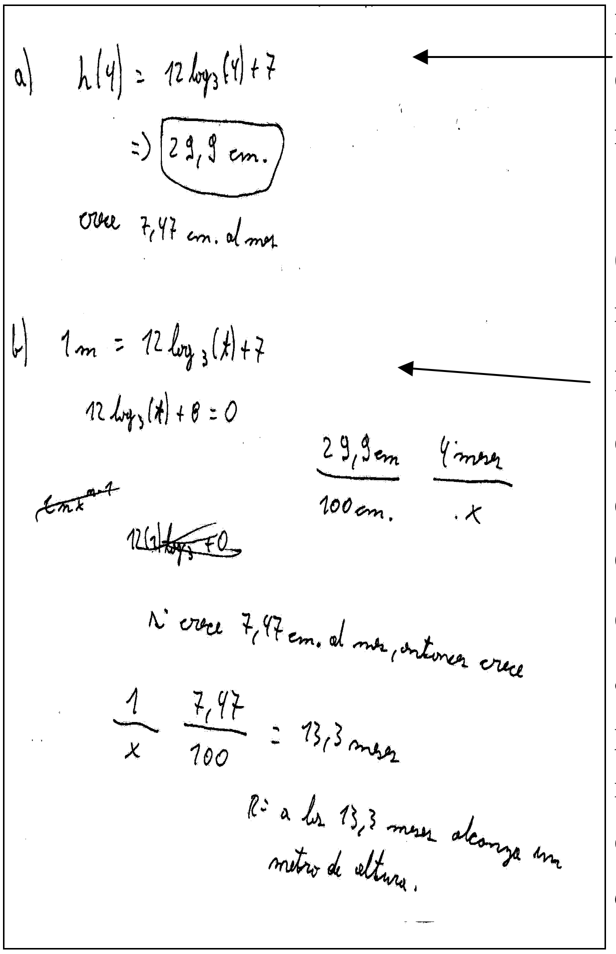
ISBN 978-85-89082-23-5

para chegar a medir 1 *m*, que seria a resposta esperada para o item b, o que se constitui em uma resposta absurda em termos biológicos.

Segundo Skovsmose (2000, p. 76) resolver exercícios com referência a uma semi-realidade está baseado nos seguintes princípios: "*a semi-realidade é totalmente descrita pelo texto do exercício; nenhuma outra informação é relevante para a resolução do exercício /.../ o único propósito de apresentar o exercício é resolvê-lo*". Esses aspectos apontados por este autor são reconhecidos nos problemas mostrados anteriormente, já que o propósito destes não é estudar modelos de crescimento, de um inseto ou uma árvore, e, sim, resolver um exercício. Desta forma, o aluno não pode efetivamente contrastar suas respostas com a realidade biológica, já que as respostas a estes problemas têm sentido apenas no contexto da aula de Matemática para a semi-realidade formulada no problema.

As produções dos estudantes

Apresentamos a seguir alguns exemplos de resoluções dos diferentes problemas, nos quais aparece o fenômeno de extensão.


