ISBN 978-85-89082-23-5

O Método Axiomático (uma abordagem intuitiva)[1]

Wilson Pereira de Jesus [2]

À colega Maria José Araújo
e ao Professor Mario Tourasse Teixeira
in memoriam

Resumo
O presente trabalho é fruto de reflexões acerca do aspecto formal da Matemática, buscando de forma bem intuitiva dispor da liberdade inerente ao rigor próprio de uma abordagem axiomática, na construção e manipulação de modelos.

Abstract
This study is the fruit of reflections on the formal aspect of mathematics, seeking in a very intuitive way to make use of the freedom that is inherent in the rigor of an axiomatic approach, in both the construction and manipulation of mathematic models.

O presente trabalho, fruto de reflexões acerca do aspecto formal da Matemática, busca de forma bem intuitiva dispor da liberdade inerente ao rigor próprio de uma abordagem axiomática na construção e manipulação de modelos. A Geometria é a fonte dessas intuições dirigidas ao aprendiz de Matemática. Há uma abordagem igualmente rigorosa, tomando a Aritmética como fonte para modelos de sistemas axiomáticos. Infelizmente, por motivo de concisão, mencionaremos aqui modelos aritméticos só *en passant*. O professor Mario Tourasse Teixeira (1925 -1993) é aqui o autor das idéias originais desenvolvidas.

Tomemos o seguinte conjunto de enunciados acerca de algo chamado *ente* e de algo chamado *qualidade*, e suas relações:

1a - Dadas duas qualidades, existe no máximo um ente que possui. Se A, B são qualidades distintas e c, d entes que as possuem, então c=d;

1b - Dados dois entes, existe no máximo uma qualidade comum a eles.

Definições:

---

[1] Digitalizado por Flávia Sueli Fabiani Marcatto, Rosana Maria Mendes e Sandra Aparecida Oriani Fassio.
[2] Professor da UEFS/BA.

Duas qualidades A e B são separadas se não existe um ente que as possui.

Dois entes a e b são estranhos entre si, se não têm uma qualidade em comum.

2a – Dada uma qualidade e um ente que não a possui, esse ente tem uma, e apenas uma, qualidade separada da primeira.

2b – Dado um ente e uma qualidade que ele não tem, existe um e apenas um ente que possui essa qualidade e é estranho ao primeiro.

3a – Todo ente tem pelo menos duas qualidades.

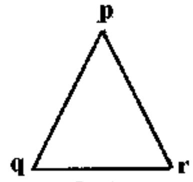
3b – Toda qualidade é possuída por pelo menos dois entes.

Apesar de extremamente simples, o conjunto de enunciados acima, juntamente com as definições, nos possibilitará algumas reflexões. A diferença entre os enunciados 1a e 1b consiste basicamente em reescrevermos o primeiro trocando os termos *ente* por *qualidade*, e vice-versa. É o que acontece com as definições e os enunciados 2a e 2b, 3a e 3b. Daí dizermos que cada enunciado possui um dual. E as conseqüências de tal conjunto também terão seus duais. Todos igualmente demonstráveis.

É possível construirmos um esquema que nos possibilite visualizar de modo conciso as relações estabelecidas entre entes e qualidades, pelos enunciados dados acima. Para efeito prático, chamemos o conjunto de enunciados 1a-3b de Δ. Portanto, sempre que nos referirmos a esse conjunto de enunciados com as definições, diremos o conjunto Δ.

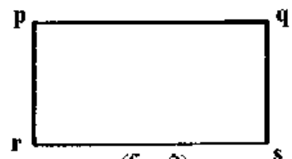
Cabe-nos, então, agora encontrar um esquema que possamos tomar como modelo de Δ. Parafraseando Wilder (1969) imaginemos uma comunidade C, composta por três pessoas, na qual todas pertencem a algum clube, de tal maneira que se p e q são duas pessoas de C, então existe um e só um clube, do qual p e q são ambos membros. Assim, consideremos *qualidade* uma pessoa em C, e *ente*, um clube de C. Portanto, pq, pr e qr são os clubes de C.

Espacializemos essas relações para visualizarmos melhor o esquema.



(fig. 1)

Os enunciados 1a e 1b se verificam, pois cada duas pessoas de C pertencem a um único clube, e dois clubes de C têm apenas uma pessoa em comum. Já os enunciados 2a e 2b não se verificam, pois não há clubes estranhos nem pessoas separadas em C. Porém, 3a e 3b se verificam, pois cada clube de C tem duas

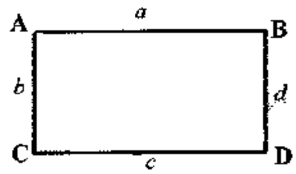


(fig. 2)

pessoas, e toda pessoa está em pelo menos dois clubes. Possivelmente, para existirem pessoas separadas e clubes estranhos em C, teríamos de possuir uma quarta pessoa na Comunidade. Assim, se verificariam todos os enunciados 1a-3b de Δ.

