ISBN 978-85-89082-23-5

Matemática e Música: as progressões geométricas e o padrão de intervalos da escala cromática[1]

Mathematics and music: geometric progressions and the pattern of intervals on the chromatic scale

Francisco Nairon Monteiro Junior[2]

Alexandre Medeiros[3]

Cleide Farias de Medeiros[4]

Resumo

Esta pesquisa apresenta uma abordagem das progressões geométricas através da música, mais especificamente, através do entendimento da estrutura das escalas diatônicas e cromáticas. Procuramos mostrar, primeiro, que a música ocidental possui doze tonalidades maiores e doze tonalidades menores, cujos padrões de intervalo derivam todos da escala cromática e, segundo, que o padrão de intervalos de tal escala traz subjacente uma progressão geométrica de razão $\sqrt[12]{2}$. Assim, tal razão é aplicada na construção destas escalas bem como da escala do braço do violão, constituindo-se em exercícios que podem ser utilizados no ensino do conteúdo matemático em questão, em uma forma contextualizada. Desta forma, diante das dificuldades que os alunos comumente sentem em aprender Matemática, buscamos, nesta pesquisa, primeiro, apresentar alguns elementos teóricos que possam subsidiar a construção de abordagens educacionais que contribuam para superar o ensino tradicional, livresco e abstrato, na exploração das progressões geométricas e, em segundo, apresentamos um exemplo prático de estratégia de ensino das Progressões Geométricas, a partir da Música e através da construção de um conjunto de tubos sonoros.

Abstract

This study examines the theme of Geometric Progression through music; more specifically, through the understanding of the structure of diatonic and chromatic scales. We sought to demonstrate, firstly, that Western music has 12 higher tonalities and 12 lower tonalities whose interval patterns originate from the chromatic scale, and secondly, that the pattern of intervals of the scale has an underlying geometric progression with a ratio equal to . This ratio is then applied to the construction of these scales as well as to the scale as played on the guitar, resulting in exercises which can be used to teach this mathematical topic in a real life context. In this way, bearing in mind the difficulties commonly faced by students when learning mathematics, we sought, first, to show some theoretical elements that can inform the development of educational approaches which may overcome the traditional, book-oriented, abstract teaching when exploring Geometrical Progression; and, secondly, present an alternative strategy to teaching this topic by using music, including the construction of a set of sound pipes.

---

[1] Digitalizado por Lessandra Marcelly Sousa da Silva e Luana Oliveira Sampaio.

[2] Mestre em Educação nas Ciências (Universidade Federal Rural de Pernambuco). Professor do Departamento de Física e Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco. nironjunior@hotmail.com

[3] Doutor (Centre for Studies in Science and Mathematics Education, University of Leeds, Inglaterra). Professor do Departamento de Física e Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

[4] Doutor (Centre for Studies in Science and Mathematics Education, University of Leeds, Inglaterra). Professora do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco. cfmed@hotlink.com.br

Introdução

A Matemática e a Música sempre tiveram uma estreita relação, como pode ser verificado nos diversos compêndios sobre o tema (ABDOUNUR, 1999; ROTHSTEIN, 1996). A própria história da Música e, mais especificamente, do desenvolvimento da teoria musical e da Acústica, mostra a importância da Matemática no entendimento dos princípios musicais, tanto com respeito à teoria musical em relação aos princípios de funcionamento de diversos instrumentos musicais. Desde a Grécia antiga, já se procurava entender a relação existente entre dois sons produzidos por uma corda vibrante. O primeiro registro de um tal estudo acerca das relações entre os sons produzidos por uma corda vibrante aparece nos estudos pitagóricos. Tal problema, que nasce na observação dos sons produzidos por uma corda homogênea, tensionada e posta a vibrar livremente através de um toque suave, teve uma historia de disputas acerca da sua explicação matemática, que levou ao desenvolvimento de importantes teorias matemáticas, tais como das equações diferenciais e das series de Fourier (KLEINER, 1993; LINDSAY, 1966; MONTEIRO JR., 1999; WHEELER; CRUMMETT, 1987),

Uma outra ligação entre Matemática e Música pode ainda ser vista no entendimento dos princípios físico-matemáticos subjacentes à construção e funcionamento dos diversos instrumentos musicais (BENADE, 1990; JOHNSTON, 1989; LEVARIE; LEVY, 1980; MACONTE, 1997; PIERCE, 1996). A construção da escala de um violão, por exemplo, passa necessariamente por um cálculo da progressão das distâncias entre os diversos *trastes* que a compõem (MONTEIRO JUNIOR, 1999). Para que a corda possa vibrar em partes do seu comprimento útil total, reproduzindo todas as frequências das notas das escalas musicais de que fazemos uso na Música, ela tem que ser dividida em partes que obedeçam a uma razão bem definida. Os trastes são responsáveis pela diminuição do comprimento efetivo da corda (fração da corda que realmente vibra) e, consequentemente, fazem a corda vibrar nas diversas notas da escala cromática. Desta forma, a combinação de sons de modo agradável aos nossos ouvidos não e nada aleatória. A música possui uma *métrica* bem definida e, de certa maneira, o grau de consonância entre dois sons, ou seja, o grau em que dois tons que soam ao mesmo tempo agradam, mais ou menos, aos nossos ouvidos pode ser entendido através das relações numéricas entre as frequências desses sons.

Uma outra ligação entre Matemática e Música esta contida na construção das curvas representativas da forma como o ouvido percebe as mudanças em frequência e intensidade de um som (ROEDERER, 1998; ROSSING, 1990). O entendimento da relação matemática entre frequência e altura e fundamental na compreensão dos padrões de intervalos das diversas escalas em Música como também no entendimento da teoria da consonância.