a) $h(4) = 12\log_3(4)+7$

$\Rightarrow \boxed{29{,}9 \text{ cm.}}$

cresce 7,47 cm. al mes

b) $1m = 12\log_3(t)+7$

$12\log_3(t)+8=0$

$\frac{29{,}9\text{cm}}{100\text{cm.}}$ $\frac{4 \text{ meses}}{x}$

N: cresce 7,47 cm. al mes, entonces crece

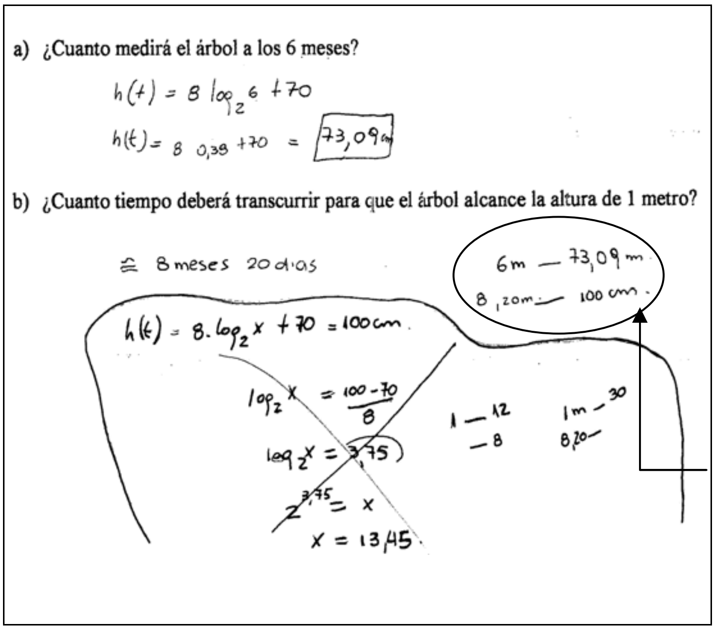
$\frac{1}{x}$ $\frac{7{,}47}{100}$ = 13,3 meses

R: a los 13,3 meses alcanza un metro de altura.

No item a) do Problema 1, um aluno calcula, erroneamente, *h(4)*, que era o valor pedido neste caso, efetuando $(log\,3)\cdot 4$, ao invés de $log_3 4$. Posteriormente, divide o resultado (29,9 *cm*) por 4 para obter o crescimento mensal da planta (7,47 *cm*).

Para resolver o item b), inicialmente formula a equação $1\,m = 12.\log_3(t)+7$. Note que deveria ter igualado a 100, já que a altura está dada em *cm*. Faz uma manipulação algébrica errada ($0 = 12.\log_3(t)+8$), mas logo abandona esta abordagem e escreve uma proporção, utilizando o valor de crescimento mensal (7,47 *cm*.) que obtivera no item a), e conclui que *"aos 13,3 meses* [a árvore] *alcança una altura de 1 metro"*.

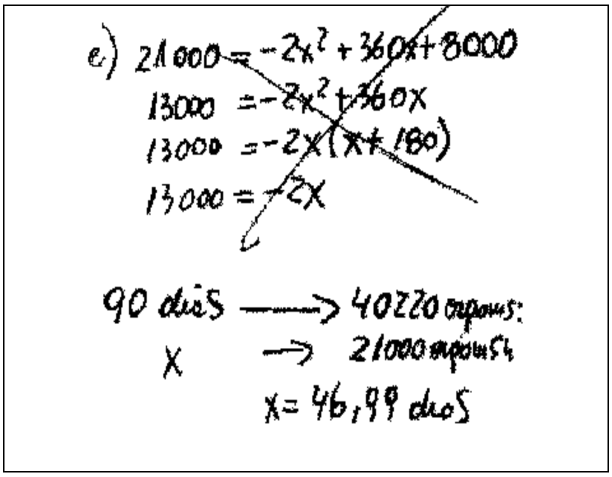
A resolução que apresentaremos a seguir corresponde a um exame no qual a função considerada para o crescimento da árvore no Problema 1 foi $h(t) = 8.\log_2 t + 70$, e no item a) se pedia a altura da árvore aos 6 meses. Vejamos a produção escrita de uma aluna.



No item a) comete um erro ao calcular $log_2 6$ como $log\, 2 / log\, 6$, ao invés de fazer $log\, 6 / log\, 2$. Posteriormente, formula e resolve corretamente a equação $100 = 8.log_2 x + 70$, que permite obter uma resposta correta ao item b), mas, finalmente, decide abandoná-la e faz uma regra de três, utilizando o valor *h(6)=73,09 cm*, que obteve no item a).

Entre as resoluções do Problema 2, podemos destacar as seguintes:

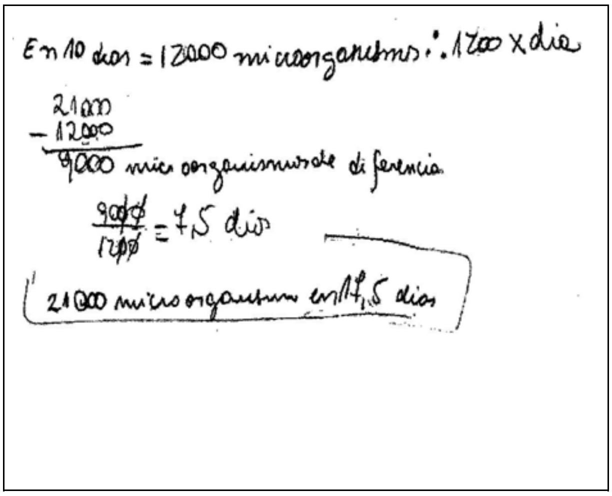
- Um estudante resolve corretamente o item b), obtendo como resposta 90 dias. Ao resolver o item c), no qual deve calcular *N*(90), comete um erro de cálculo e obtém como resposta 40220, no lugar de 24200 microorganismos, que é a resposta correta. Ao resolver o item e), que pergunta em quantos dias o número de microorganismos na população chega a 21000, encontramos a seguinte resolução:



O aluno formula inicialmente a equação $21000 = -2x^2 + 360x + 8000$, mas, ao tentar e não conseguir resolvê-la, decide utilizar as respostas obtidas em itens anteriores ($N(90) = 40220$ organismos) para formular a regra de três simples, que se observa ao fim da resolução escrita do aluno.

ISBN 978-85-89082-23-5

- Outro aluno obtém 12000 como resposta ao item a), que solicita a quantidade de microorganismos depois de 10 dias. Para resolver o item e), faz uso dessa informação, como vemos em sua resolução:


En 10 dias = 12000 microorganismos ∴ 1200 x dia

$$\begin{array}{r} 21000 \\ -\ 12000 \\ \hline 9000 \end{array}$$ microorganismos de diferencia

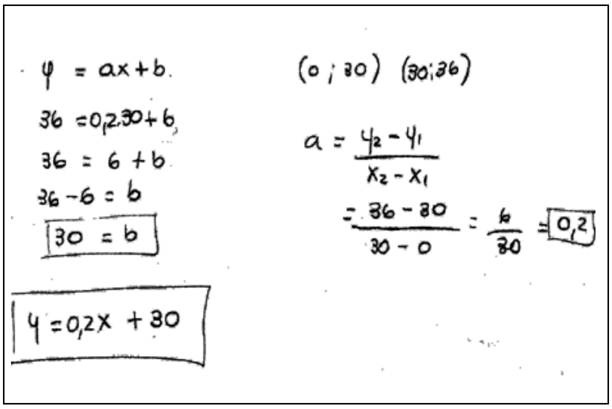
$\frac{9000}{1200} = 7,5$ dias

21000 microorganismos en 17,5 dias

Primeiro indica que, se em 10 dias há 12000 microorganismos, então haverá 1200 por dia. Posteriormente, calcula a diferença entre 21000 e 12000, obtendo 9000 microorganismos. Ao dividir 9000 por 1200, obtém a quantidade de dias em que apareceram 9000 microorganismos, e sabendo que em 10 dias há 12000, conclui que em 17,5 dias haverá 21000 microorganismos.

Com relação ao Problema 3, a resposta esperada pelos docentes é de que a afirmação é verdadeira, supondo que a porcentagem de aumento do peso do inseto em cada mês se calcula sobre o peso do mês anterior. Destacamos que esse tipo de problema não pede a criação de uma função para a sua resolução. No entanto, alguns estudantes formularam uma função (linear). Isso poderia estar relacionado com a necessidade de produzir uma explicação ou justificativa para a resolução do exercício, a partir dos conteúdos do curso de Matemática que estão fazendo. O modelo linear que os estudantes formularam foi $y = ax + b$, onde y estaria representando o peso do inseto e x o tempo em meses ou dias. Assim, o valor do coeficiente a seria 6 g/mês ou 0,2 g/dia. O valor de b é 30g nos dois casos. A seguir, mostramos um exemplo de resolução com esta abordagem.

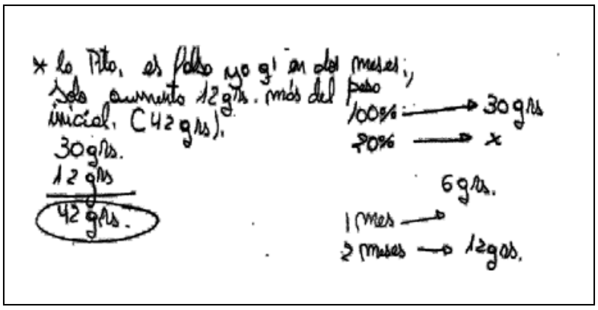
ISBN 978-85-89082-23-5



Primeiramente, o estudante calcula, utilizando uma fórmula conhecida, o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (0, 30) e (30, 36), em que x estaria representando número de dias e y o peso do inseto em g. Obtém-se assim 0,2. Determina o valor de b como 30 e escreve a equação $y = 0{,}2x + 30$.

