ISBN 978-85-89082-23-5

Uma Sequência de Ensino para a Introdução de Logaritmo: Estudo exploratório usando a calculadora[1]

Monica Karrer [2]
Sandra Magina[3]

Resumo

Este artigo descreve um estudo preliminar sobre o processo ensino-aprendizagem dos logaritmos com alunos da lª série do ensino médio. Primeiramente, será apresentada uma sequência de ensino desse conteúdo, baseada em situações-problema envolvendo equações exponenciais, integradas com o uso da calculadora. Nelas os logaritmos assumem o papel de ferramenta de resolução. Os resultados, analisados qualitativamente, indicam que:

(a) houve uma tendência à utilização do pensamento linear;

o conceito de logaritmo foi, em todas as etapas da sequência, mais bem explicitado oralmente do que por escrito, usando simbologia matemática;

a calculadora, que inicialmente foi vista como uma ferramenta desnecessária passou a assumir o papel de facilitadora dos cálculos envolvidos. O estudo conclui que a abordagem desenvolvida por nossa sequência parece favorecer a formação do conceito de logaritmo para esse grupo e que é necessário fazer ajustes nessa sequência para, então, voltar a testá-la.

Abstract

This paper describes a pilot study concerning the process of learning logarithms carried out with 15 year-old students from the first year of high school. First we present a didactic sequence which was based on exponential problem solving from everyday life integrated with calculator use and in which logarithms appeared as a problem solving tool. The analysis, conducted using the qualitative perspective, indicates that:

(a) there was a tendency to use linear thought;

(b) the concept of logarithms was explained better by oral than by written means in all stages of the sequence;

(c) the calculator, which was initially seen as an unnecessary tool, later assumed a role facilitator of the calculations involved. The study concludes that the approach we chose to introduce this concept through the didactic sequence was fruitful for these students to make sense of logarithms, although some adjustment have been made before applying the main study.

Introdução

Nosso estudo teve por finalidade elaborar uma sequência de ensino que, aliada ao uso da calculadora, facilitasse a formação do conceito de logaritmo. Segundo nossas pesquisas históricas, os logaritmos surgiram no início do século XVII para facilitar os enfadonhos cálculos numéricos exigidos pela astronomia e navegação. Atualmente, não faz sentido estudar tal conteúdo para esse fim, porem, na fase do ensino médio, podemos

---

[1] Digitalizado por Geraldo Lima Sobrinho, Marcelo de Carvalho Borba e Marcus Vinicius Maltempi.
[2] Mestranda em Educação Matemática – PUC/SP.
[3] Doutoranda em Educação Matemática e Professora da PUC/SP

ISBN 978-85-89082-23-5

utilizar os logaritmos para resolver problemas que envolvem aplicações financeiras, valorização e desvalorização de bens, crescimento populacional e outros vários casos que possibilitam trabalhar com situações próximas da realidade do aluno. Por outro lado, pudemos notar que existem problemas no processo ensino-aprendizagem desse conteúdo e, consequentemente, na formação de seu conceito. As dificuldades inicialmente puderam ser percebidas tanto através de nossa própria experiência docente como em discussões com colegas da área. Ainda, interessadas em investigar mais amiúde a existência de problemas na formação do conceito de logaritmo, resolvemos aplicar um teste empírico (que envolvia questões referentes à função exponencial e ao logaritmo) em trinta e cinco alunos do último ano do ensino médio da rede particular.

Com essas ideias em mente, elaboramos uma sequência de ensino, a partir de situações significativas, fundamentada nas teorias psicológicas e educacionais e nas pesquisas científicas existentes. Para isso, procuramos introduzir o logaritmo através de situa9oes-problema, baseadas na teoria de Vergnaud (1987, 1994) e nas pesquisas de Lester e Mau (1993) sobre os resultados obtidos na introdu9ao de um conceito através desse tipo de abordagem. Esta última pesquisa mostrou que trabalhar com situações-problema favorece o desenvolvimento da autoconfiança e da autonomia para lidar com a matemática. Como a tecnologia faz parte de nosso estudo, analisamos as pesquisas realizadas por Borba et. al. (1997) e Gracias e Borba (1998) sobre o uso de calculadoras como ferramentas de ensino. Os resultados desses dois estudos apontaram a calculadora como um instrumento favorável no ambiente de sala de aula, possibilitando o estabelecimento de um clima rico de previsões, testes, conjecturas e generalizações. Ainda, foram de grande valia as pesquisas realizadas por Confrey & Smith (1995), que apresentam uma abordagem para a construção da função exponencial baseada no isomorfismo entre dois mundos: o da contagem (mundo dos logaritmos) e o do seccionamento (mundo da exponencial). Atraves dessa abordagem procuramos explorar a comparação entre os tipos de crescimento. Por meio de interpolações, o aluno constroi o conceito de função exponencial e logarítmica. Tambem de Confrey (1991) temos uma pesquisa sobre a importância de se ouvir e entender a lógica utilizada pelos alunos na resolução de um problema antes de tomar qualquer atitude com relação a sua validade, que pode ser correta sem ser a convencional adotada pelo professor.