Acreditamos ser este o modelo mais simples que verifica o conjunto Δ. Possivelmente, qualquer conjunto de quatro objetos, mais quatro subconjuntos constituídos por quatro dos pares desses objetos, dispostos convenientemente de modo a satisfazer aos enunciados de Δ, será um modelo de Δ. Buscando construir um outro modelo, porém dessa vez com apelo mais incisivo à Geometria Plana, consideremos ponto como sendo *qualidade* e linhas, interligando dois desses pontos como sendo *ente*. Ou seja, um quadrilátero qualquer, cujos vértices chamaremos de *qualidades*, e os lados de *entes*.

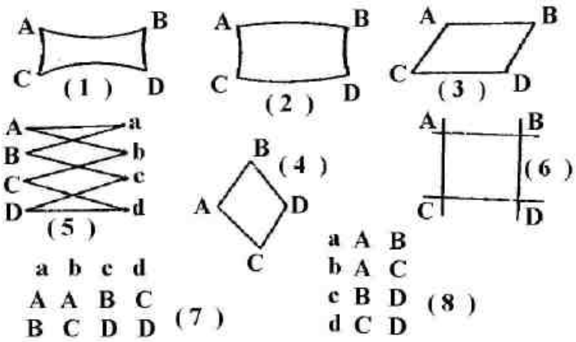
Os enunciados 1a e 1b têm verificação imediata, segundo o esquema dado, pois cada dois pontos é ligado apenas por uma linha e cada duas linhas tem apenas um ponto comum.



(fig. 3)

Segundo a definição, A e D são pontos separados. O mesmo ocorre com B e C; nessa geometria eles não determinam linhas. Quanto às linhas *a* e *c*, *b* e *d*, são, segundo a definição, estranhas entre si (digamos, *paralelas*). Não há pontos comuns a esses dois pares de linhas paralelas.

Os enunciados 2a e 2b também se verificam, pois dado um ponto e uma linha que não o contenha, essa linha tem um e apenas um ponto separado do primeiro. Se não, vejamos. Seja a linha *a* composta pelos pontos A e B, e o ponto C que não está na linha *a*. Esta linha tem apenas um ponto separado do ponto C, que é o B. Tivéssemos tomado o ponto D fora de *a*, e o ponto separado de D e pertencente a *a*, seria A. O enunciado 2b garante a existência de linhas estranhas entre si (paralelas), pois dada uma linha e um ponto que não lhe pertence, existe uma e apenas uma linha que contém esse ponto e é paralela à primeira. É o que ocorre às linhas *a* e *c*, *b* e *d*.



(fig. 4)

Os enunciados 3a e 3b se verificam claramente, pois, no modelo, todo ponto pertence a pelo menos duas retas, e toda reta tem pelo menos dois pontos.

Os esquemas que representam as relações entre os enunciados de Δ poderão ser outros. A título de ilustração, damos alguns a seguir. Na (fig. 4) eles diferem tão somente na forma. Mas no conteúdo são todos modelos de Δ. São, portanto, isomorfos.

Os esquemas (5), (7) e (8) são interessantes por não terem o apelo geométrico dos demais. Todos esses esquemas têm o objetivo de mostrar que a escolha do modelo que satisfaça a um conjunto de enunciados depende tão somente dos objetivos de quem esteja lidando com o referido conjunto.

É possível fazer derivar enunciados de Δ e prová-los a partir do que o conjunto Δ estabelece. Por exemplo:

- Existem no mínimo quatro qualidades.
- Existem no mínimo quatro entes.
- Existe uma qualidade e um ente não relacionados.

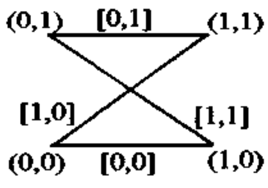
Já que construímos um modelo com apelo à Geometria Plana, poderemos ir adiante nessa direção e construir um modelo com as seguintes interpretações.

Seja um corpo K, onde qualidade (ponto) é elemento de K^2: (*a*,*b*,*0*) que abreviamos para (*a*, *b*); e ente (reta) é elemento de K^2: [*a*,*b*,*1*] que abreviamos para (*a*,*b*). E dizemos que o ponto (*x*,*y*) está na reta [*a*,*b*] se e só se $y = ax + b$.

Consideremos um corpo particular K = {0, 1} e as retas e as respectivas equações abaixo:

Correspondem ao modelo seguinte, cujos pares: (0,0); (0,1); (1,0); (1,1) são elementos de K^2.

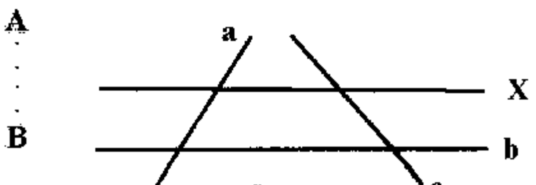
(fig. 5)



[0,0] $y = 0x + 0$; [1,0] $y = 1x + 0$

[0,1] $y = 0x + 1$; [1,1] $y = 1x + 1$

Este modelo satisfaz ao conjunto de enunciados A, dado no início do estudo. Aqui as qualidades são os pontos (a,b) e os entes as retas determinadas por dois pares desses pontos que satisfazem às equações dadas anteriormente.



