ISBN 978-85-89082-23-5

A Demonstração Matemática da Perspectiva da Lógica Matemática[1]

Jairo José da Silva[2]

Resumo

Este artigo trata da demonstração em matemática, enfatizando três de seus aspectos, o retórico, o lógico-epistemológico e o heurístico. Isto é, a demonstração matemática é considerada aqui como simultaneamente uma peça de retórica destinada a convencer, como um encadeamento lógico conduzindo à verdade e ao conhecimento e como um possível catalisador de descoberta matemática. Argumenta-se que apesar dessa diversidade de aspectos, considerada como um objeto matemático ela própria, a demonstração matemática é tratável apenas em seu aspecto lógico. Argumenta-se ainda que a finitude, usualmente considerada como um caráter essencial das demonstrações, pertence apenas a seu aspecto retórico, sendo meramente acidental do ponto de vista estritamente lógico.

Abstract

This paper deals with the notion of mathematical proof. A proof is considered here in three different aspects, the rhetorical, the logical-epistemological and the heuristic, or, in other words, as a piece of rhetoric aimed at convincing, as a logical chain aimed at truth and knowledge and as a possible catalyst of mathematical discovery. I argue here that despite of this diversity of aspects, a proof as a mathematical object itself, can only be considered in its logical aspect. I also argue that finiteness, which is usually viewed as an essential feature of mathematical proofs, belongs only to their rhetorical aspect, being only an accident from a strictly logical perspective.

Uma demonstração (ou, como alguns preferem, prova) matemática tem várias finalidades. Em primeiro lugar, compete-lhe estabelecer a *veracidade* relativa de um enunciado (a *tese* da demonstração). A veracidade da tese depende, claro, da veracidade dos enunciados pressupostos na demonstração, esta é suficiente para aquela. Em segundo lugar, uma demonstração deve *convencer-nos* da veracidade da tese que demonstra, desde que aceitemos os pressupostos dos quais essa demonstração depende.

Esses dois aspectos, apesar de relacionados, são independentes entre si. Em princípio é possível que uma demonstração desempenhe uma, mas não ambas as funções. Uma prova que efetivamente revela as conexões lógicas que sustentam a veracidade de um enunciado pode não induzir à convicção (talvez por ser tão longa que nenhum ser humano possa acompanhá-la, por exemplo, uma demonstração com 10^{23} passos). Por outro lado, é possível que sejamos convencidos por uma demonstração que não estabelece de modo definitivo a verdade que propõe estabelecer, talvez porque não seja logicamente correta, e não nos

---

[1] Digitalizado por Lucieli M. Trivizoli e Marco A. Escher.

[2] Professor da Pós-Graduação em Educação Matemática e do Departamento de Matemática, IGCE, UNESP – Rio Claro/SP.

apercebamos disso, ou dependa de pressupostos injustificados, aos quais assentamos acriticamente. A história da Matemática apresenta alguns exemplos de ambas as situações. A rigor, podemos fazer a seguinte distinção. Por um lado, uma demonstração é uma entidade objetivamente existente no espaço lógico, digamos assim. Vistas assim, demonstrações têm uma existência matemática ideal, independentemente de serem conhecidas, ou, sequer, passíveis de serem conhecidas, por agentes reais. Por outro, uma demonstração é algo capaz de induzir a uma vivência subjetiva indutora de convicção em um agente matemático real. Uma demonstração ideal pode, em princípio, ser experimentada como, ou induzir a uma vivência de convicção e, reciprocamente, uma experiência vivida de convencimento pode ser convincente exatamente por possibilitar a apreensão de relações lógicas ideais. Mas esse dois aspectos não precisam necessariamente coincidir. Chamarei de *lógico-epistemógico* esse aspecto das demonstrações que as mostra como objetos lógicos ideais, árvores ou seqüências ordenadas no espaço lógico, segundo relações de dependência, ou conseqüência, lógica. E de *retórico* o aspecto das demonstrações, segundo o qual, elas aparecem como portadoras de força coercitiva de aquiescência às teses demonstradas.