Toda esta historicidade, contudo, da ligação entre Matemática e Música, bem como toda a fenomenologia subjacente ao entendimento da construção e funcionamento dos instrumentos musicais e da Matemática, contida nestas atividades, não são comumente observadas como ponto de partida para um ensino mais contextualizado desta disciplina. Ao invés disso, a grande maioria dos conteúdos matemáticos é apresentada por livros didáticos e professores de uma forma fortemente abstrata. Isso, possivelmente, tem contribuído para que a Matemática seja vista com desinteresse pelos alunos e a destituída de emoção. O problema da corda vibrante foi coadjuvante no desenvolvimento da teoria das equações diferenciais e também levou ao desenvolvimento das séries de Fourier e, assim, fornece-nos um bom exemplo de que a Matemática, ou pelo menos parte dela, teve seu desenvolvimento impulsionado por problemas do cotidiano vivido pela humanidade. Contudo, tais problemas não são, no ensino em nossas escolas, comumente resgatados dos conteúdos dos quais se originaram.

Pesquisas, entretanto, sobre as relações entre a Música e a Matemática já tem uma longa história, e abordagens focalizando a Música, o ensino e a aprendizagem da Matemática tem sido desenvolvidas, recentemente, com um certo vigor.

Há geralmente uma grande distância entre as produções na esfera da pesquisa e a sua aplicabilidade nas atividades de ensino, pois, na verdade, como Nisbet (1991) aponta, o caso do relacionamento entre a Matemática e a Música tem sido estudado por milhares de anos. Ele apresenta, em seu estudo, as características matemáticas da Música através de uma abordagem da melodia, da harmonia e do ritmo assim como de certas semelhanças entre esses dois campos do conhecimento, presentes nos estudos dos padrões e das razões. Já em 1972, Malcolm destacava a Matemática contida nas escalas musicais. Neste mesmo sentido, e vinculando tais escalas a suas origens históricas, contidas nos ensinamentos pitagóricos, Arnauld (1991) assinalava o conceito de média harmônica como elemento principal de ligação entre a Matemática e a Música. Para ele, Matemática e Música são formas distintas de buscas de harmonia.

Com uma visão semelhante em mente, Bahna-James (1991) ao observar que estudantes investigados viam a Matemática como uma disciplina desprovida de criatividade e emoção, sugeriu o uso da relação entre a Matemática e a Música como uma forma de resgatar este tom humanístico por eles não vislumbrado. Outros pesquisadores têm ido alem da identificação das ligações entre a Matemática e a Música, chegando a propor algumas atividades que colocam em destaque a integração desses dois campos da expressão humana (DIENES, 1987;PARKS, 1995;KITTS, 1996; FERNANDEZ, 1999). Atividades com este mesmo fim têm sido relacionadas a aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos: conceitos numéricos e frações (BLACKBURN; WHITE, 1985), razões e logaritmos (HAAK, 1982), trigonometria (BOTTS, 1974). Alguns pesquisadores têm assinalado que o estudo da Música parece favorecer a aprendizagem de certos conteúdos matemáticos lecionados na pré-escola (GOEGHEGAN; MITCHELMORE, 1996). Outros têm apontado, segundo suas observações, uma tal influência na aprendizagem de conteúdos matemáticos lecionados mesmo ao final da escolaridade básica (CHEEK; SMITH, 1999).

Alguns conteúdos específicos, como as progressões geométricas, têm recebido de vários pesquisadores uma atenção no sentido de vincular o seu ensino com o de outros conteúdos diversos. Alguns desses vínculos têm estado restritos ao arcabouço interno da Matemática: números decimais (FLETCHER, 1979); potências (AST1N, 1984); números negativos (THOMAIDIS, 1993) e logaritmos (TOUMAISIS, 1993). Outros pesquisadores têm feito a conexão entre o ensino das progressões geométricas e o uso de materiais concretos manipulativos como a Torre de Hanoi (SH WARGER, 1977). Ligações das progressões geométricas com a realidade social mais ampla têm também sido exploradas, tais como as conexões com problemas de financiamentos bancários (HOLLEY, 1978; GAMBLE JR., 1991). Alguns têm mesmo ido além das ligações com problemas bancários, estabelecendo ainda conexões das progressões geométricas com problemas da Medicina (SPENCE, 1990).

Das pesquisas acima relacionadas, depreende-se a possibilidade de pensarmos em construir um ensino das progressões geométricas que esteja ligado não apenas a questões práticas em geral, mas que possa ser relacionado, também, a questões musicais. Entretanto, para que tais abordagens possam vir a ser tentadas, faz-se necessário um conhecimento prévio de como as progressões geométricas podem ser identificadas na Música. O presente trabalho busca oferecer um subsidio teórico para explicitar uma tal ligação. Desta forma, neste presente estudo, partindo de uma visão da necessidade de busca de estratégias alternativas de ensino da Matemática, procuramos apresentar elementos teóricos para subsidiar possíveis abordagens para o ensino das progressões

ISBN 978-85-89082-23-5

geométricas associadas a Música. Tais elementos teóricos incorporam o entendimento do padrão de intervalos da *escala cromática* musical ocidental moderna. Tal conhecimento e, então, aplicado ao cálculo matemático da construção da escala de trastes de um violão.

A escala cromática da música ocidental e as progressões geométricas

Todos os estudantes que já tiveram aulas de Geometria já ouviram falar de Pitágoras e de seu famoso teorema, o qual diz que a soma dos quadrados dos catetos de um triângulo retângulo e igual ao quadrado da hipotenusa. Contudo, uma grande parte dessas pessoas associam Pitágoras, comumente, a apenas este teorema. Mas os trabalhos de Pitágoras na Matemática vão muito além deste importante teorema. Dentre outras contribuições de Pitágoras, esta a tentativa de matematizar a Música. Na verdade, e de Pitágoras o primeiro trabalho relacionando as notas musicais produzidas numa corda esticada com razões de números inteiros, tal como acontece em uma lira ou em um monocórdio. O que nos interessa aqui e que Pitágoras já havia definido as razões matemáticas para os intervalos mais consonantes da música, tais como os intervalos de oitava mais alta, soando a corda na metade de seu comprimento, isto é, na razão 2/1, e o intervalo de quinta, vibrando a corda em local correspondente a 2/3 de seu comprimento e, assim por diante. Assim, Pitágoras esboçou a primeira relação entre Matemática e Música, relação esta que veio a se desenvolver intensamente nos séculos XVIII e XIX, culminando com o aparecimento das series de Fourier.