Temos, por hipótese que, se o aluno interage com a introdução dos logaritmos através de situações significativas, terá condições de construir esse conceito. E por esse motivo que temos a intenção de construir e aplicar uma sequência de ensino nesses moldes para a introdução do tema.

O Estudo

A sequência de ensino foi desenvolvida com duas alunas da primeira série do ensino médio de um colégio da rede particular do ABC paulista, com quem nos encontramos quatro vezes. Cada encontro teve a duração aproximada de 60 minutos e ocorreu sempre em horário extra-escolar. A sequência foi desenvolvida através de quatro fichas - uma por encontro - as quais continham atividades, situações-problema e questões relativas ao conceito de logaritmo (ver quadros 1 e 2). Esse estudo tinha a finalidade de:

a) observar, avaliar e ajustar a sequência de ensino que havíamos planejado, no sentido de construirmos algo eficiente quando da aplicação do estudo principal;

b) detectar as dificuldades que os estudantes apresentam ao lidar com o conceito;

c) fazer uma primeira análise sobre as implicações do uso da calculadora.

Podemos dizer, resumidamente, que a primeira ficha foi composta por dois problemas que exploravam a função exponencial e teve por objetivo verificar as concepções das alunas a respeito dessa função. A segunda ficha destinava-se a introduzir o conceito de logaritmo como ferramenta necessária para a resolução da equação exponencial obtida no exercício da ficha anterior, além de apresentar uma tabela e uma série de questões sobre os logaritmos de base 10. A terceira ficha trabalhou com a existência de outras bases de logaritmo, incluindo a tabela e as questões relativas ao logaritmo de base 2. A última ficha envolveu o estudo de logaritmos de base b/0<b<l (no caso a base $1/2$), alem da análise das condições de existência da base. A ficha 4 ainda trabalhou com 0 conceito de logaritmo versus a interpretação da definição formal.

A seguir, apresentaremos as fichas e, depois, os comentários a respeito dessa aplicação.

1) UMA DOENÇA EPIDÊMICA DOBRA O NÚMERO DE VÍTIMAS A CADA ANO. SE HOJE EXISTEM 300 INFECTADOS, DETERMINE (SUPONDO QUE A DOENÇA NÃO FOI CONTIDA):

A) O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS UM ANO;
B) O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS DOIS ANOS;
C) O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS CINCO ANOS;
D) O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS 10 ANOS;
E) UMA FUNÇÃO QUE REPRESENTE O NÚMERO DE INFECTADOS APÓS "N" ANOS;
F) APÓS QUANTOS ANOS O NÚMERO DE INFECTADOS SERÁ DE 76800;
G) APÓS QUANTOS ANOS O NÚMERO DE INFECTADOS SERÁ DE 1228800.

2) O VALOR DE UM CERTO AUTOMÓVEL (EM REAIS) SOFRE UMA DEPRECIAÇÃO DE 10% AO ANO. A FUNÇÃO QUE REPRESENTA O VALOR DESTE AUTOMÓVEL APÓS " T" ANOS É DADA POR: $F(T) = 10000.(0.9)^T$, $0 \le T \le 20$.
SABENDO QUE A VIDA ÚTIL DESTE CARRO É DE 20 ANOS, DETERMINE:
(UTILIZE A CALCULADORA E, QUANDO NECESSÁRIO, USE A PROXIMAÇÃO DE QUATRO CASAS DECIMAIS).

