



# A Noção de Multiplicação: um “obstáculo” desconhecido na História da Matemática<sup>1</sup>

Gert Schubring<sup>2</sup>

## Resumo

A relação entre a história e o ensino da Matemática representa um assunto de grande atualidade para as pesquisas em Educação Matemática. Particularmente são problemas inerentes à natureza da Matemática e que se revelam no processo de aprendizagem, no qual se espera – algumas vezes diretamente – soluções para problemas didáticos: por meio de conhecimentos tirados da história da Matemática. É o conceito de ‘obstáculo epistemológico’ que representa um foco maior para transpor tais conhecimentos no ensino. Este artigo discute as potencialidades e as fraquezas dessa noção: de um lado segundo a elaboração do conceito na Educação Matemática, e por outro, analisando processos de desenvolvimento históricos na Matemática. São apresentados novos resultados de pesquisas sobre a história do conceito de multiplicação, que revelam rupturas no desenvolvimento da Matemática e advertem contra um uso direto ou ingênuo da história em sala de aula

## Abstract

The relation between mathematics history and mathematics teaching constitutes a topic of high actual interest in research on mathematics education. In particular, it are problems inherent to the nature of mathematics and which prove to be relevant in the teaching-learning process that one hopes – sometimes in a too immediate way – to better approach by introducing knowledge from history of mathematics. It is the concept of ‘epistemological obstacle’ which constitutes a major focus for transposing historical knowledge to teaching. This article analyses potentialities and weakness of the concept: on the one hand, by following the establishment of this concept within didactical theories, and on the other hand by analyzing processes of historical development within mathematics. New results from research on the history of the notion of multiplication reveal hitherto unknown “ruptures” in mathematical development so that immediate transfers from history to the classroom should be avoided.

## Introdução

A noção do “obstáculo epistemológico” foi desenvolvida pela Didática da Matemática, na França, a partir dos anos 1970, mas foi recebida e aplicada em outros países também. A novidade dessa noção consiste no fato de que ela propõe uma relação entre a história e o ensino da Matemática, uma relação não abstrata, mas, pelo contrário, operacional, na organização do processo de aprendizagem. O atrativo dessa noção para a Didática da Matemática consiste na possibilidade de identificar origens de erros dos alunos; o atrativo para a história consiste no fato de apresentar uma verdadeira

<sup>1</sup> Digitalizado por Lucieli M. Trivizoli e Marco A. Escher.

<sup>2</sup> IDM–Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Germany. E-mail: [gert.schubring@uni-bielefeld.de](mailto:gert.schubring@uni-bielefeld.de)

aplicabilidade do saber histórico.

Porém, falta ainda uma reflexão sobre a noção de obstáculo epistemológico, uma reflexão que revele também as limitações e as fraquezas da noção. Nesse sentido, discutindo um caso histórico do desenvolvimento de um conceito matemático, gostaria de contribuir para tal debate.

### **Erros e Obstáculos**

O interesse na Didática da Matemática com os obstáculos epistemológicos surgiu com a mudança da Didática de uma técnica ou prática numa ciência experimental e numa ciência própria ou independente, desde os anos de 1960, então, desde a recepção da nova Psicologia Genética de Piaget. Como uma das conseqüências essenciais da transformação experimental e cognitiva da Didática, os erros dos alunos conseguiram obter um novo papel: com efeito, entretanto, os erros não são mais considerados possíveis de ser eliminados por uma simples repetição, ou por atenção disciplinar por parte do professor. Pelo contrário, os erros não têm mais um papel marginal na Didática, somente relevante para a prática do professor na sala da aula: eles passaram para o centro de reflexão teórica da Didática e da sua prática experimental<sup>3</sup>. Como conseqüência do “cognitive move”: da transformação cognitiva na Didática e na Psicologia, os erros são considerados como indicadores dos processos cognitivos na aprendizagem da Matemática nas salas de aula. Há cerca de 25 anos, tem surgido um grande número de estudos sobre erros de alunos – os erros são considerados como sendo analisáveis e são investigados como atribuídos a determinadas dificuldades dos alunos na apreensão do conhecimento.

Um resultado decisivo dessas pesquisas reside na importância de pré-concepções, ou seja, dos conhecimentos já estabelecidos no aluno quando confrontado com um novo conhecimento. Como as pesquisas mostram, os alunos, em geral, não integram um novo conhecimento ensinado direta e integralmente, mas, pelo contrário, têm interações do novo conhecimento com o saber já existente, que podem se desenvolver na forma de *conflitos*.

Na concepção do obstáculo epistemológico, o novo conhecimento não consegue integrar-se sistematicamente, o saber já existente não admite o novo – seja parcial, seja

---

<sup>3</sup> Vê-se a obra de Neuza Bertoni Pinto sobre o conceito de erro (Pinto 2000).

inteiramente. Já fica evidente aqui uma primeira analogia do processo de *aprendizagem* com o desenvolvimento da *ciência*: na ciência, também as novas concepções não conseguem praticamente ser recebidas inteiramente e sem resistências: podem subsistir conflitos fundamentais ou principais entre o novo e o tradicional.

### **Obstáculos Epistemológicos Segundo Bachelard**

Com efeito, a concepção dos obstáculos epistemológicos foi estabelecida por um filósofo francês, **Gaston Bachelard** – originalmente em 1938, porém recebida mais efetivamente depois da segunda edição, em 1975.

Fica muito característico que Bachelard (1999) parte, na sua investigação da formação do espírito científico, de um conflito fundamental subjacente a todas as etapas deste desenvolvimento: do antagonismo entre os conhecimentos derivados, por meio dos *sensos* e os conhecimentos *científicos*:

Na formação do espírito científico, o primeiro obstáculo é a experiência primeira, a experiência colocada antes e acima da crítica – crítica esta que é, necessariamente, elemento integrante do espírito científico. Já que a crítica não pôde intervir de modo explícito, a experiência primeira não constitui, de forma alguma, uma base segura [...]. Eis, portanto, a tese filosófica que vamos sustentar: o espírito científico deve formar-se contra a Natureza, contra o que é, em nós e fora de nós, o impulso e a informação da Natureza [...]. O espírito científico deve formar-se enquanto se reforma (Bachelard, 1999, p. 29).

Como conseqüência, o pensamento científico só pode formar-se numa ruptura contra o pensamento sensualista: *“É preciso, pois, aceitar uma verdadeira ruptura entre o conhecimento sensível e o conhecimento científico”* (Bachelard, 1999, p. 294).

Assim, podemos ver confirmada uma analogia estrutural entre o processo de desenvolvimento da ciência e o processo de aprendizagem: o novo conhecimento não se impõe automática ou imediatamente, mas por conflitos com os conhecimentos já estabelecidos. Reside aqui a legitimação de aplicar a noção do “obstáculo epistemológico” na Didática.