As escalas musicais têm sua origem na Música grega antiga. O seu desenvolvimento alcançou grande avanço no século XVII, quando os problemas de harmonia, transposição e modulação das escalas justas, derivadas das consonâncias perfeitas determinadas por Pitágoras, levaram ao desenvolvimento de uma escala musical cujos intervalos eram igualmente espaçados, chamada *escala temperada* (ROEDERER, 1998, cap. 5). Tal desenvolvimento deu origem a um novo padrão de intervalos na música, patrocinado, dentre outros, pelo eminente músico clássico alemão Johann Sebastian Bach (1685-1750) (CARPEAUX, 1999, p. 86-104). Bach escreveu diversas obras (prelúdios e fugas) aproveitando as novas possibilidades oferecidas pelo temperamento, tais como, por exemplo, as ilimitadas possibilidades de modulação tonal

Mas o que tem a ver Bach e a escala temperada com a Matemática? A relação e que o temperamento da escala se resume a sequenciar as doze notas musicais, produzindo intervalos igualmente espaçados entre elas, ate alcançar a oitava. Assim, construiu-se uma progressão geométrica de doze intervalos, constituindo-se na base da Música ocidental moderna, da qual derivam-se todas as escalas musicais comumente usadas. Mas, como se da na sua essência, a construção de uma tal escala, e o que tem a ver com as cordas vibrantes e a escala de trastes de um violão? Antes de entrarmos no estudo dos modos vibracionais das cordas, devemos entender, ao menos de uma forma básica, a estrutura melódica da Música moderna. Para tanto, passemos a fazer uma pequena introdução ao estudo das notas musicais e suas relações com o conceito de frequência.

Sabemos que a distinção entre sons, percebida pelo ouvido, ocorre pelo fato de que notas diferentes possuem alturas (frequências) diferentes. Assim sendo, o que caracteriza a qualidade de uma nota pura[5] ser "mais alta" ou "mais baixa" é o fato de ela ter maior ou menor frequência de vibração[6]. Desta forma, quanto mais aguda uma nota, maior sua frequência e quanto mais grave uma nota, menor sua frequência, Podemos, então, definir o intervalo entre duas notas quaisquer como sendo a razão entre suas frequências. Assim, temos $I = \frac{f_2}{f_1}$. Por exemplo, o intervalo de quinta justa ocorre quando $I = \frac{3}{2}$, o de quarta quando $I = \frac{4}{3}$ e o de oitava quando $I = 2$. Em Música, diz-se que quando duas notas estão separadas por um intervalo de oitava, elas são iguais, e toda escala musical começa e termina na mesma nota musical, separada por um intervalo de oitava, ou seja, começa com uma nota de freqüência " f " e termina com a mesma nota, agora com frequência " 2f ". Podemos, então, dizer que a estrutura harmônica moderna e baseada neste padrão de intervalos, conhecido como escala temperada, ou escala cromática. A oitava e o intervalo de altura entre duas notas em que uma delas possui o dobro da frequência da outra. Assim, para construirmos a escala cromática, dividimos o intervalo de oitava em 12 partes, criando-se, então, doze intervalos iguais, chamados de semitons. Assim, a frequência de cada nota da escala cromática será $\sqrt[12]{2}$ vezes maior que a sua anterior, definindo, como dissemos acima, uma progressão de razão igual a $\sqrt[12]{2}$. Por exemplo, se quisermos montar a escala cromática do Lá central do teclado do piano (f=220Hz), teremos:

---

[5] O texto refere-se a "nota pura" como sendo um som que possui frequência única, ou seja, uma única nota. O diapasão devidamente percutido, produz um tom puro devido a estrutura e a disposição de suas hastes.

[6] Não devemos confundir os conceitos de altura e intensidade, comumente usados de uma forma distorcida. A altura de um som esta relacionada a sua frequência enquanto que a intensidade esta relacionada, por sua vez, a energia que a onda transporta, Assim sendo, quando aumentamos o volume de um rádio, por exemplo, estamos aumentando a intensidade e, neste caso, o som está ficando mais forte e não mais alto.

NOTA	SIMBOLO[7]	TERMOS DA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA $a_n = 220(\sqrt[12]{2})^{(n-1)}$	FREQUÊNCIA[8] (Hz)
La	A	$a_1 = 220$	220
La#/Sib	A#/Bb	$a_2 = 220(\sqrt[12]{2}) = 233{,}081880$	233
Si	B	$a_3 = 220(\sqrt[12]{2})^2 = 246{,}941650...$	247
Dó	C	$a_4 = 220(\sqrt[12]{2})^3 = 261{,}625565...$	261
Dó #/Reb	*C#/Db*	$a_5 = 220(\sqrt[12]{2})^4 = 277{,}182630...$	277
Re	D	$a_6 = 220(\sqrt[12]{2})^5 = 293{,}664767...$	293
Re#/Mib	D#/Eb	$a_7 = 220(\sqrt[12]{2})^6 =$ 3]l,126983...	311
Mi	E	$a_8 = 220(\sqrt[12]{2})^7 = 329{,}627556...$	330
Fá	F	$a_9 = 220(\sqrt[12]{2})^8 = 349{,}228231...$	349
Fá#/Solb	F#/Gb	$a_{10} = 220(\sqrt[12]{2})^9 = 369{,}994422...$	370
Sol	G	$a_{11} = 220(\sqrt[12]{2})^{10} = 391{,}995435...$	392
Sol#/Láb	G#/Ab	$a_{12} = 220(\sqrt[12]{2})^{11} =$ 4l5,304697...	415
Lá	A	$a_{13} = 220(\sqrt[12]{2})^{12} = = 440$	440

Sendo a frequência da tônica igual a 220 Hz e da oitava, 440 Hz, a relação entre estas duas frequências é exatamente 2. Sendo assim, o A_2 terá frequência 880 Hz, o A_3 terá frequência 1760 Hz, e assim por diante, ate o limite da audição humana.