A) O VALOR DESTE CARRO HOJE;
B) O VALOR DESTE CARRO APÓS 1 ANO;
C) O VALOR DESTE CARRO APÓS 1 ANO E MEIO;
D) O VALOR DESTE CARRO APÓS 2 ANOS;
E) O VALOR DESTE CARRO APÓS 2 ANOS E MEIO;
F) O VALOR DESTE CARRO APÓS 3 ANOS;
G) O VALOR DESTE CARRO APÓS 6 ANOS;
H) O VALOR DESTE CARRO APÓS 10 ANOS;
I) O VALOR DESTE CARRO APÓS 20 ANOS;
J) COM OS DADOS OBTIDOS, CONSTRUA UMA TABELA RELACIONANDO O TEMPO E O VALOR DO CARRO.
L) CONSTRUA UM GRÁFICO COM OS DADOS OBTIDOS, OU SEJA, REPRESENTE GRAFICAMENTE A FUNÇÃO DADA NO PAPEL MILIMETRADO.
M) ANALISANDO O GRÁFICO, EXISTE UM TEMPO "T" EM QUE O VALOR DO CARRO SEJA DE 5000 REAIS? ESTE VALOR DE "T" PERTENCE A QUE INTERVALO?
N) UTILIZANDO A FUNÇÃO DADA, TENTE CALCULAR O VALOR DE "T", PARA QUE O VALOR DO CARRO SEJA DE 5000 REAIS.
O) QUE DIFICULDADES VOCÊ ENCONTROU PARA RESOLVER ESTE ITEM?

Nº	POTÊNCIA DE BASE 10	NOTAÇÃO DO LOG	CÁLCULO DO LOG
1			
6			
8,2			
10			
29			
100			
850			
1000			
0,2			
0,84			
0			
-10			
-250			

A) O QUE REPRESENTA CADA LOGARITMO OBTIDO NA ÚLTIMA COLUNA?
B) O QUE VOCÊ NOTOU EM RELAÇÃO AOS RESULTADOS OBTIDOS PELOS CÁLCULOS DOS LOGS DE 1 A 10?
C) E DOS LOGS ENTRE 10 E 100?
D) O QUE ACONTECERIA COM OS LOGARITMOS ENTRE 10000000 E 100000000?
E) ENTRE QUE INTEIROS CONSECUTIVOS ESTARIA O LOG DE 238?
F) ENTRE QUE INTEIROS CONSECUTIVOS ESTÁ O LOGARITMO DE 238?
G) ENTRE QUE INTEIROS CONSECUTIVOS ESTÁ O LOGARITMO DE 3495?
H) ANALISANDO OS NÚMEROS DADOS (DA 1ª LINHA ATÉ A 8ª), PODEMOS NOTAR QUE ELES AUMENTAM. O QUE OCORRE COM OS SEUS LOGARITMOS?
I) EXISTEM LOGARITMOS DE NÚMEROS ENTRE 0 E 1 NESTA BASE? O QUE OCORRE COM ELES?
J) O QUE ACONTECEU QUANDO VOCÊ CALCULOU O LOGARITMO DE 0? JUSTIFIQUE A SUA RESPOSTA.
L) EXISTEM LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS NESTA BASE? JUSTIFIQUE.
M) PROCURE, BASEADO NESTE ESTUDO E UTILIZANDO SUAS PALAVRAS, DEFINIR LOGARITMO DE UM NÚMERO NA BASE 10. INCLUA AS CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA.

Quadro 1: As fichas 1 (lado esquerdo) e 2 (lado direito) utilizadas nos encontros 1 e 2 da sequência

ISBN 978-85-89082-23-5

Nº	Potência de base 2	Notação do logaritmo	Cálculo do log
1			
2			
3			
4			
6			
8			
12,7			
16			
0			
0,5			
0,25			
-2			
-5			
A) QUAIS AS DIFICULDADES QUE VOCÊ ENCONTROU? B) TENTE AGORA ACHAR O LOGARITMO DE 3 NA BASE 2, TRANSFORMANDO CADA TERMO DA EQUAÇÃO EXPONENCIAL $2^x = 3$ EM POTÊNCIAS DE BASE 10. C) NA BASE 2, QUANDO O LOGARITMO DARÁ UM RESULTADO ENTRE 1 E 2? D) O QUE OCORRE COM OS LOGARITMOS DE NÚMEROS ENTRE 4 E 8 NESSA BASE?		E) SE O CÁLCULO DO LOGARITMO DE UM NÚMERO RESULTOU EM UM VALOR ENTRE 5 E 6, O QUE PODEMOS DIZER SOBRE ESSE NÚMERO? F) ENTRE QUE INTEIROS ESTÁ O LOGARITMO DE 50 NA BASE 2? G)TENTE AGORA, COMPARANDO AS DUAS TABELAS (DE BASE 10 E DE BASE2), LEVANTAR O QUE HÁ EM COMUM ENTRE ELAS.	