(fig. 6)

Agora, seja K o conjunto dos

ISBN 978-85-89082-23-5

números reais, consideremos ponto um elemento de $\mathbf{R}^2$ e reta um elemento de $\mathbf{R}^2$. Um modelo que satisfaz ao conjunto A é o piano euclidiano, no qual todas as retas perpendiculares ao eixo dos *x* são eliminadas, ou seja, existem os pontos, mas não existem tais retas ligando esses pontos.

Vejamos, pois o modelo de A no $\mathbf{R}^2$, cuja existência de pontos separados é definida como sendo uma relação de equivalência, na qual:

A $\equiv$ B se A = B ou A *separado* de B.

Portanto, para cada dois pontos não incidindo numa mesma reta, isto é, separados, existe uma, e apenas uma, classe de equivalência que os contém. Neste modelo, todas as retas que satisfazem à equação x = c não existem.

Tomemos agora o nosso primeiro conjunto de enunciados duais (A), e tentemos precisar se é possível, em vez de duas, três qualidades determinarem um ente; e busquemos para esse conjunto um modelo conveniente. Modifiquemos então os enunciados de Δ.

1a - Dadas três qualidades, existe no máximo um ente que as tem. Se A, B, C são qualidades distintas, e a, b, c entes que as possuem, então a = b = c.

1b - Dados três entes, existe no máximo uma qualidade comum a eles.

Definições: A e B são qualidades separadas, se não existe um ente que as tem.

a e b são entes estranhos entre si, se não tem uma qualidade em comum.

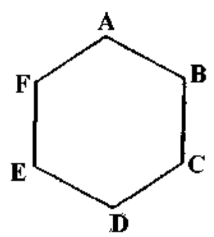
2a - Dada uma qualidade, e um ente que não a tem, esse ente possui uma e apenas uma qualidade separada da primeira.

2b - Dado um ente e uma qualidade que ele não tem, existe um e apenas um ente que possui essa qualidade e é estranho ao primeiro.

3a - Todo ente tem pelo menos três qualidades.

3b - Toda qualidade é possuída por pelo menos três entes.

Esse é um modelo onde cada ponto é uma qualidade, e cada segmento interligando três pontos sucessivos é um ente. Ou seja, um conjunto de seis objetos mais seis subconjuntos de três desses objetos tomados de um modo conveniente. Desse modo, os entes (as retas) no modelo da fig. 7 são: {A,B,C}; {B,C,D}; {C,D,E}; {D,E,F}; {E,F,A}; {F,A,B} as qualidades separadas: A e D, B e E, C e F. Os entes estranhos entre si: ABC e DEF, BCD e EFA,



(fig. 7)

ISBN 978-85-89082-23-5

CDE e FAB. Os demais detalhes do modelo são facilmente verificados.

Façamos um pequeno ajuste nos enunciados e teremos um outro modelo. Dessa vez, não os lados e vértices de um hexágono regular, mas de um octógono, serão o nosso modelo. Assim ficaria o conjunto de enunciados:

1a - Dadas quatro qualidades, existe no máximo um ente que as tem. Se A, B, C, D são qualidades distintas e a, b, c, d entes que as possuem, então a = b = c = d.

1b - Dados quatro entes, existe no máximo uma qualidade comum a eles.

Definições: A e B são qualidades separadas, se não existe um ente que as tem.

a e b são entes estranhos entre si, se não têm uma qualidade em comum.

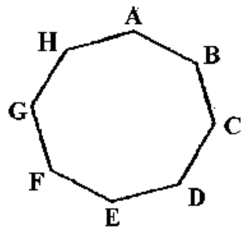
2a - Dada uma qualidade e um ente que não a tem, esse ente tem uma e apenas uma qualidade separada da primeira.

2b - Dado um ente e uma qualidade que ele não tem, existe um e apenas um ente que possui essa qualidade e é estranho ao primeiro.

3a - Todo ente tem pelo menos quatro qualidades.

3b - Toda qualidade é possuída por pelo menos quatro entes.

A fig. 8, octogonal, é um modelo que satisfaz ao conjunto de enunciados. É um "octógono", ou seja, um conjunto de oito objetos, com oito dos seus subconjuntos de quatro elementos tomados convenientemente, de modo a verificar o conjunto de enunciados.



(fig. 8)

Acreditamos que, seguindo nessa seqüência de modificações no conjunto de enunciados, obteremos outras conclusões. No momento, basta-nos enunciar que tais modelos são muito sugestivos, não só pela sua simplicidade, como também pela sua coerência. No modelo da fig. 8, os entes (as retas) são os seguintes conjuntos de qualidades (pontos): {A,B,C,D}; {B,C,D,E}; {C,D,E,F}; {D,E,F,G}; {E,F,G,H}; {F,G,H,A}; {G,H,A,B}; {H,A,B,C}.