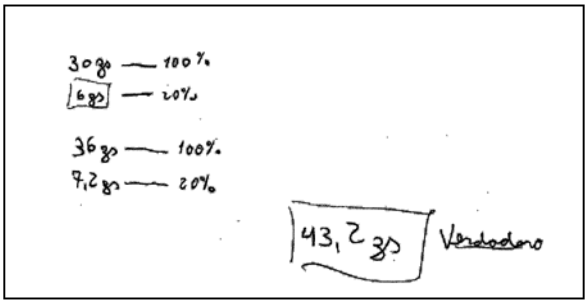
Uma vez obtido este modelo linear, o aluno não conclui nada a respeito da validade da afirmação apresentada no enunciado do problema.

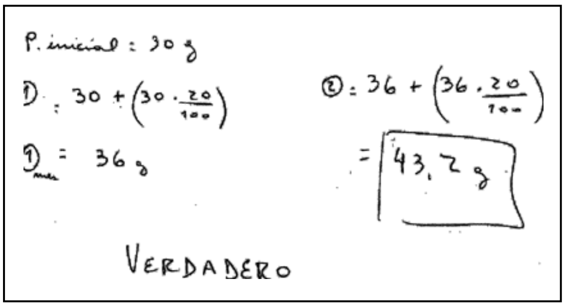
Por outro lado, há alunos que não buscam um modelo geral e trabalham simplesmente com uma regra de três simples, supondo que o aumento do peso é constantemente de 6g. (20% de 30g) em cada mês e, assim, a afirmação do enunciado seria falsa. Apresentamos aqui uma das resoluções encontradas:



O aluno calcula o 20% de 30g e obtém 6g como resposta. Indica que para 2 meses correspondem 12g e conclui que a afirmação é *"falsa, já que nos dois meses apenas aumenta 12 g a mais que peso inicial. (42g)"*

Finalmente, outros estudantes optaram por conciliar duas regras de três ou formular sucessivas proporções, de tal modo que o peso aumentado era recalculado com base no último peso obtido. Mostramos algumas das resoluções encontradas:





Cabe destacar que, embora as duas resoluções permitam chegar a uma única solução, a segunda oferece elementos para chegar, de modo recursivo, ao modelo esperado, no caso em que se solicitara uma generalização.

Notamos que o recurso do esquema da "regra de três simples" é aplicado para resolver tanto problemas de tipo (I) como (II). No grupo chileno, aparece com mais freqüência a formulação de proporções do tipo $\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1}{y_1}$, enquanto que no grupo argentino é muito mais forte a presença do esquema da "regra de três simples", adquirido na escola primária.

Com respeito às produções dos alunos, os resultados que apresentamos não são definitivos e, sim, constituem em conjecturas que requerem estudos mais profundos. Apresentaremos a seguir algumas conclusões preliminares. As produções analisadas são casos de sobregeneralização do modelo linear, mas é necessário notar que existem diferenças na escolha da representação simbólica do modelo, isto é, funcional, de relação de proporcionalidade direta ou o esquema de regra de três. A diferença que se manifesta na notação poderia estar informando a respeito de diferenças conceituais. Aí cabe notar que aqueles estudantes que utilizam o esquema da regra de três simples poderiam não estar conscientes da relação de proporcionalidade direta que está envolvida e, em conseqüência, da função linear subjacente, $y= a.x$. Do mesmo modo, a formulação de proporções não assegura que os estudantes estejam conscientes da existência de uma proporcionalidade direta, nem da função linear, antes mencionada. Em relação a estas questões, faz-se necessário um estudo mais profundo do processo seguido pelos estudantes através de entrevistas pessoais.