Nº	Potência de base 1/2	Notação do logaritmo	Cálculo do log
1			
2			
3			
4			
8			
0,5			
0,63			
0			
-2			
-5			
A)NESTA BASE, QUANDO O LOGARITMO DE UM NÚMERO RESULTA EM VALOR POSITIVO? B)ESTIME O VALOR DO LOGARITMO DE 28 NESTA BASE. C)PROCURE FAZER UM LEVANTAMENTO DAS SEMELHANÇAS E DIFERENÇAS ENCONTRADAS ENTRE ESTA ÚLTIMA TABELA E AS OUTRAS DUAS JÁ ESTUDADAS.		D)ANALISE OS CASOS A SEGUIR: D1)$LOG_1 8$; D2)$LOG_{-2} 3$; D3)$LOG_0 5$. E) QUE TIPO DE VALORES VOCÊ ACHA QUE A BASE DE UM LOGARITMO PODE ASSUMIR? JUSTIFIQUE. F)TENTE DEFINIR LOGARITMO DE UM NÚMERO EM QUALQUER BASE, COSIDERANDO AS CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA.	

Quadro 2: As fichas 3 (lado esquerdo) e 4 (lado direito) utilizadas nos encontros 3 e 4 da sequência

Aplicação e Análise da Sequência

1º Encontro

Três alunas participaram desse encontro. Explicamos o procedimento e os objetivos do estudo e pedimos que as alunas expusessem as dúvidas e discutissem todas as dificuldades, de tal forma a nos permitir acompanhar e anotar esses comentário. Visto que a intenção do encontro era a de verificar qual a concepção que essas alunas tinham de função exponencial, entregamos a primeira ficha (composta de dois problemas exponenciais) sem dizer sobre qual tópico matemático versava.

Distribuímos uma ficha para cada aluna. Inicialmente, elas procuraram resolver de forma individual, porem, diante da primeira dificuldade, iniciou-se a discussão em grupo. Procuramos deixá-las à vontade, assumindo principalmente o papel de ouvintes.

As alunas não tiveram dificuldades na resolução dos itens ***a, b**, **c** e **d***, já que não fizeram perguntas e conseguiram resolvê-los de forma correta e satisfatória, o que nos leva a crer que essas questões não levantaram dúvidas. Verificando a ficha 1, notamos que esses itens exigiam do aluno apenas o cálculo de valores numéricos. No item ***e***, pedimos que descobrissem a função que representava a situação do exercício. Nesse caso, notamos que a primeira tentativa para a descoberta da função partiu de uma relação linear. A aluna Tatiana tentou 2 x n. Ao perceber que essa relação não dava conta da resolução, tentou 300 x 2n. Após essa tentativa, perceberam que, nos itens resolvidos, ocorria uma multiplicação de fatores iguais, donde concluíram que deveriam fazer 2^n. Por fim, notando que essa operação ainda era insuficiente para dar conta da situação conseguiram chegar a 300.2^n.

Nesse contexto, perguntamos se não estava faltando alguma coisa na escrita da função. As alunas falaram que a fórmula seria $F(n) = 300.2^n$, sendo que apenas uma delas conseguiu discernir o que representava "n" e "F(n)". Ao serem questionadas sobre o tipo de função, verificamos que tiveram certa dificuldade em perceber que se tratava de uma função exponencial, apesar de já terem estudado o assunto através de uma outra abordagem. Essas dificuldades foram notadas principalmente pelas tentativas incorretas e pela demora em oferecer a resposta.

No item ***f***, notamos que apenas a aluna Denise levantou a questão de que o valor 76800 deveria ser substituído no lugar de F(n). As outras alunas não apresentaram facilidade na manipulação dessa função, resolvendo a questão a partir da explicação de

ISBN 978-85-89082-23-5

Denise. Nesse caso, quando depararam com a equação $256 = 2^n$, comentaram que aquilo elas já tinham aprendido na escola e que bastava fatorar o 256. Com isso, podemos ressaltar que as alunas só associaram o que estavam resolvendo ao que já tinham estudado na escola no momento em que chegaram a um exercício de técnica de cálculo, o que evidencia a tendência do ensino atual de trabalhar com exercícios sem contexto, que privilegiam resoluções numéricas e algébricas. Ainda, pudemos verificar que existem problemas na abordagem do ensino atual a respeito de função. Isso ficou claro em dois momentos: na solicitação do tipo de função envolvida no problema e na resolução do item ***f*** que exigia do aluno a noção dos significados de "F(n)" e “n”, para, em seguida, resolver a equação.