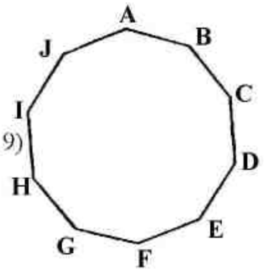
Outros aspectos que o modelo contém, tais como qualidades separadas e entes estranhos, são perceptíveis sem que seja necessária aprofundada análise. Tomemos agora urn modelo em que os entes têm 5 qualidades, isto é, cada reta possui 5 pontos.

Agora o nosso modelo, urn decágono regular, possui os seguintes entes com cinco qualidades: {A,B,C,D,E}; {B,C,D,E,F}; {C,D,E,F,G}; {D,E,F,G,H};

ISBN 978-85-89082-23-5

{E,F,G,H,I}; {F,G,H,I,J}; {G,H,I,J,A}; {H,I,J,A,B}; {I, J,A,B,C}; {J,A,B,C,D}.

O interessante nesses modelos é que há uma regularidade neles que nos permite nos aventurar em algumas conjecturas. Quem sabe, talvez cheguemos a algumas conclusões. Por exemplo, acerca da identidade entre número de entes e qualidades, a questão da dualidade, a existência sempre de não mais de uma qualidade separada de cada ente, e mesmo o fato de dois entes estranhos preencherem todo o espaço do modelo. Diante de tais fatos, pensamos ser possível seguir em várias direções, tomando-os como ponto de partida.



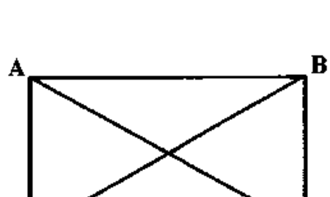
(fig. 9)

Tentemos ir agora urn pouco além dos nossos modelos, e do que numa primeira visualização deles nos foi mostrado. Admitamos que a extrema simplicidade dos conjuntos de enunciados, com os respectivos modelos, não tenha deixado satisfeito a urn leitor engenhoso, e este não gostara da existência de entes estranhos ou qualidades separadas. E resolvera o suposto leitor acrescentar novos entes aos conjuntos de enunciados. Para isso, considerou duas qualidades A e B, e definiu para elas a seguinte relação de equivalência:

A $\equiv$ B se A = B ou A *separado* de B,

e para cada uma das classes de equivalência distintas acrescentara urn ente distinto. Desse modo, o conjunto de enunciados Δ sofre uma pequena modificação, pois deixamos de ter em Δ qualidades separadas. Por isso, na (fig. 3) são acrescentados dois novos entes, devido à supressão das duas classes de equivalência, - A $\mathcal{R}$D e B $\mathcal{R}$C - e também, com isso, os enunciados de Δ já não serão mais verdadeiros acerca do nosso modelo, e nem este será mais modelo daqueles.

Construamos, pois, o nosso novo modelo. Aqui perde-se a dualidade. Temos quatro qualidades e seis entes. E o seguinte conjunto de enunciados é o novo conjunto referente ao modelo da (fig. 10):



(fig. 10)

1. Todo ente é determinado por duas qualidades.

2. Existem no mínimo duas qualidades.

Definição 1: se uma qualidade A é possuída por urn ente *a*, então dizemos variavelmente que *a* contém A, A está em *a,* ou *a* é urn ente contendo A.

3. Se A e B são qualidades distintas, então existe urn, e só urn ente, com essas qualidades.

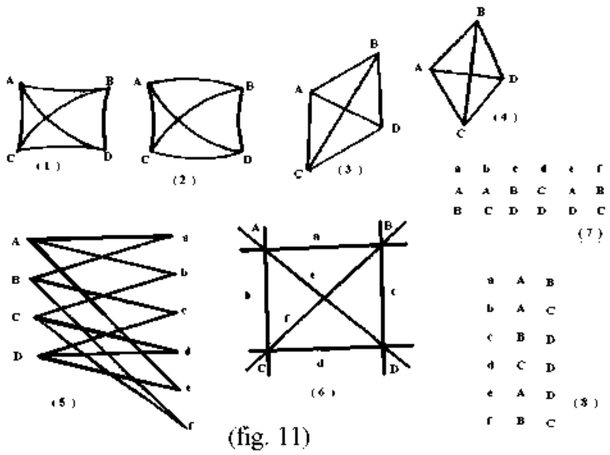
4. Se *a* é urn ente, então existe uma qualidade que *a* não possui.

Definição 2. Dois entes a_1 e a_2, são chamados estranhos, se não existe uma qualidade a qual esteja em a_1 e a_2 (podemos chamar a_1 estranho a a_2 ou vice-versa).

5. Se *a* é urn ente, e A uma qualidade não de *a,* então existe urn e só urn ente estranho a *a,* e possuidor dessa qualidade.