### **Obstáculos Epistemológicos segundo Brousseau**

Quando **Guy Brousseau** adotou, em 1976, a concepção de Bachelard para a Didática da Matemática, ele teve a intenção de desenvolver uma teoria que facilitasse

estudar e explicar os erros dos alunos como estratégias particulares ou pessoais. Parece que Brousseau podia sentir sua adaptação confirmada por uma convergência ou mesmo uma ressonância entre a teoria filosófico-histórica de Bachelard e a teoria psicológica de Jean Piaget (de resto, ambas as teorias chamaram-se “epistemológicas”!). Bachelard concebeu a formação do espírito científico como acontecendo em fases, em estados. E, notavelmente, foram três estados – como na teoria de Piaget do desenvolvimento cognitivo do pensamento das crianças: estados definidos bem analogicamente (sensório-motor, operações concretas, pensamento abstrato):

1º O *estado concreto*, em que o espírito se entretém com as primeiras imagens do fenômeno e se apóia numa literatura filosófica que exalta a Natureza, louvando curiosamente, ao mesmo tempo, a unidade do mundo e sua rica diversidade.

2º O *estado concreto-abstrato*, em que o espírito acrescenta à experiência física esquemas geométricos e se apóia numa filosofia da simplicidade [...].

3º O *estado abstrato*, em que o espírito adota informações voluntariamente subtraídas à intuição do espaço real, voluntariamente desligadas da experiência imediata e até em polêmica declarada com a realidade primeira, sempre impura, sempre informe (Bachelard 1999, 11-12).

Segundo a teoria didática de Brousseau, há contradições inerentes nos tipos de conhecimento dos estados inferiores: o conhecimento mostra-se eficaz quando aplicado nessas áreas restritas, mas revela-se como um obstáculo logo que aplicado a situações de um estado superior. Assim, por causa dos fatores inerentes, um conhecimento pode funcionar como um obstáculo contra um progresso no próximo estado.

Mas, como fica evidente, Bachelard estabeleceu a sua concepção a fim de investigar o pensamento científico, tendo em vista refletir sobre a História da Ciência. Ele não teve a intenção de aplicá-la aos processos de aprendizagem de alunos. Além disso, Bachelard também nunca imaginou aplicá-la na Matemática!

Com efeito, praticamente todos os problemas que deparam com a concepção do obstáculo epistemológico na Educação Matemática derivam da adaptação das idéias de Bachelard à aprendizagem; podemos mesmo falar de uma “transposição”. Ambas as teorias, de Bachelard e de Piaget, implicam uma visão teleológica: a certeza de poder conseguir o nível mais “maduro”, o mais elevado da ciência e, respectivamente, do pensamento humano.

## O papel da História

Para melhor avaliar a teoria de Brousseau, comparo as suas duas formas, de 1976 e de 1983, agora bem acessíveis na edição inglesa *Theory of Didactical Situations* (1997).

Um obstáculo se torna visível pelos erros, mas tais erros não se devem ao acaso. Fugazes, erráticos, são reproduzíveis, persistentes. Além disso, erros produzidos pela mesma matéria são interligados por uma fonte comum: uma forma de saber, uma concepção característica, coerente se não correta, um “conhecer” anterior que tem sido bem sucedido ao longo de um domínio-ação. Tais erros não são necessariamente explicáveis. O que acontece é que não desaparecem de uma vez; eles resistem, persistem e, então, reaparecem (Brousseau, 1997, p. 84)<sup>4</sup>

O problema com o qual Brousseau se confronta sempre é se um obstáculo pode ser ultrapassado:

O obstáculo é da mesma natureza do conhecimento, com objetos, relacionamentos, métodos de compreensão, predições, com evidências, conseqüências esquecidas, ramificações inesperadas, etc. Ele resistirá ao ser rejeitado e, como é provável, tentará adaptar-se localmente, para modificar-se ao menor custo, para otimizar-se em um campo restrito, seguindo o bem conhecido processo de acomodação (Brousseau, 1997, p. 85).<sup>5</sup>

Ele afirma sempre que obstáculos são inevitáveis, mas que não se deve reforçá-los explicitamente:

Obstáculos de origem verdadeiramente epistemológica são aqueles dos quais não se pode nem se deve fugir, em razão do papel formativo que estes assumem no conhecimento que se busca (Brousseau, 1997, p. 87).<sup>6</sup>

---

<sup>4</sup> “An obstacle is thus made apparent by errors, but these errors are not due to chance. Fleeting, errating, they are reproducible, persistent. Also, errors made by the same subject are interconnected by a common source: a way of knowing, a characteristic conception, coherent if not correct, an ancient ‘knowing’ that has been successful throughout an action-domain. These errors are not necessarily explainable. What happens is that they do not completely disappear all at once; they resist, they persist, then they reappear” (Brousseau, 1997, p. 84).

<sup>5</sup> “The obstacle is of the same nature as knowledge, with objects, relationships, methods of understanding, predictions, with evidence, forgotten consequences, unexpected ramifications, etc. It will resist being rejected and, as it must, it will try to adapt itself locally, to modify itself at the least cost, to optimize itself in a reduced field, following a well known process of accommodation” (Brousseau, 1997, p. 85).

<sup>6</sup> “Obstacles of really epistemological origin are those from which one neither can nor should escape, because of their formative rôle in the knowledge being sought. They can be found in the history of the concepts

Em 1983, depois de sua controvérsia com Glaeser, sobre o sentido do “obstáculo”, Brousseau buscou esclarecer essa noção. Fica evidente que a história da Matemática ocupa agora, segundo ele, um papel ainda mais decisivo:

O conceito de obstáculos... pode provar-se proveitoso para o ensino na medida em que:

Os obstáculos em questão forem verdadeiramente identificados na história da matemática;

Tiverem sido identificados nos modelos espontâneos dos estudantes;

As condições pedagógicas para suas “derrotas” ou suas rejeições forem estudadas com uma exatidão tal que um projeto didático preciso pode ser proposto aos professores;

A avaliação de um tal projeto puder ser considerada positiva (Brousseau, 1997, p. 93-94)<sup>7</sup>

Mas esse papel reforçado da história revela, ao mesmo tempo, uma fraqueza da sua concepção: a história acha-se com a função principal de servir como fonte dos erros cometidos por matemáticos – uma visão bastante distorcida da história, em minha opinião.

A maneira relativamente reduzida de explorar a história fica visível na receita de Brousseau (1997, p. 99) para pesquisas:

Do princípio, os pesquisadores deveriam:

a) encontrar erros recorrentes e mostrar que tais erros estão agrupados ao redor de conceitos;

b) encontrar obstáculos na história da Matemática;

c) comparar obstáculos históricos com obstáculos para a aprendizagem e estabelecer seu caráter epistemológico.<sup>8</sup>

Parece assim que a história é considerada basicamente como um museu, sem propriamente apresentar problemas e questões ainda não resolvidos. A idéia de Brousseau não valoriza um papel ativo da história parece estar ligado com o fato de que ele não integra a parte chave da concepção de Bachelard: a noção de **ruptura** entre

themselves” (Brousseau, 1997, p. 87).