Um outro ponto importante foi o comportamento inicial das alunas frente à utilização da calculadora. Tatiana mostrou nesse primeiro encontro uma certa “repulsa” em utilizá-la, como se tal uso fosse vergonhoso ou demonstrasse incompetência Essa crença de Tatiana ficou clara quando ela afirmou que não era necessário resolver as contas através da calculadora, pois ela sabia muito bem fazer sozinha. Com isso, as outras alunas que adotaram a calculadora terminavam o exercício num intervalo de tempo menor que o de Tatiana. Constatamos, ainda, que as alunas não sabiam operar com a calculadora científica, provavelmente pelo fato de que o ensino atual praticamente não admite o seu uso. Nesse momento procuramos orientá-las em relação ao uso desse instrumento para o cálculo de potências.

A segunda questão provocou grande motivação, pois representava uma situação mais próxima da realidade dessas alunas. Elas resolveram os cálculos numéricos, exigidos do item ***a*** ao item ***i***, de maneira satisfatória. Na construção do gráfico, notamos uma tendência em ligar os pontos com régua, o que nos mostra novamente como e forte a intuição de linearidade entre as variáveis.

O item ***m*** indagava se, através da análise do gráfico, existiria um tempo em que o carro assumisse o valor de 5000 reais e em qual intervalo estaria esse tempo. Todas as alunas realizaram individualmente a análise gráfica, mas apenas duas chegaram à conclusão de que esse tempo existe e se situa entre 6 e 7 anos. Notamos que a formulação da questão, no que se refere ao cálculo de valores numéricos, levou uma das alunas à conclusão incorreta sobre o tempo. Isso se deve ao fato de que os valores solicitados induziram num primeiro momento a construção de uma reta (visto que os pontos estão muito próximos), e a construção à mão livre, com os valores dados, permitiu uma imprecisão que afetou o resultado final. Por esse motivo, para a construção do estudo principal, alteraremos os valores solicitados.

Apenas no item "***n***" ao depararem com a equação $\mathbf{0{,}9^t = 0{,}5}$, perceberam que não seria possível obter o valor de "t" com os conhecimentos que tinham. A intenção desse item foi exatamente a de criar um desafio, ou seja, de despertar o interesse para a necessidade de aprender algo novo. As respostas dadas diante da nova situação foram:

Ana Luiza: É UMA CONTA MUITO EXATA, NÃO DÁ PARA IGUALAR 0,5 NA BASE 0,9.

Denise: NÃO DÁ PARA 0,5 CHEGAR NUMA BASE IGUAL A 0,9.

Tatiana: NÃO É POSÍVEL SABER O TEMPO QUE O CARRO VALE 5000 REAIS, PORQUE EU NÃO POSSO FATORAR 0,5 PARA CHEGAR A 0,9. NESTE CASO, POR ESTA FÓRMULA, EU NÃO CONSEGUI. PELO MÉTODO QUE A GENTE APRENDEU NÃO DÁ, MAS DEVE EXISTIR OUTRO JEITO. SERÁ QUE NÃO DÁ PARA FAZER POR REGRA DE TRÊS?

Aproveitando a fala de Tatiana, perguntamos como ela utilizaria a regra de três. A aluna respondeu que poderia relacionar um valor conhecido com o seu tempo, então o valor 5000 com um tempo x. Novamente temos a questão da linearidade envolvida neste raciocínio.

Notamos que Ana Luiza teve dificuldade de se expressar. matematicamente, enquanto Denise conseguiu falar com clareza sobre a questão. Já Tatiana demonstrou uma facilidade de relacionar o problema com o contexto dado, procurando achar soluções, mesmo que incorretas. Ao serem questionadas sobre essa primeira ficha, responderam:

Denise: GOSTEI DESTE JEITO, E MAIS REAL.

Tatiana: DESTA FORMA NÓS TEMOS QUE PENSAR. DO JEITO QUE É DADO NA ESCOLA, A GENTE QUASE NÃO PRECISA PENSAR.