Os demais esquemas ou modelos apresentados na (fig.4) sofrem as seguintes modificações, agora apresentadas na (fig. 14), devidas ao acréscimo de dois entes.

Admitamos ainda que o nosso leitor resolvera a respeito de entes e qualidades que, assim como não havia mais qualidades separadas, não deveria haver entes estranhos entre si. Para isso, considerou entes estranhos entre si como formando classes de equivalência assim definidas:



(fig. 11)

a = b se a = b ou a estranho a b

Na fig. 10, temos os entes AB e CD estranhos entre si; idem para os entes AC e BD e para os entes AD e CB. Temos, portanto, três classes de equivalência. O nosso suposto leitor resolvera acrescentar uma nova qualidade para cada classe de equivalência, e um ente, tendo assim obtido modificações interessantes. Dessas modificações, decorre o seguinte modelo (fig. 12) cujos enunciados que o sustentam são dados logo a seguir. Aqui, a dualidade é recuperada. Esses enunciados estão conforme (Eves, 1969) com ligeiras modificações:

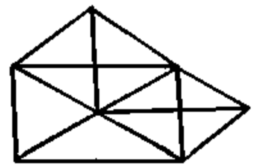
1. Existe pelo menos um ente.

2. Há exatamente três qualidades em cada ente.

3. Nem todas as qualidades são possuídas por um mesmo ente.

4. Há exatamente um ente contendo duas qualidades distintas quaisquer.

5. Há pelo menos uma qualidade comum a dois entes quaisquer.



(fig. 12)

A fig. 12 constitui-se, pois, num modelo para a Geometria Projetiva de sete pontos. Os seguintes modelos (fig. 13, 14 e 15) são equivalentes ao da (fig. 12). Na fig. 14, os números de 1, ..., 7 na linha superior representam as qualidades, e as colunas, os entes que as contêm. Quanto ao diagrama da fig. 15, é análogo ao da fig. 14.

(fig. 13)

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
4	5	6	7	1	2	3

(fig. 14)

a	b	c	d	e	f	g
b	c	d	e	f	g	a
d	e	f	g	a	b	c

(fig. 15)

Um estudo sistemático das geometrias finitas requer uma grande incursão na álgebra abstrata e, portanto, está longe dos limites deste trabalho. Contudo, as geometrias finitas proporcionam a base adicional da natureza hipotético-dedutiva de boa parte do estudo geométrico atual (Eves, 1969).

Consideremos o seguinte conjunto de enunciados duais abaixo:

Seja $n \geq 2$

I. Por n pontos não passa mais de uma reta.

Em n retas não incide mais de um ponto.

II. Dado um ponto fora de uma reta, passa uma, e apenas, uma reta que não encontra a primeira.

Em uma reta fora de um ponto incide um, e apenas, um ponto que não é ligado ao primeiro por uma reta.

III. Existe uma reta e um ponto não incidentes.

IV. Cada reta tem pelo menos n pontos.

Por cada ponto passam pelo menos n retas.

Um modelo para o conjunto de enunciados acima é Z_{2n} o conjunto de pontos (portanto, existem só 2n pontos). Retas são as partes de Z_{2n} do tipo $R_a = \{a, a+1,..., a +$

$(n - 1)\}$; $a \in Z_{2n}$ onde a incidência é a pertinência.

Vejamos se o modelo satisfaz realmente às exigências do conjunto de enunciados.

I. Se n pontos não são consecutivos, não passa nenhuma reta por eles; n pontos consecutivos determinam uma única reta (o conjunto deles) e pontos consecutivos são os de R_a , definidos acima.

Como esse conjunto de enunciados é dual, em n retas não incide mais de um ponto, isto é, em n partes de Z_{2n} , a intersecção é unitária.

II. Dada a reta $\{a, a + 1, ... a + (n – 1)\}$ e b um ponto fora dessa reta, por b passa apenas uma reta $\{a + n, ..., a + n + n – 1\}$ que não encontra a primeira.

Quais são os pares de pontos não ligados por retas? São os pares da forma $(a, a + n)$ com a percorrendo Z_{2n}.

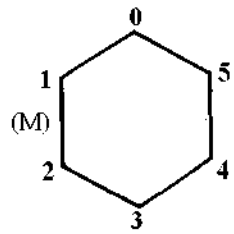
Portanto, se $\{a, a + 1, ... a + (n – 1)\}$ é a reta e b ponto fora dela, b e $b + n$ não são ligados por reta.

III. A verificação de III que é autodual é evidente.

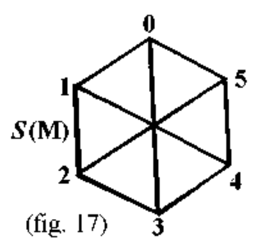
IV. Por cada ponto passam, pelo menos, n retas.

Seja a um ponto. As retas que passariam por a seriam R_{a-1} ,..., $R_{a-(n-1)}$. Para uma maior clareza da generalização dada, poderíamos atribuir valores para n, $n \geq 2$, e verificar a legitimidade do modelo para cada n específico. Considerando que já vimos em exemplos anteriores para retas constituídas por 2, 3, 4 e 5 pontos, que o conjunto Z_{2n} é um modelo do nosso conjunto de enunciados duais, tal verificação é aqui dispensável.