O quadro a seguir apresenta a escala cromática de Dó bem como as escalas diatônicas maior e menor, as quais são derivadas desta escala cromática. Através deste quadro, podemos observar que a montagem da escala maior baseia-se no padrão de intervalos [9]: tom - tom - semitom - tom- tom - tom - semitom, que apresenta a mesma sonoridade para qualquer tonalidade. Já a escala menor natural baseia-se no padrão de intervalos to tom

- semitom - tom - tom - semitom - tom - tom, criando também uma sonoridade igual para todas as tonalidades.

ESCALA CROMÁTICA, ESCALA MAIOR E ESCALA MF.NORNA TONALIDADE IMIDO						
Escala Cromática	Escala Maior	Escala Menor	Intervalo em Relação a Tônica	Distância	Característica Sonora	Relação Entre as Frequências
C	C	C	Uníssomo	0	consonância pura	1:1
C#/Db			Segunda menor	!	dissonância forte	25:24

[7] As notas musicais são representadas a partir do "La' pelas letras A. B, C, D, E, F e G. Os Símbolos "#" e " b" significam sustenido e bemol, respectivamente.
[8] As notas possuem suas frequências baseadas no Lá central do piano, que possui frequência padrão de 440Hz.
[9] O intervalo entre duas notas consecutivas da escala cromática e chamado de semitom enquanto 0 intervalo entre duas notas, separadas por uma terceira, é chamado de tom. Logo, 1 torn possui 2 semitons.

D	D	D	Segunda maior	2	dissonância branda	9:8
		D#/Eb	Terça menor	3	consonância relativa	6:5
E	E		Terça maior	4	consonancia relativa	5:4
F	F	F	Quarta justa	5	consonância ou dissonância	4:3
F#/Gb			Quarta aumentada/ Quinta diminuta	6	neutro ou instável	7:5
G	G	G	Quinta justa	7	consonância pura	3:2
G#/Ab		G#/Ab	Quinta aumentada/ Sexta menor	8	consonância relativa	8:5
A	A		Sexta maior/ Sétima diminuta	9	consonancia relativa	5:3
A#/Db		A#/Bb	Sétima menor	10	dissonancia branda	9:5
B	B		Sétima maior	11	dissonancia forte	15:8
C	C	C	Oitava	12	consonancia pura	2:1

Podemos ver também, neste quadro, a característica sonora de cada intervalo em relação a tônica e constatar que só ha consonância[10] pura nos intervalos de uníssono, quinta e oitava.

Um dos fatores que influenciaram a evolução das escalas em direção a escala temperada e que, nas escalas antigas, o padrão de intervalos diferia de uma tonalidade para outra, o que gerava impossibilidade de modulação, ou seja, da transposição de uma composição de uma tonalidade para outra.

Entendendo a construção da escala do braço do violão – uma experiência a prática

Uma vez analisada a construção da escala cromática de 12 semitons, podemos aplicar os mesmos argumentos matemáticos para entender como é construída a escala de um violão. Porém, antes disto, analisaremos o comportamento dinâmico de uma corda sonora, ou seja, discutiremos o modelo matemático representativo dos sons gerados por uma corda homogênea e esticada. Sabemos que a lei das cordas vibrantes prevê que as frequências dos modos vibracionais de uma corda são dadas pela relação matemática abaixo, guardando-se os pressupostos de que a corda e inextensível e possui densidade linear constante.

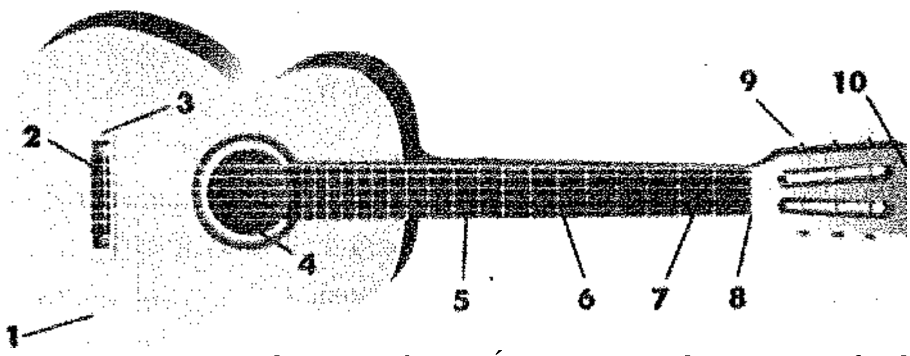
$$\mathrm{fn} = (\mathrm{N}/2\mathrm{Lr}).(\mathrm{F}/\mu\pi)^{\frac{1}{2}}, \text{onde}$$

[10] Diz-se que um intervalo musical é consonante quando estas duas notas, ao serem tocadas juntas, soam de forma agradável.

ISBN 978-85-89082-23-5

L - comprimento da corda
r - raio da corda
F-força tensora
μ - massa especifica
N - N° de ordem do harmônico

Podemos perceber, nesta relação matemática, que a frequência da nota fundamental produzida por uma corda homogênea e esticada depende de seu comprimento, de seu raio, da sua massa especifica e da força tensora. Contudo, a nossa atenção está dirigida apenas para a relação entre a frequência que a corda emite em função do seu comprimento útil. Assim sendo, podemos observar nesta relação matemática que a frequência de oscilação da corda e inversamente proporcional ao seu comprimento. Desta forma, quando diminuímos o comprimento útil da corda, ou seja, quando reduzimos a parte que efetivamente vibra, a frequência de oscilação da corda aumenta. Por outro lado, quando aumentamos o comprimento útil da corda, a frequência de oscilação diminui. Analisando musicalmente, podemos dizer que, quanto menor o comprimento útil de uma corda, permanecendo constantes as outras variáveis, o som por ela emitido e mais agudo. Mas, no violão, como se consegue diminuir o comprimento útil da corda nos tamanhos apropriados para se produzir todas as notas musicais? Isso se consegue através dos trastes, os quais compõem a escala do violão que se situa, por sua vez, no braço deste instrumento. Antes de entrarmos na análise dos elementos matemáticos subjacentes a construção da escala do violão, faremos, a seguir, uma breve apresentação das principais partes deste instrumento, conforme enumeradas na figura abaixo.