Há ainda um outro aspecto a ser considerado. Demonstrações podem ter também uma função *heurística*. Isto é, elas podem ser indutoras de descoberta matemática. Evidentemente, eu estou pensando no papel que as demonstrações podem desempenhar, segundo a perspectiva da epistemologia falibilista popperiana, representada em Filosofia da Matemática pela dialética de provas e refutações, de Imre Lakatos.

Ainda que independentes entre si, os aspectos lógico e retórico das demonstrações podem conviver em harmonia. Já o aspecto heurístico, como mostra a análise de Lakatos, depende essencialmente da incorreção lógica da demonstração. Apenas quando abre o flanco a contra-exemplos, uma demonstração pode induzir ao progresso matemático. Em suma, uma demonstração não é uma demonstração propriamente dita, do aspecto lógico-epistemológico; se não for logicamente impecável, ela pode desempenhar sua função retórica, mesmo se for logicamente falha, mas não tem certamente, ou assim parece, nenhum papel heurístico, a menos que seja logicamente imperfeita.

Isso quer dizer que não se pode, coerentemente, exigir que uma mesma demonstração desempenhe todos esses papéis. Podemos, entretanto, se quisermos conciliar esses três aspectos de algum modo, recuperar a função heurística de demonstrações logicamente impecáveis, da seguinte forma. Uma demonstração correta do ponto de vista lógico pode constituir-se em desafio epistemológico se sua força racionalmente coercitiva puder induzir, talvez como uma reação de insubmissão do sujeito, a uma “revolta” da imaginação subjetiva, que se disporia a encontrar variantes *interessantes* das noções envolvidas nessa demonstração que pudessem produzir contra-exemplos da tese demonstrada. Ou seja, além de estabelecer a veracidade de uma asserção, uma demonstração pode ser também vista como indutora de progresso, se for simultaneamente vista como um desafio, um edifício lógico a ser demolido pela variação *interessante* do significado dos termos ou conceitos nela envolvidos. Isso pode ser feito simplesmente, como usualmente acontece em Matemática, por generalização. É comum a extensão dos conceitos envolvidos numa demonstração para um contexto mais amplo onde essa demonstração perde validade, mesmo que desempenhe ainda uma função importante na busca de uma nova demonstração da tese generalizada.

Se quisermos que demonstrações carreguem convicção, devemos exigir que, além da correção lógica, elas atendam a restrições impostas pelas limitações cognitivas humanas. Em particular, demonstrações devem ser passíveis de ser apreendidas por um agente humano que, pressupõe-se, cria suas convicções em bases exclusivamente racionais. Não é fácil especificar as condições suficientes para tanto. É mais ou menos consensual, entretanto, que a possibilidade de reunir em um único ato cognitivo todos os passos de uma demonstração é uma delas, talvez a única. Uma conseqüência imediata desse requisito, aparentemente, é que as demonstrações devem ter um número finito de passos.

Por que, exatamente? Uma resposta freqüentemente dada é que uma demonstração é um objeto que alguém oferece a alguém a fim de convencê-lo da verdade de uma asserção, e, diz-se, não se pode dar a ninguém um objeto infinito. Isso parece aceitável à primeira vista, mas talvez só à primeira vista. Um sistema formal, por exemplo, pode conter um número infinito de proposições, sendo, neste sentido, um objeto infinito, mas, mesmo assim, ser finitamente axiomatizável, portanto, finitamente *descrito*, e, conseqüentemente, passível de ser “dado” a não importa quem. Isto é, é possível, às vezes, *descrever* completamente um objeto infinito por meios finitos de modo a singularizá-lo. Assim, mesmo que uma demonstração contenha um número infinito de passos, talvez seja possível descrevê-la finitamente, e, portanto, oferecê-la a alguém com a finalidade de convencê-lo da veracidade da tese demonstrada.