É possível que tal modelo tenha mais propriedades interessantes, as quais não é nossa preocupação no momento perscrutar. Basta-nos apenas aqui considerar que no processo do desenvolvimento e obtenção desse modelo, como dos que o precederam, teve um papel fundamental o nosso gosto pela atividade criadora. Um certo gosto pela aventura em Matemática.



(fig. 16)

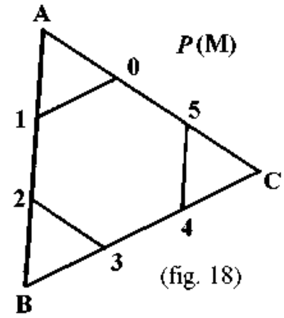


(fig. 17)

Mas prossigamos dando ainda asas a esse nosso gosto pela atividade criadora nessa aventura. Retornemos à fig. 7. O nosso suposto leitor decidira eliminar qualidades separadas e entes estranhos que aparecem nos modelos, satisfazendo aos respectivos conjuntos de enunciados. Para tanto, definiu duas operações sobre o modelo inicial M (fig. 16): (elimina paralelismo), e *S* (elimina separação). Esse modelo inicial tem seis retas, a saber: {0,1,2}; {1,2,3}; {2,3,4}; {3,4,5}; {4,5,0}; {5,0,1}.

Aplicando a M a operação *S*, que elimina os pontos separados (aqueles que não estão ligados por nenhuma reta), M sofre as modificações expressas na fig. 17.

Surgem mais três retas de dois pontos: {0,3}; {1,4}; {2,5}. E o conjunto de enunciados ganha os seguintes novos enunciados, devido à operação *S*(M):



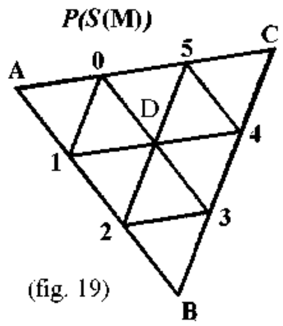
(fig. 18)

(1) por dois pontos passa uma reta

(2) por cada ponto passam quatro retas (não dual)

(3) por um ponto fora de uma reta passa uma, e apenas uma, paralela a essa reta (não vale o dual).

Para obtermos o modelo do plano afim, falta a unicidade em (1). Agora, a partir de M, o suposto leitor aplicou a operação *P*, que elimina o paralelismo em M. Desse modo, obteve o seguinte modelo, (fig. 18), formado por 9 pontos e 6 retas. Estas são as seguintes: {0, 1, 2, B}; {3,4,5, B}; {1, 2,3,A}; {4,5,0,A}; {5, 0, 1, C}; {2,3,4, C}.



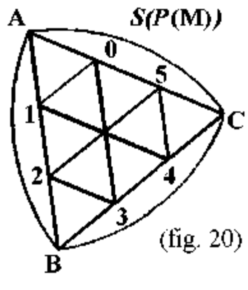
(fig. 19)

Neste modelo, valem os seguintes enunciados:

(1) Duas retas sempre se encontram;

(2) Cada reta tem quatro pontos (não é dual);

(3) Em uma reta fora de um ponto, existe um, e apenas um, ponto separado do primeiro.



(fig. 20)

Prosseguindo em sua aventura, o suposto leitor resolvera aplicar *P* a *S*(M) (fig. 17), o que fez surgir um conjunto de 10 pontos e 9 retas (fig. 19):

Os pontos de *P(S*(M)*)* são os elementos do conjunto {0, 1,2,3,4,5,A,B,C,D}.

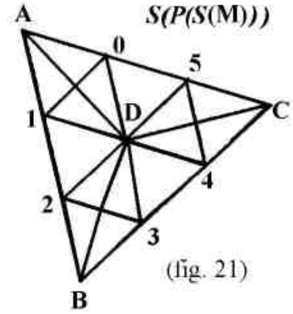
E as retas, os seguintes subconjuntos: {0,1,2,B}; {3,4,5,B}; {0,3,D}; {1,2,3,A}; {4,5,0,A}; {1,4,D}; {2,3,4,C}; {5,0,1,C}; {2,5,D).

Aqui, uma interessante característica é que 2 retas sempre se encontram.

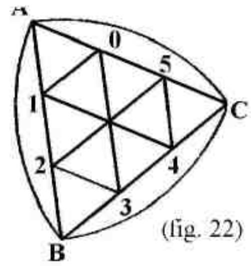
ISBN 978-85-89082-23-5

Assim como fora aplicado *P* a *S*(M), aplicando *S* a *P*(M), obteremos o seguinte modelo como resultado, constituído por 9 pontos e 10 retas. As retas são os seguintes subconjuntos do conjunto de 9 pontos: {0,1,2,B}; {3,4,5,B}; {1,2,3,A}; {4,5,0,A}; {2,3,4,C}; {5,0,1,C}; {0,3}; {1,4}; {2,5}; {A,B,C}.