1. Caixa de Ressonância: É composta pelo tampo, o fundo e as faixas. O tampo e a parte superior do caixa do violão. Este e o principal responsável pela amplificação do som produzido pelas cordas, o qual e transmitido para a caixa através do cavalete que, por sua vez, esta fixado no tampo. As faixas são as peças de madeira que formam a parte lateral da caixa de ressonância. Tanto o fundo (parte inferior da caixa) quanto as faixas são feitos da mesma

ISBN 978-85-89082-23-5

madeira, enquanto que o tampo e produzido a partir de uma madeira que lhe confere qualidade especial para que vibre uniformemente.

2. Rastilho: É uma haste de marfim ou acrílico, a partir da qual começa a parte útil da corda.
3. Cavalete: Peça de madeira onde as cordas e o rastilho são presos.
4. Boca: Abertura na caixa de ressonância que serve para a saída do som.
5. Cordas: Fontes sonoras do instrumento. O violão mais comum possui 6 cordas que se distendem desde o cavalete ate as tarrachas. Seu comprimento efetivo, quando tocadas soltas, vai desde o rastilho ate a pestana, as quais são duas chapas finas de acrílico (marfim nos violões mais sofisticados) que estão fixadas, respectivamente, no cavalete e no início do braço do instrumento.
6. Braço e Trastes: O braço é a peça de madeira na qual são presos os trastes. Os trastes são hastes finas de metal, fixadas transversalmente ao seu comprimento. Os trastes são responsáveis pela diminuição do comprimento efetivo da corda (fração da corda que realmente vibra) e, consequentemente, fazem a corda vibrar nas diversas notas da escala cromática.
7. Casas: Espaços entre os trastes.
8. Pestana: Serve de apoio para as cordas, direcionando-as para as tarrachas. É na pestana que termina a parte útil da corda.
9. Tarrachas: Mecanismos de metal que servem para esticar ou distender as cordas quando da afirmação do instrumento.
10. Cabeça: Peça de madeira, solidária ao braço, que serve para fixar as tarrachas.

Assim, podemos ver que os trastes são um conjunto de hastes de metal fixadas transversalmente ao comprimento do braço. Quando apertamos uma corda contra algum traste, esta passa a vibrar, quando tocada, limitada entre este traste e o rastilho, produzindo uma nota de frequência mais alta do que a nota produzida quando tocamos esta corda solta. Sendo assim, podemos notar que a função dos trastes e produzir as notas numa corda, através da diminuição do seu comprimento util. A escala nada mais e do que os espaços entre os trastes, chamados de casas. Cada casa compreende um intervalo de $^{1}/_{2}$ tom. Quando pressionamos qualquer uma das seis cordas na primeira casa, seu comprimento útil passa a ser delimitado pelo primeiro traste e o rastilho produz um som

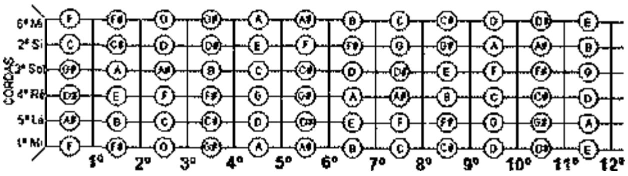
ISBN 978-85-89082-23-5

mais agudo, equivalente a uma nota de frequência $\sqrt[12]{2}$ vezes maior do que a frequência da corda solta. Isso se dá porque o comprimento útil da corda limita-se entre a pestana e o rastilho, que são duas peças feitas geralmente de osso. Essas duas peças são colocadas no inicio do braço e no cavalete, respectivamente, e os trastes são colocados de tal forma que o 12° traste fica situado exatamente no ponto médio entre a pestana e o rastilho, marcando, assim, o ponto médio da corda.

Os primeiros doze trastes, juntamente com o rastilho, reproduzem o padrão de intervalos da escala cromática de 12 semitons, uma vez que, quando apertamos uma corda em cada um dos trastes e tocamos esta corda, reproduzimos as notas dessa escala. Assim, cada corda pode produzir sua nota mais grave, quando é tocada solta, e mais doze notas, uma em cada traste, completando-se, assim, a escala cromática. Assim sendo, a nota produzida no 12° traste possui o dobro da frequência da nota mais grave da corda, uma vez que, quando a corda é pressionada no 12° traste, vibra com a metade do seu comprimento. A partir do 13° traste, começam a repetir-se as mesmas notas, sendo que num intervalo de oitava mais agudo. Mas por que os trastes reproduzem o padrão de intervalos da escala cromática? Por que quando pressionamos uma mesma corda sucessivamente nas doze primeiras casas, reproduzimos todas as notas da escala cromática? Na verdade, isso tem a ver com as distâncias sucessivas entre os trastes da escala do violão. Se observarmos o comprimento dos intervalos entre os trastes num violão real, poderemos notar que este espaçamento vai diminuindo. Isso ocorre porque, sendo as frequências das notas da escala cromática uma progressão geométrica de razão $2^{\frac{1}{12}}$, para produzir esta sucessão, a corda terá que ser diminuída desde o seu comprimento inicial (corda solta) em uma progressão inversa ao aumento da frequência. Assim sendo, a distância entre os trastes vai diminuindo desde o primeiro até o último, na razão $2^{\frac{1}{12}}$. Assim, quando pressionamos a l[a] corda (Mi) na terceira casa, produzimos a nota Sol. Quando pressionamos a quarta corda (D) na segunda casa, produzimos a nota Mi. Por outro lado, quando pressionamos a terceira corda (Sol) na *7ª* casa, produzimos a nota Ré. Enfim, cada corda do violão cobre uma extensão de uma oitava ate o 12° traste, tendo inclusive notas repetidas que podem ser extraídas em mais de uma corda. A figura abaixo mostra o esquema do braço de um violão de 6 cordas, no qual as cordas são numeradas da mais aguda (1) ate a mais grave (6). As notas correspondentes a cada uma destas cordas, quando tocadas soltas, são as seguintes:

ISBN 978-85-89082-23-5

I "Corda	2ª Corda	3ª Corda	A' Corda	5" Corda	6'Corda
Mi (E)	Si (B)	Sol (O)	Re (D)	La (A)	Mi (E)



TRASTES

Nesta figura, podemos visualizar todas as notas que podem ser tocadas em cada uma dessas seis cordas bem como as notas enarmônicas (iguais), tocadas em mais de uma corda.

Um exemplo prático do ensino das progressões geométricas a partir da música: construindo um conjunto de tubos sonoros

Como vimos acima, a estrutura harmônica da música ocidental tem sua origem na escala cromática. O padrão de intervalos de tal escala constitui-se numa progressão geométrica cuja razão é $\sqrt[12]{2}$. Tal conhecimento pode ser de grande relevância se desejarmos, enquanto educadores, ensinar Matemática numa postura crítica e ligada às realidades que nos cercam.

O desenvolvimento de estratégias de ensino da Matemática a partir da Música tem origem na busca das pontes que liguem estes dois campos do conhecimento humano, valorizando, portanto, a busca interdisciplinar. De modo geral, tal ligação tem um longo percurso histórico e atualmente desdobra-se em várias possibilidades bem como torna-se útil por possibilitar a realização de um ensino da Matemática, mais próximo das experiências das pessoas, e este e um tipo de ensino ainda bastante aberto a investigação. A busca da problematização dos significados e relações dos conceitos da Matemática constitui, então, o motor que nos levou ao desenvolvimento de estratégias de ensino como esta que exemplificaremos a seguir. Certamente, tal estratégia aqui colocada como uma sugestão para o ensino de Matemática, no tópico específico aqui abordado, poderá vir a servir simplesmente como uma inspiração para os professores, os quais poderão atuar de acordo com a sua criatividade.

A busca incessante de estratégias para a abordagem dos diversos conteúdos no ensino tanto da Matemática como da Física, através de ligações entre estas ciências e a Música, dentre outras ligações interdisciplinares, tem tornado mais interessante e palpável o ensino destas disciplinas, conduzindo os educadores a uma postura mais democrática e critica com relação ao ensino tradicional e livresco no qual, frequentemente, as diferentes interpretações dos estudantes têm sido ignoradas. Em busca de uma estratégia de ensino que procure ir além da simples verbalização acerca dos conteúdos matemáticos pelo professor, passaremos, a seguir, a descrever e comentar acerca da construção de um aparato o conjunto de tubos sonoros que pode ser utilizado numa abordagem de ensino interdisciplinar envolvendo a Matemática e a Música.

Em termos práticos, e baseando-nos na teoria descrita acima, podemos construir um conjunto de 13 tubos de PVC que reproduza o padrão de intervalos da escala cromática e, consequentemente, os padrões das escalas maior e menor. Partindo do tubo de menor comprimento, o qual reproduz a nota mais aguda da escala, podemos calcular o comprimento dos 12 tubos subsequentes, numa progressão geométrica de razão $\sqrt[12]{2}$.

Podemos escolher um comprimento do tubo menor para que seja reproduzido o *dó* de 512 Hz. Neste caso, sendo a velocidade de propagação do som no ar igual a 344 m/s, a uma pressão de 1 atmosfera e a uma temperatura de 20°C, temos que:

$\boldsymbol{V = \lambda . f}$, onde $\boldsymbol{\lambda}$ é o comprimento de onda e $\boldsymbol{f}$ a frequência.

$$\mathbf{344 \;=\; 512\,\boldsymbol{\lambda} \;\;\Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \frac{344}{512} \;\;\Rightarrow \boldsymbol{\lambda} \;=\; 0{,}671875}\, \boldsymbol{metros}$$

Para um tubo aberto de comprimento L, temos que $\boldsymbol{\lambda} = 2.L$. Desta forma, o comprimento do tubo será,

$$\boldsymbol{\lambda = 2.L \Rightarrow L = \frac{0{,}671875}{2} \Rightarrow L = 0{,}3359\, metros}$$

A tabela a seguir mostra o dimensionamento dos 13 tubos do conjunto, considerando a progressão geométrica de razão $\sqrt[12]{2} = 1{,}05946$.

NOTA MUSICAL[11]	TERMO DA PROGRESSÃO	Comprimento do tubo (m)	ESCALA MAIOR	ESCALA MENOR

[11] Os comprimentos calculados só reproduzirão estas notas musicais se as condições do ar forem as descritas, ou seja, estiverem a uma temperatura dc 20°C e a uma pressão de 1 atmosfera.