A afirmação de Tatiana deixa claro que para ela o papel do ensino é o de valorizar a técnica e não o raciocínio. Ana Luiza não se manifestou em relação a essa ficha.

2° Encontro

Iniciamos o encontro partindo do fato de que os conhecimentos dessas alunas não eram suficientes para resolver o item "m" da questão 2 da ficha 1. Nesse caso, intervimos no processo para introduzir o conceito de logaritmo através da necessidade de resolução da equação obtida naquela questão: $0{,}9^t = 0{,}5$. Nesse momento, aproveitamos para desenvolver os aspectos históricos inerentes a esse conteúdo. Exploramos o contexto da época, a criação dos logaritmos por Napier e as tabelas de Henry Briggs. Ainda, apresentamos a utilidade dos logaritmos para aquele tempo, um comentário sobre o desenvolvimento desse conteúdo e o seu uso atual. Em seguida, as alunas deveriam preencher a tabela de logaritmos de base 10, bem como resolver as questões associadas a ela. Novamente, distribuímos uma ficha para cada aluna. A partir desse encontro, apenas as alunas Ana Luiza e Tatiana continuaram a participar do estudo, pois Denise sofreu um acidente que dificultou sua locomoção.

Para a resolução dessa equação, procuramos mostrar a existência de um caminho que consiste em escrever os dois membros da equação sob a forma de potência de base 10. Os expoentes do 10 são denominados logaritmos dos números em questão na base 10 e são obtidos através da calculadora cientifica. Realizando essa transformação, as alunas resolveram a equação exponencial obtida, determinando o tempo (aproximado) necessário para que o valor do Cairo fosse de 5000 reais. Foi demonstrado como utilizar a calculadora científica para fazer essa transformação, destacando que os expoentes encontrados eram denominados logaritmos (do número em questão) na base 10. A partir desse encontro, notamos uma aceitação maior do uso da calculadora como um meio de encontrar resultados de problemas, os quais não seriam obtidos sem o uso desse instrumento. Notamos que, com a ausência de Denise, a aluna Ana Luiza se sobressaiu, colocando suas opiniões, fato que não ocorrera no primeiro encontro.

Chegando a tabela, notamos que as duas alunas: -não sabiam como representar um número na forma de potência de base 10, o que nos leva a crer que existem dificuldades em compreender o significado de potência; -conseguiram concluir a não existência do logaritmo de 0 e de número negativo com o auxílio da calculadora e posteriormente conseguiram explicar o motivo da não existência através da análise de que não e possível escrever uma potencia de 10 que resulte em 0 ou em numero negativo; -não tiveram dificuldades em dizer que o logaritmo decimal e um expoente, no caso "o expoente do 10 para se obter o numero que se pede"; -conseguiram estimar corretamente em que intervalo estaria o logaritmo de um numero, bem como perceber que, nessa base, aumentando o numero, aumenta o valor do logaritmo. Alem disso, chegaram a conclusão da situação em que o logaritmo de um número na base 10 forneceu resultado negativo.

A aluna Tatiana procurou fornecer as respostas através de uma escrita formal, porém esse fato a levou a cometer muitos erros. Notamos que era uma aluna que apresentava grande rapidez de raciocínio, mas que não demonstrava a maturidade de representar matematicamente o que conseguia expressar na linguagem natural. Essa afirmação foi verificada, por exemplo, na resolucao do item c, que questionava sobre os logaritmos entre 10 e 100. A sua resposta verbal foi dada rapidamente, citando que os logaritmos estariam entre 1 e 2, porém, ao escrever essa resposta, a notação fornecida foi 1 >x<2. Ela questionou a denominação dada para o número de quem se quer obter o logaritmo (logaritmando), pois queria colocá-la na sua definição.

3° Encontro

O procedimento desse encontro seguiu o mesmo caminho dos dois anteriores. Distribuímos uma ficha para cada uma das alunas, que elas gastaram aproximadamente 50 minutos para resolvê-la. Durante o preenchimento da tabela de logaritmos de base *2*, novamente as duas alunas apresentaram dificuldades em compreender o que estava sendo pedido na coluna "Potência de base 2". Apesar de já terem estudado potência, a terminologia não teve significado para as alunas: só entenderam o que estava sendo solicitado quando reformulamos a questão, dizendo que elas deveriam escrever o número como *"2* elevado a algo".