Agora, aplicando *S* a *P(S*(M)*)*, obteremos o seguinte modelo:



(fig. 21)

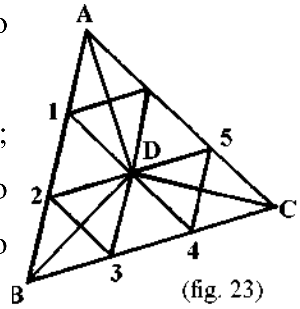


(fig. 22)

Nele não há paralelas nem pontos separados. Este modelo tem 10 pontos e 10 retas, sendo que estas estão assim subdivididas: 7 retas de 4 pontos e 3 retas de 3 pontos. As retas desse modelo são os seguintes subconjuntos: {0,1,2,B}; {3,4,5,B}; {1,2,3,,A}; {4,5,0,A}; {2,3,4,C}; {5,0,1,C} {0,3,D}; {1,4,D}; {2,5,D}; {A,B,C,D}; além disso, valem os seguintes enunciados:

- Por dois pontos passa uma reta.
- Duas retas sempre se encontram.
- Existem quatro pontos não três a três colineares.

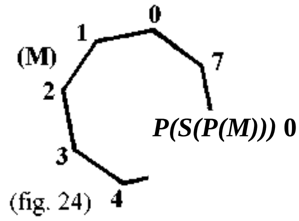
Se aplicarmos *P* a *S(P*(M)*)*, obteremos um modelo similar ao obtido da aplicação de *S* a *P(S*(M)*)*. Se não, vejamos.



(fig. 23)

Seja o modelo resultante da aplicação de *S* a *P*(M), (fig.22); aplicando *P* a *S(P*(M)*)*, obteremos o seguinte modelo (fig. 23), fazendo surgir um modelo similar ao da fig. 21, como houvera sido asseverado acima, portanto:

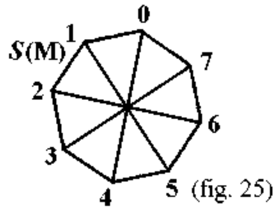
$$S(P(S(\mathrm{M}))) = P(S(P(\mathrm{M})))$$



(fig. 24)

Vejamos agora como ocorre a aplicação de *S* e *P*, a partir do modelo octogonal do conjunto de enunciados duais, fig. 8, quando substituímos o termo *qualidade* por ponto, e o termo *ente* por reta (fig. 24), cujas retas são os seguintes subconjuntos de pontos:

{0,1,2,3}; {1,2,3,4}; {2,3,4,5}; {3,4,5,6}; {4,5,6,7}; {5,6,7,0}; {6,7,0,1}; {7,0,1,2}.



(fig. 25)

Da aplicação se *S* a (M) resulta a fig. 25, onde o conjunto de enunciados duais ganha outros enunciados não duais, além do acréscimo de quatro retas, com dois pontos cada – {0,4}; {1,5}; {2,6};

ISBN 978-85-89082-23-5

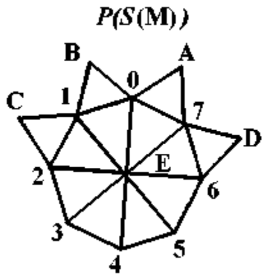
{3,7}. E, desse modo, a eliminação da separação no modelo admite os seguintes enunciados:

- Por dois pontos passa uma reta;
- Por cada ponto passam cinco retas (não dual);
- Por um ponto fora de uma reta passa uma e apenas uma paralela a essa reta (não dual).

Daqui, até chegarmos a um modelo que se encaixe na geometria afim, falta apenas obtermos a unicidade no enunciado - *por dois pontos passa uma reta*. Portanto, com essas modificações, (M) passa a ter 8 pontos e 12 retas.

Apliquemos agora *P* a M (fig. 24). Obteremos um modelo como o que segue, fig. 26, após eliminarmos o paralelismo, onde o aumento do número de pontos não significa aumento do número de retas; mas dá ao modelo nova sustentação:

- Duas retas sempre se encontram;
- Cada reta tem cinco pontos (não dual);
- Em uma reta fora de um ponto, existe um e apenas um ponto separado daquele.

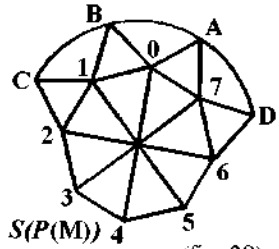


(fig. 27)

E estas são as retas com cinco pontos: {0,1,2,3,A}; {4,5,6,7,A}; {1,2,3,4,B}; {5,6,7,0,B}; {2,3,4,5,C}; {6,7,0,1,C}; {3,4,5,6,D}; {7,0,1,2,D}.