ISBN 978-85-89082-23-5

C	a_1	0,3359	0,3359	0,3359
C#/Db	$a_2 = a_{1.}r^1 = 0{,}3359.\left(\sqrt[12]{2}\right)^1 =$	0,3559		
D	$a_3 = a_{1.}r^2 = 0{,}3359.\left(\sqrt[12]{2}\right)^2 =$	0,3770	0,3770	0,3770
D# / Eb	$a_4 = a_{1.}r^3 = 0{,}3359.\left(\sqrt[12]{2}\right)^3 =$	0,3995		0,3995
E	$a_5 = a_{1.}r^4 = 0{,}3359.\left(\sqrt[12]{2}\right)^4 =$	0,4232	0,4232	
F	$a_6 = a_{1.}r^5 = 0{,}3359.\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 =$	0,4484	0,4484	0,4484
F3 / Gb	$a_7 = a_{1.}r^6 = 0{,}3359.\left(\sqrt[12]{2}\right)^6 =$	0,4750		
G	$a_8 = a_{1.}r^7 = 0{,}3359.\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 =$	0,5033	0,5033	0,5033
G#/Ab	$a_9 = a_{1.}r^8 = 0{,}3359.\left(\sqrt[12]{2}\right)^8 =$	0,5332	∧	0,5332
A	$a_{10} = a_{1.}r^9 = 0{,}3359.\left(\sqrt[12]{2}\right)^9 =$	0,5649	0,5649	
A#/Bb	$a_{11} = a_{1.}r^{10} = 0{,}3359.\left(\sqrt[12]{2}\right)^{10} =$	0,5985		0,5985
B	$a_{12} = a_{1.}r^{11} = 0{,}3359.\left(\sqrt[12]{2}\right)^{11} =$		0,6341	
C	$a_{13} = a_{1.}r^{12} = 0{,}3359.\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12} = 0{,}3359 \times 2$	0,6718	0,6718	0,6718

Podemos observar na tabela acima que o oitavo tubo, o qual corresponde à mesma nota do primeiro tubo, possui exatamente o dobro do comprimento do primeiro tubo.

A fotografia mostra dois conjuntos de oito tubos, estando ambos no padrão de intervalos da escala maior. Com um aparato deste tipo, podemos mostrar que, enquanto a **altura** cresce linearmente, a frequência cresce numa progressão geométrica de razão $\sqrt[12]{2}$. Como vimos acima, a razão entre as frequências de duas notas consecutivas na escala cromática $\sqrt[12]{2}$ e , e a razão entre asfrequências de uma nota qualquer e a sua oitava inferior é 2.

Se tocarmos, por exemplo, três notas *dó* consecutivas no teclado do piano, poderemos identificar que a diferença de altura do primeiro para o segundo dó é a mesma do segundo para o terceiro. O ouvido identifica tal diferença como intervalos iguais de altura. Porém, sabemos que o segundo do possui o dobro da frequência do primeiro, e o terceiro dó possui quatro vezes a frequência do primeiro. Daí, poderemos ver que a frequência cresce em progressão geométrica enquanto que a altura, que e relativa à percepção fisiológica, cresce linearmente. Em síntese, podemos dizer que a altura de um som esta relacionada com a frequência, embora não se comportem matematicamente da mesma forma. Esta diferença sutil entre altura, que esta ligada à percepção humana, e frequência, que é uma grandeza física, e fundamental para entendermos por que os furos no corpo da flauta, por exemplo, não são eqüidistantes, e, sim, feitos na mesma escala do padrão de comprimentos dos tubos. Na verdade, os orifícios são feitos para aumentar ou diminuir o comprimento útil do tubo, produzindo, assim, todas as notas num único tubo. Certamente, o sucesso do uso de qualquer aparato científico em sala de aula depende da forma de utilização do mesmo pelo professor. Em si, o instrumento concreto já é útil pelo fato dele poder contribuir para diminuir a dificuldade inerente a prática da abstração tão profunda e tão comum no ensino e que dificulta o aprendizado da Matemática. Por sua vez, o professor pode utilizar um aparato, como o descrito acima, de formas variadas. Ele pode fazê-lo, por exemplo, de uma maneira meramente demonstrativa, isto é, exibindo verbalmente para os estudantes as possíveis relações matemáticas ali existentes. Uma outra forma, possivelmente mais trabalhosa, porém mais libertadora e profícua, seria a de buscarmos praticar a problematização das interpretações dos estudantes acerca dos conteúdos ali codificados e a serem por eles decodificados. Certamente, a busca da intersubjetividade, por professores e estudantes, constitui o cerne do verdadeiro ato educativo (BICUDO, 1979; MEDEIROS, 1987) e, apesar de ser algo trabalhoso, que se encontra ainda aberto a investigação em projetos de pesquisa-ação, a mediação dialógica do professor na produção do conhecimento e algo que nos parece claro, necessário e inevitável numa educação que vise a uma verdadeira comunicação entre professor e estudantes. Entretanto, as formas deles agirem intersubjetivamente em conteúdos específicos em sala de aula ainda estão pouco claras e abertas a investigação.

Conclusão

Como vimos, a análise da gênese das ideias matemáticas, que deram origem a teoria da corda vibrante, ou seja, a análise do desenvolvimento do arcabouço matemático concernente ao entendimento das relações numéricas estabelecidas entre os modos normais de vibração da corda sonora torna possível estabelecer conexões úteis no ensino da Matemática, em todos os níveis que se deseje, embora tenhamos abordado apenas a teoria das Progressões Geométricas, aplicada na construção das escalas musicais. Desta forma, o conhecimento da história da Matemática pode revelar-se como uma rica ferramenta no ensino. Especificamente com respeito as ligações que podem ser apontadas entre a Matemática e a Música, podemos, através de uma visão histórica, entender as diversas interseções que ocorreram nos variados contextos do desenvolvimento da Matemática e os problemas da Música que foram atacados com o seu uso. Por outro lado, o apelo às mais diversas ligações que a Matemática possui com outras áreas do conhecimento humano revela subsídios que podem conduzir a estratégias e abordagens de ensino mais concretas e eficazes. Como exemplo de um tal exercício, desenvolvemos e aplicamos, no presente texto, a teoria da consonância na construção das escalas ocidentais. O entendimento de tal teoria bem como a sua aplicação passam, necessariamente, pelo uso das Progressões Geométricas, conceito matemático central deste texto. Assim, tal exercício pode ser encarado como um passo importante no desenvolvimento de uma estratégia de ensino das Progressões Geométricas através da Música. A Progressão Geométrica foi, então, especificamente aplicada na análise e construção da escala de trastes do violão bem como na construção de um conjunto de tubos sonoros. As atividades experimentais foram inseridas como exemplos práticos das múltiplas possibilidades que podem ser extraídas de um tal estudo. Tais atividades foram, assim, encaradas como exemplos de como a Matemática pode ser tratada em sala de aula em uma proposta experimental ligada a Música. Enfim, acreditamos que tal linha de ensino **e** aprendizagem aponta em direção a possibilidades mais eficazes no ensino da matéria em questão, constituindo-se numa forma mais comprometida com a qualidade do seu ensino.