<sup>7</sup> “The obstacles concept ... can prove itself to be fruitful for teaching insofar as:

- the obstacles in question are truly identified in the history of mathematics;

- they have been traced in students’ spontaneous models the pedagogical conditions for their “defeat” or their rejection are studied with precision in such a way that a precise didactical project can be proposed to teachers;

- the assessment of such a project can be considered positive” (Brousseau, 1997, p. 93-94).

<sup>8</sup> “From the outset, researchers should

a) find recurrent errors, and show that they are grouped around conceptions;

b) find obstacles in the history of Mathematics;

c) compare historical obstacles with obstacles to learning and establish their epistemological character.”

conhecimento sensível e conhecimento científico, embora essa noção apresente uma dimensão muito importante, particularmente para pesquisas didáticas.

### **Paralelismo e Lei Biogenética**

Brousseau mesmo previne, de maneira geral, contra a admissão do paralelismo biogenético para a concepção de obstáculo e de sua pesquisa, mas não desenvolve uma argumentação sobre o paralelismo. Analisando as suas publicações, pode-se observar uma idéia subjacente de que a história é percebida como podendo tornar-se paralela à aprendizagem. Ele fala sempre de reações “espontâneas” dos alunos e mostra-se convencido de que essas reações exprimem os seus obstáculos epistemológicos. Ao mesmo tempo, as idéias “espontâneas” dos alunos são interpretadas como correspondentes às primeiras noções estabelecidas pelos cientistas antigos. Aceitando assim a validade de tal paralelismo já implica a lei biogenética, de certa forma. E, ao mesmo tempo, tal aceitação nega as mudanças profundas nos níveis sociais e culturais que possibilitam que crianças hoje comecem com noções e conceitos radicalmente diferentes das concepções das gerações de séculos anteriores.

Além disso, as formulações revisadas por Brousseau, em 1983, mostram um outro problema conceitual na sua abordagem: que a simetria suposta entre o lado da história e o lado do aluno não existe. Nessa versão de 1983, Brousseau critica Georges Glaeser por causa da interpretação dele do que significa “obstáculo”. Basicamente, Glaeser explicou que “obstáculos” consistem em “dificuldades” de compreender conceitos matemáticos. Segundo Brousseau, tal interpretação torna-se muito fraca, entre outros motivos, porque se pode imaginar facilmente as dificuldades que podem ser ultrapassadas. Brousseau, então, demandou adicionalmente, em um artigo posterior de 1989, que os obstáculos devem ser “incontournables” e “insurmontables” (Brousseau 1989, citado em Brousseau 1998, 154).

Essa condição adicional revela que Brousseau pensa exclusivamente do ponto de vista da dimensão de aprender. No entanto, Glaeser propôs a sua interpretação de “obstáculo” como “dificuldade”, porque o seu interesse foi explorar verdadeiramente a dimensão histórica: nessa dimensão, a saber, um significado tido como “insuperável” não só não faz sentido, como é também absurdo. Um progresso científico seria impossível se obstáculos não pudessem ser vencidos.

Certamente, a interpretação “fraca” de Glaeser fica – apesar das verdadeiras fraquezas da sua metodologia histórica – bem razoável, porque ele tentou identificar elementos efetivos de dificuldade no desenvolvimento do conceito de números negativos (Glaeser, 1981) que não foi ainda bem investigado pela historiografia.

Posso mencionar, aqui, brevemente que já houve uma reflexão sobre a concepção dos obstáculos epistemológicos, na ocasião de um simpósio internacional: *Obstacles et conflits cognitifs*, 1988, em Québec.

Infelizmente, embora com a presença de muitos especialistas, não se constataram resultados definitivos, porque não foram analisadas concretamente questões decisivas como:

- Qual realidade corresponde ao conceito de obstáculo?
- Como reconhecer os obstáculos?
- Podem-se evitar os obstáculos na aprendizagem?
- Como se pode ultrapassar um obstáculo? (Bednarz, 1989, p. 16).



Mesmo Anna Sierpinska, que propaga também o conceito, admitiu “participants left with the feeling of confusion greater than ever” (Sierpinska 1994, p. 134). Por causa disto, Sierpinska tentou realizar uma abordagem própria, elaborando o papel dos obstáculos epistemológicos para uma melhor compreensão da Matemática, num livro sobre *Understanding in Mathematics* (Sierpinska 1994).<sup>9</sup> Além do caráter eclético de juntar teorias diferentes, um problema sério da abordagem de Sierpinska consiste no fato de que aí, também, a história não é avaliada segundo o estado atual dos debates e conhecimentos da historiografia. Por exemplo, o único caso apresentado no livro, no contexto dos obstáculos epistemológicos na Matemática – “the Bolzano Theorem”: com efeito, o teorema do valor intermediário é discutido na base de apenas um estudo: uma reflexão filosófica sobre a Matemática, datada de 1945, composta por não-especialistas na História da Matemática. Baseada nisso, Sierpinska reclama de poder afirmar uma certa interpretação da noção de continuidade, exposta por Cauchy: “*which is exactly what Cauchy wanted to say in his definition of a function continuous in a point*” (ibid., 131). Com efeito, houve debates enormes durante os últimos trinta anos sobre o significado da definição de continuidade de Cauchy, e a maioria dos historiadores admite que não se sabe exatamente o que Cauchy queria dizer; além disso, há divergências se a sua definição de continuidade significa continuidade num ponto (ver Bottazzini 1992).

A fraqueza geral da concepção do obstáculo epistemológico reside no problema agora apresentado de que a dimensão histórica é compreendida como fixa, firme e determinada – as suas questões são basicamente resolvidas. No entanto, deve-se considerar que a historiografia tradicional da Matemática não é adequada para responder às novas questões, ao novo uso que se quer fazer no ensino e na aprendizagem da Matemática: a historiografia tradicional concentrou-se nos eventos, nos “picos” das comunidades Matemáticas. Ela desprezou os eventos, as obras consideradas secundárias na comunidade, na sua integralidade. A meu ver, para identificar obstáculos na história, não se pode restringir os estudos a poucos matemáticos famosos – no entanto, precisa-se estudar como os conceitos matemáticos foram apresentados, discutidos, recebidos e mudados na grande comunidade Matemática numa certa época e cultura – e mesmo,

---

<sup>9</sup> Vê-se a crítica detalhada do livro de Sierpinska por Antonio Miguel no artigo: “Educação Matemática e Epistemologia” (não ainda publicado).

mais além, comparativamente para culturas diferentes.

### **Uma Abordagem Diversa: Explorar a História**

Esses estudos históricos trazem possibilidades melhores para identificar dificuldades, obstáculos e rupturas.