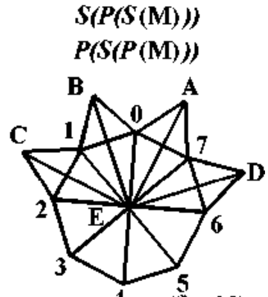
Agora, apliquemos *P* a *S*(M), fig. 27. Obtemos um modelo constituído por 13 pontos e 12 retas, sendo que, dessas, oito são constituídas de cinco pontos, e quatro de três pontos.

Da aplicação de *S* a *P*(M) obtemos o seguinte modelo (fig. 28), constituído por 12 pontos e 13 retas, das quais, 8 de cinco pontos, quatro de dois pontos e uma de quatro pontos.



(fig. 28)

É fácil perceber que as aplicações *S* sobre *P(S*(M)*)* e *P* sobre *S(P*(M)*)* resultam num mesmo modelo composto de 13 pontos e 13 retas!, pois *S* sobre *P*(*S*(M)) elimina, isto é, interliga o único conjunto de pontos separados de *P(S*(M)*)*, a saber {C,B,A,D}; e *P* sobre *S(P*(M)*)* elimina com apenas um ponto, {E}, um feixe de retas paralelas de *S(P*(M)*)*.



(fig. 29)

Portanto, os treze pontos são: {0,1,2,3,4,5,6,7,A,B,C,D,E}, e as treze retas: {0,1,2,3,A}; {4,5,6,7,A}; {1,2,3,4,B}; {5,6,7,0,B}; {2,3,4,5,C}; {6,7,0,1,C}; {3,4,5,6,D}; {7,0,1,2,D}; {0,4,E}; {1,5,E}; {2,6,E}; {3,7,E}; {A,B,C,D,E}.

Referências

ALEKSANDROV, A. D. et alli. **La matemática: su contenido, métodos y significado**. 7ª. ed. vol. I version española de Manoel Lopez Rodriguez. Madrid: Alianza, 1985.

BARKER, Stephen F. **Filosofia da matemática**. trad. Leônidas Hegenberg e Octanny S. da Mota. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

BASSI, Achille. **Considerações introdutórias sobre os sistemas lógico-dedutivos**. São Carlos-SP: Biblioteca UFSCar, 1972. mimeografado.

BLANCHÉ Robert. **A axiomática**. trad. por Maria do Carmo Cary, Lisboa: Presença, 1978.
BORGES, Caloman Carlos. **A matemática: suas origens seu objeto e seus métodos**. Parte I, Feira de Santana- BA, UEFS, 1983. mimeografado.

BRUTER, C.P. **Sur la nature des mathématiques**. Paris: Gauthier-Villars, 1973.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Sá da Costa: 1984.

COSTA, Manuel Amoroso. **As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios**. 3ª. ed. São Paulo: Convívio, 1981.

COXETER, H. S. M./ GREITZER, S. L. **Geometry revisited**. The Mathematical Association of America: 1967.

EVES, Howard. **Estudios de las geometrias**. trad. por Susana Blumovicz de Siperstein. Mexico: UTEHA, 1969. Vol. I.

FREMONT, H. **Teaching secondary mathematical through applications**. 2nd. ed., Ed. Prindle, Weber & Schimidt, 1979.

HILBERT, David. **The foundations of geometry**. trans. E. J. Townsend. Illinois: The Open Court Publ. Co., 1959.

KLINE, Morris. **O fracasso da matemática moderna**. trad. por Leonidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: IBRASA, 1976.

LAKATOS, Imre. **Matemática, ciência y epistemologia**. versión española de Diego Ribes Nicolás. Madrid: Alianza, 1981.

MOSTERÍN, Jesus. **Conceitos y teorias en la ciencia**. Madrid: Alianza, 1984.

NAGEL, Emest/ NEWMAN, James R. **Prova de Gödel**. trad. Por Gita K. Ginsburg. São Paulo: Perspectiva, 1973.

PITOMBEIRA, João Bosco. O problema dos três vasos. **Revista do Professor de Matemática** (13) 2º sem. 1988.

RUSSELL, Bertrand. **Introdução à filosofia da matemática**. 4ª.ed. trad. Giasone Rebuá. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

TEIXEIRA, Mario Tourasse. Comunicacão pessoal.

TORANZOS, Fausto I. **Introducción a Ia epistemologia y fundamentacion de la matemática**. 2ª. ed. Buenos Aires: Espasa-Calpe, 1949.

VIANNA, Claudia C. S. **O papel do raciocínio dedutivo no ensino da matemática**. Rio Claro-SP: UNESP, 1988. Dissertação de mestrado.

WILDER, Raymond L. **The foundations of mathematics**. 2nd ed. New York: John Wiley, 1965.

WILDER, Raymond L. Axiomatics and the development of creative talent. in: HENKIN, L./SUPPES, P./TARSKI, A. (Ed.) THE AXIOMATIC METHOD proceedings of an International Symposium held at the University of California, Berkeley, Dec. 26, 1957 – Jan. 4, 1958. p.474-88.