Há, porém, uma objeção. Uma descrição pode ser suficiente para singularizar um objeto, mas singularizá-lo não significa conhecê-lo. Há uma diferença notável entre a apresentação indireta de um objeto por meio de uma descrição e a experiência direta e imediata desse objeto. Uma descrição de uma demonstração não é uma demonstração, mesmo que essa descrição seja suficiente para a reconstrução potencial da demonstração. Para que uma demonstração desempenhe a contento seu papel retórico é imprescindível que possamos *efetivamente* acompanhá-la em cada um de seus passos, é preciso que cada um deles seja *efetivamente* um objeto de consciência. Por isso, parece que, em verdade, nenhuma demonstração infinita pode desempenhar seu papel retórico de modo satisfatório. Isso, claro, se condicionarmos nossa capacidade de sermos convencidos exclusivamente à força do argumento lógico. O ponto central a ser notado é que nossa faculdade de compreensão é necessariamente finita, e não pode haver convencimento sem compreensão, se é de agentes racionais que se trata. Assim, se uma demonstração desempenha efetivamente o seu papel retórico, ela é por necessidade finita.

Parece, somando todos os aspectos que consideramos até aqui, que uma demonstração matematicamente perfeita deve ser logicamente correta, compreensível a um agente racional com limitações cognitivas humanas, e, ainda assim, heuristicamente estimulante. Um delicado equilíbrio de demandas quase inconciliáveis: correção lógica e riqueza heurística acessíveis a um agente severamente limitado em termos cognitivos.

Minha pergunta, agora, é a seguinte: são as demonstrações passíveis de tratamento matemático? Em primeiro lugar, *por que* quereria alguém tratar demonstrações como objetos matemáticos? O primeiro a querer fazê-lo foi Hilbert, e por motivos bem determinados. Uma vez liberada a imaginação matemática do campo dos objetos dados por abstração formalizante, ou, em outras palavras, livre das amarras da intuição, e assim senhora de seus domínios, passíveis agora de serem criados por mera estipulação, a Matemática confronta-se pela primeira vez com a necessidade de mostrar que suas criações obedecem à condição necessária, mas não suficiente, da verdade, a consistência lógica.

Até Hilbert, os matemáticos tinham por dado que suas teorias descreviam domínios de algum modo experimentados. A Aritmética pensava-se, trata de noções abstraídas de nossa experiência com quantidades discretas; a análise, de nossa intuição imediata do contínuo; a Geometria, da forma dos objetos da experiência espacial, e assim por diante. A Matemática era tradicionalmente vista como um corpo de teorias de entidades de algum modo *dadas*.

Hilbert, ao determinar uma extensão do campo matemático para além do dado, trazendo para seu interior também o *imaginável*, determina concomitantemente uma série de novos problemas matemáticos. Se uma Aritmética formal, digamos, pode ser concebida não mais como uma teoria de números dados numa forma de intuição, mas como uma teoria formal de objetos *imagináveis* quaisquer, apenas formalmente análogos aos números – ou, ainda, objetos quaisquer tratáveis formalmente, isto é, apenas no que se refere a sua forma, como números – então cabe a pergunta se um domínio assim concebido *pode* existir. Ou, ainda, se se *pode* efetivamente imaginar um tal domínio, indeterminado quanto ao conteúdo, mas determinado quanto à forma precisamente por essa teoria, formalmente dada e livremente criada. Isso, claro, equivale a perguntar se essa teoria é logicamente consistente, pois a consistência lógica é exatamente a medida do possível.

Numa fórmula simplificadora, se antes de Hilbert competia à Matemática descrever a estrutura formal de domínios dados, compete-lhe depois criar e descrever domínios quaisquer, meramente possíveis e apenas formalmente determinados. Essa inflexão traz consigo novas tarefas, entre elas, a necessidade de garantir o que na Matemática tradicional estava implícito, a possibilidade de existência dos domínios tratados. Assim, Hilbert é naturalmente levado a olhar para as demonstrações como objetos matemáticos.