Gostaria de empreender aqui uma nova abordagem da relação entre a história e o ensino da Matemática. Não vou perceber a história como um “viveiro” para tirar erros que seriam do uso no ensino. No entanto, vou buscar uma lógica própria na história, independente da lógica do ensino. Para revelar tal independência relativa, gostaria de perguntar: há um campo conceitual na Matemática, onde se pode identificar um obstáculo na história, mas onde não existe um obstáculo correspondente no ensino e na aprendizagem de hoje? Quero afirmar que existe, com efeito, tal obstáculo. Acho que se deve admitir que, se houve provas da existência desse obstáculo, a relação entre história e ensino é muito mais indireta que a afirmada na concepção dos obstáculos epistemológicos.<sup>10</sup>

Gostaria de apresentar este exemplo “monstro”: trata-se do conceito de multiplicação e do problema desconhecido de como desenvolvê-lo como conceito geral, isto é: poder aplicá-lo sem restrições.

Há problemas históricos não esclarecidos. Recentemente, li uma nota de Ampère no seu arquivo pessoal. **André-Marie Ampère** (1775-1836) tornou-se conhecido por suas pesquisas em Física e em Química, e também na Filosofia, mas não é conhecido por suas muitas e profundas pesquisas sobre os fundamentos da Matemática. Mesmo a biografia de Ampère, publicada em 1996, coloca que Ampère teve a “estatura” de um bom matemático, mas não utilizou essas suas capacidades (Hofmann, 1996, p. 59).

Evidentemente, o autor da biografia não explorou o arquivo pessoal de Ampère, no qual fica claro que ele pesquisou, durante um longo período – no contexto da Escola Politecnica de Paris, onde foi professor dos cursos de Análise e de Mecânica – para esclarecer os fundamentos da Matemática. É claro, também, que Ampère se ocupou, durante muitos anos, de redigir um grande livro destinado a apresentar a Matemática pura, desde a Aritmética até a Análise. Infelizmente, a intenção dele fracassou. Há numerosos fragmentos, com novas abordagens sempre, particularmente voltadas ao

---

<sup>10</sup> Cf. as reflexões profundas sobre o uso da história no ensino, em Miguel, 1997.

conceito dos números. O obstáculo maior dele foi justamente o conceito do número em geral, e todas as suas lutas em busca de fundamentos seguros e claros foram em vão.

Num dos fragmentos do curso de Aritmética, encontra-se uma crítica severa de uma proposição do manual de Aritmética, do famoso **Etienne Bézout** (1730-1783), o autor dos manuais de maior influência no ensino da Matemática, antes de **Silvestre François Lacroix** (1765-1843) – não somente na França, mas também em outros países europeus e em todas as Américas.

A crítica de Ampère refere-se à afirmação de Bézout de que a multiplicação de dois fatores não precisa ser comutativa: pode acontecer que é “non-comutativa”:

Antes de terminar essa pequena digressão, eu creio que devo dizer uma palavra de uma passagem de Bezout sobre a natureza da operação de que eu trato, e que tendia a derrubar o primeiro princípio, que consiste na invariabilidade do produto qualquer que seja aqueles dois fatores que servem de multiplicadores. Encontra-se no artigo 17 da Artilharia duas multiplicações de 17 toesas por  $34^{\#}.10^s.2^d$ . Em uma delas o produto é exprimido em libras e em outra em toesa, e disse que somente deram esses dois exemplos de multiplicação para provar que mudando o multiplicando em multiplicador pode-se mudar o produto.<sup>11</sup>

### A Multiplicação na Historiografia

Depois de ter detectado essa crítica, verifiquei no manual de Aritmética para a *artilleria* de Bézout e, com efeito, encontrei o parágrafo criticado. Antes de apresentar e de discutir o texto de Bézout, examinarei o que diz a historiografia sobre essa parte da história da Matemática.

A obra mais relevante para essa área da Matemática é o grande livro clássico de Tropfke sobre a história da Matemática Elementar. A primeira edição dessa obra data de 1902, publicada em diversos volumes: sobre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria. Recebeu várias revisões e novas edições. A quarta edição, profundamente revisada e ampliada na parte sobre a Aritmética e a Álgebra, foi publicada em 1980 por Vogel.<sup>12</sup>

<sup>11</sup> Avant de finir cette petite digression, je crois devoir dire un mot d'un passage de Bezout sur La nature de l'opération dont je traite, et qui tendrait à en renverser le premier principe, qui consiste dans l'invariabilité du produit quelque soit celui des deux facteurs qui servent de multiplicateur: On trouve à l'article 117 de l'artillerie deux multiplications de 17 toises par  $34^{\#}.10s.2d$ . Dans l'une le produit est exprimé en livres et dans l'autre en toises, et il dit qu'il n'a donné ces deux exemples de multiplication que pour prouver qu'en changeant le multiplicande en multiplicateur on peut changer le produit (Manuscrito).

<sup>12</sup> A edição correspondente da parte sobre a Geometria demora ainda.

Embora o capítulo presente nesse livro sobre a história da multiplicação abarque 25 páginas, a parte sobre a história expressamente conceitual tem somente meia página, e seu conteúdo principal consiste na apresentação da definição 15 da multiplicação do livro 7 de Euclides: “Número é dito multiplicar número, caso quantas unidades estão nele, tantas vezes seja adicionado o que se multiplica, e seja produzido algum” (Gonçalves 1998, 58)<sup>13</sup>.

Tropfke (1980) menciona definições paralelas/análogas na Matemática hindu e na Matemática árabe, e conclui mencionando a alteração da definição por Descartes.

A maior parte do capítulo trata dos sinais para a multiplicação, nas diversas culturas, das palavras utilizadas para exprimir os procedimentos e das formas diferentes para executar a multiplicação para números que têm mais que uma cifra. Em todo o capítulo, não há menção de uma problemática, seja inerente à noção da multiplicação, seja de debates históricos sobre essa noção.

Então, considerando essa apresentação clássica da noção de multiplicação, nem os historiadores nem os didáticos podem saber e, nem sequer suspeitar, que um problema ou mesmo um obstáculo pudesse estar escondido aí.

Pode-se suspeitar ainda menos de que a comutatividade da multiplicação foi formulada e mesmo postulada axiomaticamente já muito cedo: em 1667, por Arnauld. Antoine Arnauld (1612-1694) foi um filósofo importante na França do século XVII, representando o movimento jansenista de Port Royal e a luta deles contra a política dos jesuítas. É de sua autoria não somente a famosa *Logique* e a *Grammaire* de Port Royal, mas também o livro *Nouveaux Éléments de Géométrie*, publicado em 1667, e a segunda edição em 1683 (ambas as edições anônimas). Esse livro não somente foi o primeiro livro texto moderno de Álgebra e de Geometria na Europa, mas também apresenta um desafio ousado do manual clássico de Euclides: buscou realizar uma ordem mais metódica e mais rigorosa que Euclides, seguindo, assim, a abordagem de Pierre de la Ramée, do século XVI (Schubring, 1999, p. 28). O título mesmo já explica o desafio: *Nouveaux Éléments!*

Segunda suposição

Em segundo lugar que se saiba que é a mesma coisa na multiplicação começar pelo qual se quer dos dois números que se multiplica: assim 3 ves 5 é a mesma coisa que 5 vezes , 4 vezes 6 é a mesma coisa que 6

<sup>13</sup> Nesta tradução - a primeira tradução portuguesa dos livros aritméticos - esta definição é a 16. porque foi antes introduzida uma adicional (a décima).

vezes 4 (Arnauld, 1667, p. 2)<sup>14</sup>

Mas a posição axiomática de Arnauld foi precipitada: de um lado, uma axiomática da Aritmética foi desenvolvida sistematicamente somente no século XIX e, de outro, ele afirmou tratar das grandezas em geral, mas o texto dele referiu-se realmente somente aos números.