Conclusões

Apresentaremos a seguir uma discussão de alguns dos resultados e buscaremos estabelecer conexões e contrates com a literatura estudada, para finalmente deixar formuladas algumas conjecturas que consideramos relevantes serem estudadas. Conjecturas estas que estão relacionadas tanto com o ensino quanto com a aprendizagem.

ISBN 978-85-89082-23-5

Ao analisar o texto de ensino e os ambientes de aprendizagem onde estão imersos os estudantes participantes do nosso estudo, notamos a ausência parcial ou total de certos objetos matemáticos ou o estabelecimento de relações entre alguns conceitos, cuja presença explícita, como objeto de ensino, poderia resultar benéfica para superar a sobregeneralização do uso de modelos lineares.

Primeiramente nos referimos ao emprego de tabelas como meio potencial para a análise de funções. Notamos, ainda, que as tabelas estão presentes como um recurso para ensinar e não como um objeto de ensino em si mesmo, sendo no máximo uma contribuição para a obtenção do gráfico da função que se pretende traçar. Uma vez introduzidas as ferramentas do Cálculo Diferencial, que nos permitem determinar os pontos extremos de uma função, o cálculo de limites ou o estudo de continuidade, não apenas não se volta a elas como também se desvaloriza o seu emprego frente às novas ferramentas, sem discutir as possibilidades que uma tabela oferece enquanto instrumento que contribui para a compreensão dos padrões de comportamento de certas funções. Neste sentido, cabe notar que, por exemplo, os estudos de Confrey (1991a, 1991b) e Confrey e Smith (1995) contêm propostas que apontam para um novo tratamento das funções exponenciais, dando ao emprego das tabelas um *status* diferente.

Um segundo aspecto que consideramos importante é o de fazer, nas aulas teóricas ou práticas, uma discussão a respeito daqueles fenômenos que podem ser mais bem descritos com modelos lineares, e diferenciá-los daqueles que não podem, analisando semelhanças e diferenças, além das evidentes disparidades gráficas ou algébricas entre funções.

Por outro lado, notamos a necessidade de mostrar as relações entre a estrutura da regra de três que os alunos aprenderam na escola primária (e que continuam usando intensivamente) com as expressões algébricas e os gráficos que representam proporcionalidade direta, vistos no curso de Matemática, explorando que alcances e limitações têm esta estrutura.

Por último, cabe destacar a necessidade de controlar cuidadosamente a seleção e o enunciado de problemas e buscar ver esses problemas a partir da perspectiva do estudante que os resolverá, sem pressupor que suas estratégias e abordagens coincidam necessariamente com as do docente que os formula.

Cremos que o presente trabalho contém evidência empírica que marca a presença e persistência do fenômeno de extensões de modelos lineares a contextos não-lineares, ao resolver diversos problemas e em países diferentes, mas com textos de ensino similares. A partir do observado anteriormente com respeito ao ensino, conjecturamos que:

- o emprego de tabelas como instrumento para analisar diversidade de padrões de comportamento,
- refletir sobre a existência de mundos lineares e não-lineares e analisar semelhanças e diferenças,
- estabelecer e analisar relações entre a regra de três aprendida na escola primária e as diversas representações das relações de proporcionalidade direta, seriam ações que contribuiriam para a superação do fenômeno de sobregeneralização de modelos lineares.