Há dois modos distintos de se mostrar que uma teoria formal é consistente, indiretamente, oferecendo-lhe uma interpretação, isto é, um preenchimento material por objetos dados, ou diretamente, mostrando-se que não se pode deduzir no contexto dessa teoria uma asserção e sua negação. O primeiro modo traz de volta o recurso à intuição, a uma forma de doação originária. O segundo, favorecido por Hilbert, exatamente por este motivo, poderia em princípio ser implementado por uma análise direta dos recursos lógicos da teoria *sub judice*. Isso equivale a uma análise lógico-matemática das demonstrações no contexto dessa teoria. Assim, demonstrações formais tornam-se

ISBN 978-85-89082-23-5

objeto de tratamento metalógico, ou metamatemático. Essa origem, como veremos, contamina toda a teoria matemática das demonstrações. Em particular, ela obriga que demonstrações sejam primeiramente formalizadas, isto é, modeladas em um sistema formal, antes de serem passíveis de tratamento matemático. Claro que os teoremas de Gödel colocarão sérias restrições ao projeto hilbertiano, mas, uma vez criada, a teoria matemática das demonstrações livra-se dos objetivos muito restritos que Hilbert lhe reservava e se atribui novas, e não menos importantes, tarefas.

Minha pergunta seguinte é *se* demonstrações, como as caracterizamos, com todas a suas funções, lógica, retórica e heurística, podem ser objeto de estudo matemático.

Ao contrário de um preconceito muito difundido entre matemáticos, nem todo domínio de interesse admite um tratamento matemático. E isso não significa necessariamente, de modo algum, uma limitação, talvez apenas temporária, da própria Matemática ou de matemáticos de pouca imaginação ou talento. Há domínios que são essencialmente intratáveis do ponto de vista matemático. Para se entender isso, é necessário se ter claro o que *é* a Matemática. Uma das características fundamentais da Matemática é sua universalidade. O escopo irrestrito da Matemática só é possível porque seu foco de interesse é exclusivamente formal, os domínios objetivos interessam-lhe apenas pela sua forma, não pelo seu conteúdo. Por isso tudo, a rigor, pode ser de interesse matemático, *desde que* seja formalmente interessante. Um domínio é matematicamente tratável na exata medida em que se pode extrair dele uma forma matematicamente tratável. Se abstraímos a natureza dos objetos de um domínio, ou, se quisermos, a sua matéria, resta a sua forma, se é que alguma coisa sobra. É dela que trata a Matemática. (Na Matemática Formal Hilbertiana essa formas são livres criações.) Há, porém, domínios que nos interessam *apenas* pela sua particularidade material; portanto, o tratamento matemático desses domínios não é *interessante*.

Assim, cabe a pergunta: se considerarmos apenas a forma das demonstrações, sobra algo que seja matematicamente interessante? Ou, antes, existe uma forma matemática das demonstrações, considerada como as consideramos aqui? Vejamos.

Relações de implicação lógica entre enunciados dependem exclusivamente de sua forma, não de seu conteúdo; assim, o aspecto lógico das demonstrações é naturalmente apto a ser investigado matematicamente. Podemos considerar demonstrações, para efeito de uma teoria matemática, como seqüências, ou árvores, de

ISBN 978-85-89082-23-5

formas declarativas (formas de enunciados) relacionadas entre si por conseqüência lógica. Ou, ainda, como estruturas determinadas no interior do espaço lógico de um campo de discurso considerado apenas formalmente. Mas esse modo de tratá-las privilegia exclusivamente seu aspecto lógico. Haveria modo de considerá-las também sob seus outros aspectos?