As grandezas, no entanto, apresentaram problemas profundos que nunca foram claramente resolvidos.

**O Texto de Bézout**

Vejamos agora o parágrafo criticado por Ampère: de um lado, Bézout apresenta o cálculo para multiplicar os dois fatores mencionados por Ampère, numa certa ordem:

**E X E M P L E V.**

A raison de. . . . .	$34^r$	$10^s$	$2^h$	la toise,
Combien doivent coûter. .	17 toises ?			
	$238^r$	$0^s$	$0^h$	
	$34$			
	8.	10		
	6.	17		
	0.	2.	10	
	586.	12.	10	

E, de um outro lado, Bézout calcula o produto para os fatores mudados:

17 toises.				
$34^r$ $10^s$ $2^h$				
$68^r$	$0^{ps}$	$0^{ps}$	$0^l$	$0^{ps}$
51				
8.	3			
6	8	2	2	$\frac{2}{5}$
0.	0.	10.	2.	$4\frac{1}{5}$
586.	3.	10.	2.	$4\frac{1}{5}$

E comenta a diferença dos resultados:

<sup>14</sup> Seconde supposition. Secondement qu'on sçache que c'est la mesme chose dans la multiplication de commencer par lequel on veut des deux nombres que l'on multiplie: comme que 3 fois 5, est la mesme chose que 5 fois 3, que 4 fois 6, est la mesme chose que 6 fois 4 (Arnauld, 1667, p. 2).

Nós demos esse exemplo, principalmente para confirmar aquilo que nós dissemos (§45), que importa distinguir o multiplicando do multiplicador, quando são ambos concretos: com efeito, no exemplo anterior, assim como esse aqui, os fatores do produto são igualmente 17 toesas e  $34^{\#}.10^s.2^d$ ; entretanto os dois produtos são diferentes (Bézout, 1800, p. 90-91).<sup>15</sup>

Embora um dos dois fatores seja aparentemente simples: 17, os dois produtos são diferentes. Onde está o problema?

Na verdade, os dois números ou fatores não são números abstratos - trata-se de grandezas: uma foi uma grandeza de comprimento, “toises” (toesas), e a outra de preço, “livres” (libra). Ambas as grandezas tiveram várias subunidades e nenhuma delas era uma unidade métrica e decimal. Assim, as inter-relações entre as subunidades, ficaram muito complicadas e os produtos expressos nas diversas unidades de *toises* e de *livres* foram diferentes.

#### Lista das subunidades

	<i>comprimentos</i>	<i>preços</i>
t	1 toise = 6 pieds	# 1 livre = 20 sous
pi	1 pied = 12 pouces	s 1 sous = 12 deniers
po	1 pouce = 12 lignes	d 1 denier
l	1 ligne = 12 points (pts)	

A afirmação de Bézout é um exemplo característico de uma problemática que ocupou muitas gerações em todas as comunidades Matemáticas na Europa: foi marcante para uma epistemologia em que o conceito dominante da Matemática não foi o conceito de números puros ou abstratos, mas, de grandezas.

#### O Problema da Dimensão do Produto

Desde o crescimento da Álgebra, os matemáticos estiveram ocupados e divididos com o problema de como multiplicar duas grandezas. Todos concordavam que a multiplicação de dois números puros é evidentemente legítima e também a

<sup>15</sup> Nous avons dome cet exemple, principalement pour confirmer ce que nous avons dit (§ 45), qu’il importoit de distinguer le multiplicande, du multiplicateur, lorsqu’ils sont tous les deux concrets: en effet, dans l’exemple précédent, ainsi que dans celui-ci, les facteurs du produit sont également 17 toises et  $34^{\#}.10s.2d$ ; cependant les deux produits sont différens (Bézout, 1800, p. 90-91).

multiplicação entre um número puro, entendido como um escalar ou multiplicador, e uma grandeza ou multiplicando. Mas a multiplicação entre duas grandezas foi excluída porque uma grandeza não pode funcionar como um multiplicador. Apesar desse princípio geral, a prática na Geometria e na Física sempre voltava a exigir multiplicar duas grandezas.

Como é bem conhecido, houve duas abordagens divergentes sobre esse problema prático, mas ilegítimo: a de François Viète e a de René Descartes.

Viète permitia a multiplicação entre duas grandezas, mesmo heterogêneas – por exemplo, entre uma linha e um plano – com o resultado do produto com dimensões superiores, adicionando as duas dimensões originais.

Viète distinguiu grandezas “escalares”, surgidas da multiplicação de um comprimento por ele mesmo – então praticamente potências –, com as dimensões indicadas:

- 1 Latus
- 2 Quadratus
- 3 Cubus
- 4 Quadrato-quadratum
- 5 Quadrato-cubus
- 6 Cubo-cubus
- 7 Quadrato-quadrato-cubus
- 8 Quadrato-cubo-cubus
- 9 Cubo-cubo-cubus

e grandezas “comparativas”, surgidas da multiplicação entre comprimento e largura:

- 1 Longitudo ou latitudo
- 2 Planum
- 3 Solidum
- 4 Plano-planum
- 5 Plano-solidum
- 6 Solido-solidum
- 7 Plano-plano-solidum
- 8 Plano-solido-solidum

## 9 Solido-solido-solidum

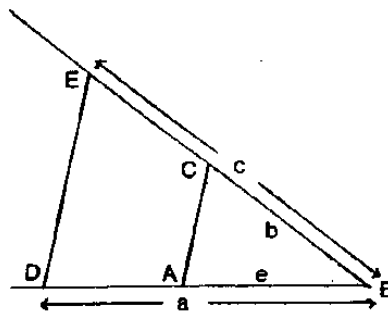
A abordagem de Viète teve como consequência que a operação da multiplicação não era uma operação fechada - o resultado da multiplicação eram grandezas de uma outra natureza - e, por outro lado, a dimensão das grandezas podia aumentar sem limite.<sup>16</sup>

Outra abordagem foi a de Descartes. Ele introduziu uma nova definição da multiplicação, expressa para grandezas geométricas:

$$1 : a :: b : c ,$$

$$\text{assim: } c = ab.$$

Supondo um comprimento como unidade de largura,  $e$ , Descartes estabeleceu uma noção de multiplicação entre duas grandezas, na qual a dimensão foi mantida e, assim, a operação ficou fechada: assim, o produto de dois comprimentos foi de novo um comprimento, como é visualizado pela figura 1:



Grafica do: Bos 1990, 201

A despeito dessa concepção de Descartes, a abordagem de Viète continuou a ser praticada, em particular, onde grandezas não geométricas estavam implicadas. Mesmo Ampère estava de acordo com a abordagem de Viète, como mostra o parágrafo antes da crítica de Bézout, em que ele admite a multiplicação entre grandezas não homogêneas:

Não se pode adicionar linhas e superfícies, tempos e velocidades, volumes e densidades. Mas essas diferentes quantidades podem ser multiplicadas e dão produto de uma natureza diferente, mas realmente existentes,

<sup>16</sup> Viète perguntou-se uma vez se poderiam existir grandezas de uma dimensão mais alta que 3 ou 4, mas não respondeu à sua pergunta (Reich, 1990, p. 188).



conhecidas sob os nomes de sólidos, espaço, massa.(Manuscrito)<sup>17</sup>

E, com efeito, encontram-se no parágrafo de Bézout erros matemáticos que foram também criticados por Ampère: seguindo a concepção agora citada, o produto entre *livres* e *toises* pode não ter nem a dimensão de *livres* nem de *toises*: “Il est evident que le produit des unités de livres par des unités de toises ne peut être composé ni de livres ni de toises” (Manuscrito).

### O Caso de Bézout não foi único ou isolado

Sabendo da posição de Bézout sobre a multiplicação de grandezas chamadas “complexas”, pode-se pesquisar se há mais tais posições. Uma vez advertido, encontram-se, ainda outras concepções análogas, em particular na segunda metade do século XVIII.

#### - Na Itália

Uma concepção bem revelante foi publicada pelo matemático italiano **Salimbeni** (1752-1823) em 1794, num artigo onde ele se propôs a clarificar as noções de multiplicação e de divisão. Salimbeni afirmou que a definição de multiplicação em Euclides somente concerne aos números e que ainda falta uma definição rigorosa para grandezas.

A fim de conseguir tal definição, Salimbeni mudou a definição para proporções de Descartes, num ponto aparentemente pequeno:

A definição verdadeira e geral da multiplicação algébrica é esta: Uma grandeza diz-se multiplicar uma grandeza, quando faça como a unidade concreta da grandeza multiplicante para a mesma, assim a grandeza multiplicada para uma outra grandeza que se produz” (Salimbeni 1794, 484)<sup>18</sup>

Isto é: ele substitui a unidade abstrata por uma unidade concreta. Pode simbolizá-la pela proporção:

$$1_A : A = B : P$$

<sup>17</sup> On ne peut additionner des lignes et des surfaces, des tems et des vitesses, des volumes et des densités. Mais ces différentes quantités peuvent être multipliées et donnent des produits d’une nature différente, mais réellement existans, connus sous les noms de solides, espace, masse (Manuscrito).

<sup>18</sup> La vera e generale difinizione della moltiplicazione algebrica è questa: Una grandezza dicesi moltiplicare una grandezza, quando facciasi come l’unità concreta della grandezza moltiplicante alla stessa, così la grandezza moltiplicata ad un’altra grandezza che si produce” (Salimbeni 1794, 484).

A “pequena” mudança no sentido da unidade tem como conseqüência que a unidade agora somente mede a grandeza A, mas não mais a grandeza B, porque ela é medida por uma outra unidade concreta.

Para Salimbeni, esta conseqüência não fez mal porque ele introduziu uma segunda *petitio principii*. Ele afirmou que o segundo fator, concebido por ele como o multiplicador, sempre deve ser um número abstrato - mesmo se ele tem uma qualidade como grandeza: “Teorema: Se uma grandeza multiplica uma grandeza; o produto será homogêneo com a grandeza multiplicada” (ibid., 486)<sup>19</sup>.

Assim, o produto deve ter a mesma dimensão do multiplicando, ou seja, do primeiro fator: a multiplicação não mudará a dimensão! Depois de ter “demonstrado” este ‘Teorema’ (baseando-se na sua redefinição da multiplicação), Salimbeni critica explicitamente as abordagens tradicionais, no sentido de Viète, como erradíssimas:

Por mais simples e manifesto que seja esse Teorema, é, no entanto, contrário a uma idéia comumente recebida, que é, que não havia muita e muita vez lido: que uma linha, multiplicando uma linha, produz uma superfície, e que uma linha, multiplicando uma superfície, produz um sólido? Tudo falsíssimo [...], pois demonstramos que a grandeza produzida é do mesmo gênero da multiplicada (ibid., 487)<sup>20</sup>

Salimbeni não somente se torna bem consciente que assim a multiplicação não resulta mais comutativa, ele também exprime a non-comutatividade explicitamente e mostra-se bem orgulhoso dessa sua concepção, criticando que se aceite na Álgebra como postulado que o produto de duas grandezas não depende da ordem:

que se duas grandezas, com várias ordens, multiplicam-se conjuntamente, os produtos são iguais entre si. [...] Mas, esse Teorema tomado em sentido geral [...] é falso; sendo verdadeiro somente no caso em que as duas grandezas A [e] B sejam do mesmo gênero.(ibid.)<sup>21</sup>

Salimbeni continuou mostrando a sua concepção, no caso da multiplicação de duas grandezas, análogo ao texto de Bézout: de 3 *pés*, então, de uma grandeza de

<sup>19</sup> “Teorema: Se una grandezza moltiplichi una grandezza; il prodotto sarà omogeneo alla grandezza moltiplicata” (ibid., 486).

<sup>20</sup> “Quantunque semplice e manifesto sia questo Teorema, egli è però contrario ad una idea comunemente ricevuta. chi è, che non abbia molte e molte volte letto: che una linea moltiplicando una linea produce una superficie, e che una linea moltiplicando una superficie produce un solido? tutte cose falsissime. [...] poichè abbiamo dimostrato che la grandezza prodotta è dello stesso genere della moltiplicata”.

<sup>21</sup> “che se due grandezze con vario ordine moltiplichinsi insieme, i prodotti sono uguali fra loro. [...] a questo Teorema preso in senso generale [...] è falso; non essendo vero che nel caso in cui le due grandezze A [e] B sieno dello stesso genere” (ibid.).

comprimento, e de 70 libras, uma grandeza de preço: “caso se multiplique os 3 pés pelas 70 libras, o produto será 210 pés; mas, caso se multiplique as 70 libras por 3 pés, o produto será 210 libras” (ibid.).<sup>22</sup>

Salimbeni não publicou um manual de Álgebra e, assim, ele não teve necessidade de expor uma aplicação coerente dessa concepção.