Referências

ABDOUNUR, Oscar J. **Matemática e música:** pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: Escrituras Editora, 1999.

ARNOLD, S. Mathematics - A Search for Harmony. **Australian Mathematics Teacher,** v. 47, n. 4, p. 14-16, dec. 1991.

ASTIN, J. a to the Zero Power? **Mathematics in School,** v. 13, n. 2, p.15, mar. 1984.

BAHNA-JAMES, T. The Relationship between Mathematics and Music: Secondary School Student Perspectives. **Journal of Negro Education,** v. 60,n.3,p. 477-85,1991.

BENADE, A.H. **Fundamentals of musical acoustics.** 2nd ed. New York: Dover Publications 1990.

BICUDO, M. A. V. Intersubjetividade e educação. **Revista Didática,** v. 15,1979.

BLACKBURN, K.; WHITE, D. Measurement, mathematics, and music. **School Science and Mathematics,** v. 85, n. 6, p. 499-504, oct. 1985.

BOTTS, T. More on the mathematics of musical scales. **Mathematics Teacher,** v. 67, **n.** 1, p. 75-84, jan. 1974.

CARPEAUX, O. M. **Uma nova história da música.** Rio de Janeiro: Ediouro,1999.

CHEEK, J.; SMITH, L. Music training and mathematics achievement. **Adolescence,** v.34,n.l36,p. 759-61,1999.

DIENES, Z. Lessons involving music, language, and mathematics. **Journal of Mathematical Behavior,** v.6,n.2,p. 171-81, aug. 1987.

FERNANDEZ, M. Making music with mathematics. **Mathematics Teacher,** v. 92, n.2, p. 90-97, feb. 1999.

FLETCHER, A. Decimals and progressions: I Geometric Progressions. **Mathematics Teaching,** n. 88, p. 52-55, sep. 1979.

GAMBLE JR., R. The Money-Creation model: another pedagogy. **Journal of Economic Education,** v. 22, n. 4, p. 325-29,1991.

GOEGHEGAN, N.; MITCHELMORE, M. Possible effects of Early Childhood Music on Mathematical Achievement. **Australian Research in Early Childhood Education,^ 1,**1996.

HAAK, S. Using the monochord: a classroom demonstration on the mathematics of musical scales. **Mathematics Teacher,** v. 75, **n.** 3, p. 238-44, mar. 1982.

HOLLEY, A. A question of interest. **Two-Year College Mathematics Journal,** v. 9, n. 2, p. 81-3, mar. 1978.

JOHNSTON, Ian. **Measured Tones.** Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 1989.

KITTS, R. Music and mathematics. **Humanistic Mathematics Network Journal,** n. 14, p. 23-29, nov. 1996.

KLEINER, I. Functions: historical and pedagogical aspects. **Science & Education,** v. 2, p. 183-209,1993.

LEVARIE, S.; LEVY, E. **Tone:** A Study in Musical Acoustics. Ohio: Kent State University Press, 1980.

LINDSAY, Robert B. The story of acoustics. **Journal of Acoustical Society of America,** Local, v. 39, n. 4, p. 629-644. in: Lindsay, B. Acoustics: Historical and Philosophical Development, Dowden, Hutchingon & Ross, inc, Stroudsburg, 1966, pp. 5-20.

MACONIE, R. **The science of music.** Oxford: Claredon Press, 1997.

MALCOM, P. Mathematics of musical scales. **Mathematics Teacher** v. 65, n. 7, p. 611-615, nov. 1972.

MEDEIROS, C. F. Por uma Educação Matemática como intersubjetividade. In: BICUDO, M. A. V. **Educação Matemática.** São Paulo: Moraes, 1987.

MONTEIRO JR., Francisco N. **Síntese ou distorção:** como os livros didáticos apresentam o conceito de timbre? 1999. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, 1999.

NISBET, S. Mathematics and music. **Australian Mathematics Teacher,** v.47, n. 4, p. 4-8, dec. 1991.

PARKS, M. Integrate the arts. Music by numbers. **Instructor,** v. 105, n. 4, p. 33-34, nov./dec. 1995.

ISBN 978-85-89082-23-5

PIERCE, John R. **The science of musical sound.** New York: W. H. Freeman and Company, 1996.

ROEDERER, Juan G. **Introdução a física e psicofísica da música.** São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1998.

ROSSING, Thomas D. **The science of sound.** 2nd ed. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

ROTHSTEIN, Edward. **Emblems of mind:** the inner life of music and mathematics. USA: Avon Books, 1996.

SHWARGER, M. Another look at the Tower of Hanoi. **Mathematics Teacher,** v. 70, n. 6, p. 528-533, sep. 1977.

SPENCE, L. The difference equation x^n-$ax^{n'''}$+b. **Mathematics Teacher,** v.83,n.9,p.709-13,dec.l990.

THOMAIDIS, Y. Aspects of negative numbers in the Early 17th Century. Science **and Education,** v. 2, n. 1, p. 69-86,1993.

TOUMASIS, C. Teaching logarithms via their history. **School Science and Mathematics,** v. 93, n. 8, p. 428-34, dec.,1993.

WHEELER, G. R; CRUMMETT, W. P. The vibrating string controversy. American **Journal of Physics,** v.55,n. l,p. 33-37,1987.