O aspecto heurístico das demonstrações não é, a rigor, um aspecto das demonstrações, se entendermos por isso algo intrínseco a elas. Ao contrário, uma demonstração só pode desempenhar esse papel com a explícita participação do sujeito. Uma demonstração só desempenha sua função heurística se move o sujeito a reagir a ela, aceitando seu desafio. Nada na demonstração em si pode garantir que isso ocorra. Assim, do ponto de vista matemático, as demonstrações não são tratáveis segundo o aspecto heurístico.

O aspecto retórico é outro que depende essencialmente do sujeito. Para desempenhar esse papel, a demonstração deve ser convincente. Ora, se um sujeito qualquer vai, ou não, deixar-se convencer pela retórica da demonstração, depende tanto do sujeito quanto da demonstração. Entretanto, há certas condições *formais* do sujeito (qualquer sujeito) e das demonstrações (qualquer demonstração) que se impõem, como já vimos, como condições *necessárias*, ainda que não suficientes, para que a função retórica se cumpra. Somos, como seres humanos, essencialmente finitos, na extensão de nossas vidas e na capacidade de nossa compreensão. Isso implica que nenhuma demonstração infinita pode ser compreendida, e assim cumprir sua função retórica. E, desde que assumimos que o sujeito é sempre um sujeito racional, cujas convicções são sempre racionalmente justificadas, uma demonstração não pode desempenhar um papel retórico se não for logicamente correta. Parece, então, que além da correção lógica, a finitude é a única característica das demonstrações consideradas em seu aspecto retórico que pode ser expressa em termos matemáticos.

Um leitor mais atento poderá contestar-nos nesse ponto. Para que uma demonstração cumpra seu papel de convencimento do sujeito, não basta que seja finita, ele poderia dizer, mas é preciso também que não seja muito longa. Afinal, nossa compreensão, vida e memória não são apenas finitas, mas, infelizmente, muito curtas. Não se deveria requerer, portanto, que as demonstrações tivessem comprimento abaixo de um certo limite finito? O problema é que não há como determinar qual deveria ser esse limite, e qualquer decisão nesse sentido seria certamente arbitrária. Todos concordamos, acho, que uma demonstração infinita, a não ser em casos muito particulares, por exemplo, em que certos padrões possam ser identificados, não pode cumprir sua função retórica, mas nunca chegaremos a um acordo sobre o que seria uma demonstração finita "muito longa", considerado o mesmo fim. Um "paradoxo do monte" espreita qualquer decisão: se n é o comprimento máximo admissível de uma demonstração, isto é, se pudermos acompanhar uma demonstração com n passos, certamente poderemos acompanhar uma com n+1 passos. O máximo que podemos fazer aqui é estabelecer um limite inatingível a qualquer demonstração, o primeiro cardinal infinito precisamente.

Assim, do ponto de vista matemático, uma demonstração reduz-se a uma seqüência (ou árvore) finita de proposições logicamente encadeadas. Mas isso não é suficiente para o tratamento matemático das demonstrações. É preciso ainda que os *modos* desse encadeamento sejam conhecidos, e para isso é necessário que as demonstrações sejam confinadas a um determinado espaço lógico. Em outras palavras, é essencial considerá-las no contexto de um sistema dedutivo, ou mais precisamente, um sistema formal determinado, com vocabulário e regras sintáticas conhecidas. Se não for assim, as demonstrações não poderão ser caracterizadas. Teríamos a *idéia* apenas, não o *fato*, de um encadeamento lógico a ser considerado.

Em suma, para fins de tratamento matemático, as demonstrações não são nada além de *cadeias finitas logicamente articuladas de formas declarativas no contexto de um sistema formal determinado*. É assim que a lógica matemática, precisamente o domínio matemático que tem por função esse estudo, as considera. Como muitos elementos subjetivos das demonstrações, em particular, os que se relacionam aos seus aspectos retórico e heurístico, são irremediavelmente perdidos, desde logo admitimos que o estudo matemático das demonstrações não faz justiça a seu *quid*. Ou seja, há algo de essencial na noção de demonstração matemática que se perde na teoria matemática das demonstrações. Talvez essa noção seja, em toda sua complexidade, um tópico mais apto à filosofia, psicologia ou História da Matemática que à própria Matemática. O que a teoria matemática da demonstração, ou teoria da prova, estuda em verdade são apenas cadeias em determinados espaços lógicos (i.e. determinados sistemas formais).