### - Na Alemanha

No mesmo período, há um outro artigo onde se tentou estabelecer uma concepção de multiplicação para grandezas. Trata-se de um *mémoire* de **Jean de Castillon** (1701-1791), também de origem italiana, professor de Matemática em Berlin e não apenas membro da classe Matemática da Academia de Berlin mas diretor da mesma - então um sucessor de Euler e de Lagrange. Nesse *mémoire*, Castillon rejeita a noção de multiplicação por proporções, como introduzida por Descartes, e reclama de somente aplicar a definição de Euclides. Mas ele seguiu basicamente conceitos análogos a Salimbeni: Castillon postulava que o segundo fator - o multiplicador - deveria sempre ser tratado como um número absoluto:

Mas ele é senão do segundo membro ou do multiplicador que indica quantas vezes o multiplicando deve ser repetido. Esse multiplicador é necessariamente absoluto; visto que o número que não indica outra coisa senão quantas vezes um outro deve ser repetido, não somente ocasiona, nem mesmo sofre qualquer idéia acessória de adição, nem de subtração. É bem verdade que o multiplicador carrega a idéia do número de vezes que o multiplicando deve ser repetido antes de ser acrescido a ele mesmo, mas a idéia de adição, restrita à essas palavras, se refere ao multiplicando e não ao multiplicador que consequentemente é absoluto (Castillon 1790, 351)<sup>23</sup>

Castillon concentrou-se sobre grandezas particulares: números com certas qualidades - de serem positivos ou negativos ou absolutos. Para essas grandezas, ele estabeleceu como princípio fundamental que o multiplicador perde a sua qualidade na

<sup>22</sup> “se moltiplichinsi li 3 piedi per le 70 libbre, il prodotto sarà 210 piedi; ma se moltiplichinsi le 70 libbre per 3 piedi, il prodotto sarà 210 libbre” (ibid.).

<sup>23</sup> “Mais il en est tout autrement du second membre ou du multiplicateur qui indique combien de fois le multiplicande doit être répété. Ce multiplicateur est nécessairement absolu; car le nombre qui n'indique autre chose sinon combien de fois un autre nombre doit être répété, non seulement n'entraîne, mais même ne souffre aucune idée accessoire d'addition ni de soustraction. Il est bien vrai que le multiplicateur entraîne l'idée Du nombre de fois que le multiplicande doit être répété avant que d'être ajouté à lui-même, mais l'idée d'addition renfermée dans ces mots se rapporte a multiplicande et non au multiplicateur qui par conséquent est absolu” (Castillon 1790, 351).

multiplicação:

O primeiro princípio, o princípio fundamental de toda multiplicação, é aquele em que o multiplicando pode ser absoluto, positivo ou negativo, mas em que o multiplicador é necessariamente absoluto, e que o produto sendo o multiplicando repetido, ele é homogêneo, isto é: é absoluto, positivo ou negativo como ele (ibid, 352).<sup>24</sup>

#### O Sistema Decimal mudou a Problemática?

Houve mudanças imediatas a partir de 1800, ou seja, desde a Revolução Francesa, com a modernização do ensino e com a reforma decimal e métrica das medidas?

Mesmo o manual de Aritmética de Lacroix - um propagador da modernidade - o qual eu consultei na edição de 1808, mostra uma ambigüidade frente à introdução das medidas métricas desde a Revolução. De um lado, Lacroix afirma a importância da uniformidade das medidas e empreende revelar como transformar as medidas antigas ou estrangeiras em medidas métricas ou decimais:

A uniformidade das medidas era desde há muito objeto de desejo de todos os sábios, no momento em que se estabeleceu na França o sistema decimal, que eu expus mais acima; mas esse sistema não sendo ainda adotado pelas nações estrangeiras, e substituindo a um velho sistema pelo qual se exprimem muito dos resultados numéricos importantes, tem-se freqüentemente necessidade de se comparar com as medidas decimais, sejam as antigas medidas francesas, sejam as medidas estrangeiras (Lacroix 1808, p. 108-109).<sup>25</sup>

Ele menciona que um metro corresponde a “3 pieds 0 pouces 11 lignes,296” e que, assim, o fator para converter metros em *toises* é 1,94904 (ibid., p. 109-110). Por exemplo, um número “complexo” como “13 toises 5 pieds 3 pouces 8 lignes” se converte num número decimal 27,06101 metros (ibid., 111).

De um outro lado, revela-se que o problema da dimensão do produto entre duas grandezas persiste: Lacroix continua praticamente a postular que a dimensão do

<sup>24</sup> “Le premier principe, le principe fondamental de toute multiplication, est donc que le multiplicande peut être absolu, positif ou négatif, mais que le multiplicateur est nécessairement absolu, et que le produit étant le multiplicande répété, lui est homogène, c'est à dire: est absolu, positif ou négatif comme lui” (ibid., 352).

<sup>25</sup> “L'uniformité des mesures était depuis longtemps l'objet des vœux de tous les savans, lorsqu'on a établi en France le système décimal, que j'ai exposé plus haut; mais ce système n'étant pas encore adopté par les nations étrangères, et succédant à un ancien système par lequel on a exprimé beaucoup de résultats numériques importants, on a souvent besoin de comparer avec les mesures décimales, soit les anciennes mesures françaises, soit les mesures étrangères” (Lacroix 1808, p. 108-109).

multiplicador não afeta a dimensão do produto e que esta só depende do multiplicando: “Vê-se que o produto não depende da espécie de unidades do multiplicador mas que é daquelas do multiplicando, e que o multiplicador deve ser considerado como um número abstrato” (*ibid.*, 82).<sup>26</sup>

Não houve uma justificativa para esta afirmação de que é visível que se deve tratar o multiplicador como um número abstrato, só teve a motivação que multiplicar significa repetir o multiplicando tantas vezes “que tem coisas independentemente da natureza destas coisas” (*ibid.*).<sup>27</sup>

Lacroix evitou inverter explicitamente a ordem da multiplicação e não se manifestou sobre a comutatividade ou não-comutatividade no produto. Parece que Lacroix achava ter eliminado o problema: baseado no sistema decimal, ficava claro que os valores numéricos do produto eram independentes da ordem; e, segundo Lacroix, o enunciado do problema determinava qual fator constituía o multiplicador e o multiplicando.

Mas, assim, mostra-se a deficiência desta abordagem: fora do contexto de aplicação, não fica definido o produto entre duas grandezas. Esta deficiência revela-se imediatamente como sinal de que o problema da dimensão - ou da unidade - permanece como não resolvido mesmo depois da introdução do sistema decimal: no parágrafo seguinte da multiplicação, sobre a divisão, Lacroix divide duas grandezas de mesma unidade, e o resultado não é um número abstrato, mas uma grandeza de outra dimensão:

“Eis uma segunda divisão em que o dividendo e o divisor são ambos de mesma natureza, e onde quociente é de uma natureza diferente”:  
Lacroix dividiu um preço por um outro preço e recebeu um peso:  
„O quociente [...] será quilogramas e subdivisões dessa espécie de unidade“ (*ibid.*, 85).<sup>28</sup>

<sup>26</sup> “L’uniformité des mesures était depuis longtemps l’objet des vœux de tous les savans, lorsqu’on a établi em France le système décimal, que j’ai exposé plus haut; mais ce système n’étant pas encore adopté par les nations étrangères, et succédant à un ancien système par lequel on a exprimé beaucoup de résultats numériques importants, on a souvent besoin de comparer avec les mesures décimales, soit les anciennes mesures françaises, soit les mesures étrangères” (Lacroix 1808, p. 108-109).