Consideramos que estas conjecturas merecem ser estudadas no futuro tanto a partir da perspectiva da aprendizagem como do ensino, devido à escassa produção de investigações relacionadas com este fenômeno de sobregeneralização de modelos lineares no nível universitário. No entanto, desenvolver as ações indicadas acima, dentro de uma estrutura curricular que se enquadra no paradigma do exercício, pode passar a ser de caráter informativo ou anedótico, sem produzir modificações relevantes. As aulas teóricas e práticas, como aquelas das quais participaram os estudantes envolvidos neste estudo geram, como já o indicamos anteriormente, ambientes de aprendizagem compatíveis com o paradigma do exercício, nos quais os estudantes resolvem exercícios ou problemas com referências à Matemática pura ou à semi-realidade. Skovsmose (2000) contrapõe o paradigma de exercício a abordagens investigativas que promovam processos de exploração que este autor associa ao trabalho com projetos. Para promover este tipo de atividade, é necessária a criação de "cenários para investigação", isto é, ambientes que dêem suporte ao trabalho investigativo. Tais cenários se constituem em ambientes de aprendizagem quando convidam os estudantes a formular perguntas e buscar explicações, levando-os a assumir responsabilidades nos processos de exploração e explicação. Consideramos que seria desejável, tal como indica Skovsmose (2000), movermos-nos entre diferentes ambientes de aprendizagem tanto dentro de um contexto de exercícios como de cenários para investigação, transitando no terreno das referências à matemática pura até referências as à realidade. No entanto, a passagem para ambientes de aprendizagem investigativas implica mudanças estruturais no currículo ou na organização, que resultam difíceis na tradição de nossa educação matemática universitária, e onde não parece haver lugar, tempo, nem quantidade suficiente de docentes para o desenvolvimento de atividades investigativas. O que fazer neste contexto? Consideramos que uma possibilidade seria caminhar, ainda que dentro do paradigma de exercício, cuja superação parece difícil no contexto em que trabalhamos, até ambientes de aprendizagem com referências à realidade onde o peso de um inseto não seja absurdo ou o crescimento de uma planta não seja exponencial, onde haja espaço para discutir a pertinência dos modelos formulados, contrastando-os com a realidade que se pretende modelar e onde, como professores, sejamos flexíveis para considerar as perspectivas alternativas dos alunos.

Referências

ALAGIA, H. Mathematicians, Mathematics Teachers and Mathematical Discourse. **The Mathematics Educator**, Athens, v. 9, n. 2, p. 38-41, 1999.

ALAGIA, H. **El proceso de algoritmización en la Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática.** Córdoba: Facultad de Matemática, Astronomía y Física/Universidad Nacional de Córdoba, 1994. 17p. Informe académico de proyecto de investigación CONICOR.

BALACHEFF, N. French research activities in Didactics of Mathematics - some key words and related references. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 5., 1984, Australia. **Actas del Group Theory of Mathematics Educations.** Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld, 1984. p.33-38.

BEHR, M.; HARE, G.; POST, T.; LESH, R. Rational Number, Ratio and Proportion. In: GROUWS, D. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Simon & Schuster Macmillan, 1992. p. 296-333.

CONFREY, J. Learning to listen: a student's understanding of powers of ten. In: VON GLASERSFELD, E. **Radical Constructivism in Mathematics Education**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991a. p.111-138.

CONFREY, J. The Concept of Exponential Functions: a student's perspective. In: STEFFE, L. (Ed.). **Epistemological Foundations of Mathematical Experience**. New York: Springer-Verlag, 1991b. p. 124-159.

CONFREY, J. Voice and perspective: hearing epistemological innovation in students' words. **Revue des sciences de l'education**, Montreal, v. 20, n.1, v. 20, n. 1, p. 115-133, 1994. Special issue.

CONFREY, J.; SMITH, E. Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 26, n. 2-3, p. 31-60, 1994.

CONFREY, J.; SMITH, E. Splitting, covariation, and their role in the development of the exponential functions. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 26, n. 1, p. 66-86, 1995.

DE BOCK, D.; VON DOOREM, W.; VERSCHAFFEL, L.; JANSSENS, D. Secondary school pupils' improper proportional reasoning: an in-deph study of the nature and persistence of pupils'errors. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht. **Proceedings...** Utrecht: Freudenthal Institute, 2001. v. 2, p. 313-320.

DE BOCK, D.; VERSCHAFFEL, L.; JANSSENS, D. The predominance of the linear model in secondary school pupils' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, v. 35, p. 65-83, 1998a.

DE BOCK, D.; VERSCHAFFEL, L.; JANSSENS, D. The influence of metacognitive and visual scaffolds on the predominance of the linear model. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 22., 1998b, Stellenbosch. **Proceedings...** Stellenbosch: University of Stellenbosch, 1998b. v. 2, p. 240 - 247, 1998b.

KARRER, M.; MAGINA, S. Uma seqüência de ensino para a introdução de logaritmo: estudo exploratório usando a calculadora. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, año 13, n. 14, p. 18-31, 2000.

LINCOLN, Y.; GUBA, E. **Naturalistic Inquiry**. Beverly Hills: SAGE Publication, 1985.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, año 13, n. 14, p. 66-91, 2000.