Esse estudo tem, é claro, um interesse óbvio. Em particular, ele pode nos esclarecer sobre o poder dedutivo do sistema em consideração. Hilbert queria exatamente saber se sistemas livremente criados, por exemplo, a Aritmética formal, não tinham esse poder em demasia, a ponto de demonstrar qualquer enunciado, sendo assim inconsistentes. O estudo das demonstrações em um sistema formal pode também enriquecer o conhecimento que temos das proposições aí demonstradas. Nós podemos saber mais a respeito de uma proposição pela análise de sua demonstração. Num certo sentido, uma demonstração de um enunciado revela um aspecto do seu significado. A teoria das demonstrações permite, em particular, um estudo comparativo de sistemas dedutivos; ela pode nos mostrar como transformar sistematicamente as demonstrações de um sistema em demonstrações de outro, explicitando desse modo relações importantes entre os sistemas considerados.

Porém, meu objetivo aqui não é justificar a teoria matemática das demonstrações, mas apenas esclarecer *como*, ou sob que aspectos, essa teoria considera as demonstrações matemáticas reais. Algo que já mencionamos acima, mas que é relevante salientar, é que uma demonstração, do ponto de vista da teoria matemática das demonstrações, só existe no interior de um sistema formal *determinado*, o que em geral não ocorre com as demonstrações "da vida real". E essa é uma limitação séria. Principalmente porque não se pode esperar, como Gödel nos mostrou, que todas as verdades da aritmética, para não falar das verdades de toda a matemática, sejam demonstráveis em um sistema formal que obedeça a restrições bastante sensatas, como, por exemplo, a decidibilidade de seus axiomas.

Pode-se dizer que, da perspectiva da teoria das demonstrações, uma demonstração não é aquilo que os matemáticos entendem como tal, mas uma imagem ideal disso. Ou, ainda, a demonstração real levada ao paroxismo da exatidão e do detalhe, exposta em completa nudez, cada junta à mostra, oferecida à curiosidade do teórico a fim de que ele possa escrutiná-la, avaliar sua complexidade, reduzi-la a formas normais, e outras "perversidades" do gênero. E assim tentar entender algo mais sobre aquilo que ela prova ou o contexto em que isso é provado.

Parece-me, entretanto, que essa teoria tem um defeito básico, a saber, uma mistura indesejável de elementos objetivos e subjetivos. Explico-me. Como vimos, para a teoria lógica, as demonstrações são entidades objetivamente existentes no espaço lógico de um sistema formal determinado, ou, mais precisamente, estruturas ordenadas existentes em si de proposições logicamente encadeadas. Não há aí espaço para um sujeito. Mas, simultaneamente, a noção formal de demonstração tenta manter um pobre resquício da presença do sujeito que, imagina-se, deve ser convencido por elas. Não muito, apenas uma pré-condição formal da função retórica das demonstrações, a finitude. Nada mais de subjetivo pode ser encontrado nessa noção. Não seria, pergunto, essa restrição um empecilho para a compreensão das relações lógicas objetivas entre proposições de um sistema formal? Por que não separar definitivamente o objetivo do subjetivo, relegando à teoria matemática das demonstrações simplesmente o papel de estudar relações de dependência lógica em seu escopo mais geral, considerando demonstrações de qualquer comprimento, e a finitude ao estudo, certamente não matemático, das demonstrações em seu papel retórico?

Mas, se meu papel aqui não era expor a teoria das demonstrações, muito menos seria o de criticá-la. Cabia-me dizer só como as demonstrações podem interessar à lógica matemática, em que sentido demonstrações podem ser objetos matemáticos. A resposta foi dada acima, suficientemente espero para suscitar algum debate.