<sup>27</sup> Lacroix tentou escamotear com a palavra “coisas” (choses) o problema conceitual não resolvido da diferença entre números e grandezas.

Uma abordagem para modelar o cálculo com grandezas por conceitos da álgebra multilinear e, em particular, por espaços vetoriais, por espaços duais deles e por produtos tensoriais, foi explicada por Damerow (Damerow 1979), elaborando avisos por Freudenthal (Freudenthal 1973).

<sup>28</sup> “Voici une seconde division dans laquelle le dividende et le diviseur sont tous deux de même nature, et où le quotient est d’une nature différente”:

Lacroix dividiu um preço por um outro preço e recebeu um peso:

Embora Lacroix afirmasse que o cálculo com números decimais substituiu efetivamente as operações fastidiosas com os “nombres complexes” das antigas medidas e, embora se queixasse da “bigarrure” (trapalhada) do cálculo com as subunidades, ele não só reclama a necessidade de apresentar estes “anciens calculs” a fim de facilitar percebê-los e de preparar para operar com medidas estrangeiras (não-decimais), mas ele revela um prazer notório de manipular com grandezas “complexas” e de multiplicá-las e de dividi-las (ibid., 115 ff.). Com efeito, das 146 páginas de toda a obra, as últimas 32 páginas são dedicadas a este assunto principalmente antiquado.

### **Porque esse problema fica desconhecido?**

Avaliando esse problema maior de definir as operações mais básicas da Matemática, podemos perguntar se existe ainda tal problema na Matemática ou no ensino. Evidentemente, em ambas áreas, não se trata mais de um problema fundamental. Por que não mais?

Entretanto, aconteceu uma “revolução” na Matemática, aproximadamente no começo do século XIX: a revolução que mudou principalmente a relação entre a Álgebra e a Geometria, transformou a Álgebra na disciplina de base e degradou a Geometria, fazendo dela uma disciplina aplicada da Álgebra. Um elemento importante dessa transformação é que a grandeza não mais constitui o conceito básico e geral que compreende toda a Matemática – e que é, em particular, ao mesmo tempo, conceito básico da Álgebra e da Geometria: os conceitos de número e de grandeza foram separados. Os números agora são básicos e as grandezas são noções aplicadas, derivadas.

A multiplicação é agora definida geralmente para números, na Álgebra. Quanto ao ensino, a aprendizagem começa também com os números e não mais com grandezas, que são basicamente relegadas ao ensino profissional, desenvolvido mais tarde. A multiplicação é introduzida no ensino fundamental para números e não apresenta obstáculos. Podem acontecer dificuldades quando se trata de grandezas, sem esclarecê-las bem; assim seriam “obstáculos didactogênicos”.

Esse problema histórico mostra que a relação entre o ensino e a história é muito

---

“le quotient [...] sera des kilogrammes et des sub-divisions de cette espèce d’unités” (ibid., 85).

mais indireta que direta; não se pode utilizar a história para um “prognóstico” dos erros dos alunos, mas a história apresenta um metassaber sobre a Matemática, que constitui uma fonte de reflexão importante para o professor.

## **Bibliografia**

ARCHIVES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, Paris: Papiers d'André-Marie .

AMPÈRE. Cart. 1, Chap. 1, chem. 3: **Précis élémentaire d'arithmétique** (Manuscrito).

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. Trad. Estela dos Santos Abreu (Rio de Janeiro: Contraponto, 1996).

BEDNARZ, N., GARNIER, C. (eds.), **Construction des savoirs: Obstacles et conflits** (Québec: CIRADE, 1989).

BÉZOUT, E., **Cours de Mathématiques, à l'usage de corps de l'Artillerie. Tome premier: Contenant l'Arithmétique, la Géométrie et la Trigonometrie rectiligne**. Nouvelle édition par Guillard (Paris: Richard, Caille et Ravier, an VIII) [1800].

BOTTAZZINI, U., "Editor's Introduction", A.-L. **Cauchy. Cours d'analyse de l'École Royale polytechnique. Première partie: analyse algébrique**", ed. Umberto Bottazzini (Bologna: CLUEB, 1992), IX-CLXVII.

BROUSSEAU, G., "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques", **Recherches en didactique des mathématiques**, 1983, 4: 164-198.

BROUSSEAU, G., **Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques**, 1970 - 1990; ed. and translated by Nicolas Balacheff et al.. (Dordrecht: Kluwer, 1997).

BROUSSEAU, G., **Théorie des situations didactiques**. Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balacheff et al. (Grenoble: La Pensée Sauvage, 1998) [Versão francesa do Brousseau 1997].

CASTILLON, J., "Examen philosophique de quelques principes de l'Algèbre", **Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin pour 1790 et 1791**. Premier mémoire: 331-341. Second mémoire: 342-363.

DAMEROW, P., "Zur Rehabilitierung des Rechnens mit benannten Zahlen", **mathematica didactica**, 1979, 2: 83-92.

FREUDENTHAL, H., **Mathematics as an Educational Task** (Dordrecht: Reidel, 1973).

GLAESER, G., "Épistémologie des nombres relatifs", em: **Recherches en didactique des mathématiques**, vol. 3, 1981, 303-346.

GLAESER, G. "À propos des obstacles épistémologiques. Réponse à Guy Brousseau", **Recherches en didactique des mathématiques**, 1984, 5: 227-233.

GONÇALVES, C. H. B., **Os livros aritméticos do Euclides**. Tese de doutorado, PGEM-UNESP, Rio Claro, 1998 .

HOFMANN, J. R., **André-Marie Ampère** (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996).

LACROIX S., **Traité élémentaire d'arithmétique**, à l'usage de l'École Centrale des Quatre-Nations. Huitième édition (Paris 1808).

MIGUEL, A. "As potencialidades pedagógicas da história da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores", em: **Zetetiké**, vol. 5, num. 8, 1997, 73-105.

PIAGET, J., Garcia R., **Psychogenesis and History of Science** (New York: Columbia Univ. Press, 1989).

PINTO, N. B., **O erro como estratégia didática. Estudo do erro no ensino da Matemática elementar** (Campinas, SP: Papyrus editora, 2000).

REICH, H. B. K.: "Der doppelte Auftakt zur frühneuzeitlichen Algebra: Viète und Descartes", em: Erhard Scholz, **Geschichte der Algebra** (Mannheim: Bibliographisches Institut, 1990)

SALIMBENI, L. "Intorno alla Moltiplicazione ed alla Divisione Algebraiche", **Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana**, Tomo VII (Verona: D. Ramanzini, 1794), 482-507).

SCHUBRING, G., **Analysis of Historical Textbooks in Mathematics**. Lecture Notes, PUC do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática. Second edition 1999.

SIERPINSKA, A., **Understanding in Mathematics** (London: Falmer, 1994).

TROPFKE, J., **Geschichte der Elementarmathematik**. 4. Auflage. Band 1, Arithmetik und Algebra. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke (Berlin: Gruyter, 1980).