A tabela não foi preenchida na ordem dada. As alunas resolveram em primeiro lugar todas as potências diretas de 2 . A dificuldade maior ocorreu na questão em que se solicitava a representação do número 0,5 sob a forma de potência de base 2. As alunas tentaram representar 0,5 em notação cientifica (provavelmente por estarem utilizando atualmente esta notação em Física) e viram que esse caminho não facilitava a resolução. Pedimos que representassem 0,5 sob a forma de uma outra notação, mas elas não tinham ideia de que outras formas poderiam representar esse número. Foi quando propusemos a representação sob a forma de fração que conseguiram resolver o exercício.

Após a resolução das potências diretas, sobraram três casos não diretos na tabela: 3; 6 e 12,7. Quando a examinadora pediu que representassem o número 3 sob a forma de potência de base 2, elas verificaram que não seria possível obter tal representação diretamente.

Questionamos como poderiam resolver o problema. No mesmo momento, Tatiana perguntou se poderia utilizar o método que usara na ficha 2, ou seja, transformar os dois números em potencias de base 10. Ao ser questionada sobre como faria isso, ela respondeu que bastaria achar os logaritmos através da calculadora.

Nessa fase, notamos que Ana Luiza apresentou a necessidade de detalhar mais o processo de resolução, enquanto Tatiana chegou ao mesmo resultado de forma mais rápida, pulando passagens. Ao ser questionada sobre essas passagens, ela conseguiu explicar o que estava embutido na sua forma de resolução.

Resolução de Tatiana	Resolução de Ana Luiza
$2^x = 3$ $10^{0,30102x} = 10^{0,47712}$ $X = 1,58501$	$2^x = 3$ e $2 = 10^y$ $\text{Log}_{10}2 = y$ e $\log 3 = w$ $Y = 0,30102$ $w = 047712$ $10^{0,30102x} = 10^{0,47712}$ $X = 1,58501$

As alunas conseguiram, de forma bastante satisfatória, levantar as semelhanças existentes entre os logaritmos de base 2 e os de base 10. Após o término da ficha, foi institucionalizada a relação entre o processo que utilizavam para resolver esse tipo de equacao e a técnica de mudança de base com a finalidade de obter uma sistematização do processo.

4° Encontro

O último encontro transcorreu seguindo o procedimento adotado nos encontros anteriores. As alunas estavam bem a vontade para colocar e discutir as dúvidas, sendo que, novamente, procuramos assumir, sempre que possível, a postura de ouvintes.

Não houve dificuldades para resolver essa ficha, visto que as técnicas de cálculo e os procedimentos envolvidos já tinham sido trabalhados na ficha 3. A tabela foi preenchida na ordem dada e as conclusões e comparações obtidas foram satisfatórias. Abaixo, vamos colocar as conclusões que as alunas apresentaram quando foram solicitadas a explicar o que e logaritmo:

Ana Luiza: QUANDO TEMOS UMA EQUACAO EXPONENCIAL QUE NÃO DÁ PARA IGUALAR AS BASES, USAMOS LOG. O LOG. É O EXPOENTE DA BASE QUANDO SE QUER CHEGAR (IGUALAR) AO LOGARITMANDO. O LOG. EXISTE QUANDO O LOGARITMANDO FOR MAIOR QUE ZERO E A BASE MAIOR QUE ZERO E DIFERENTE DE 1.

Tatiana: QUANDO CHEGAMOS A UMA EQUACAO EXPONENCIAL IMPOSSÍVEL DE IGUALAR AS BASES, NÓS USAMOS 0 LOG., QUE É O LOG. DA BASE QUE QUEREMOS IGUALAR AO LOGARITMANDO. LOG. EXISTE QUANDO O LOGARITMANDO É > 0 E A BASE > 0 É DIFERENTE DE 1.

Notamos, nessas duas definições, que em primeiro lugar a preocupação foi mostrar a

ISBN 978-85-89082-23-5

utilidade do log, em seguida, o que representa o log., para finalmente apresentar as condições de existência, exatamente na ordem trabalhada pela sequência. Apesar de alguns problemas de linguagem, podemos considerar que o objetivo foi atingido.

Em seguida, foi apresentada a definição matemática formal:

“Se a>0, b>0 e **b≠l,** $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$**”**

Pedimos que as alunas tentassem interpretá-la. As respostas obtidas, foram:

Ana Luiza: SENDO A O LOGARITMANDO E B BASE, (AMBOS MAIORES QUE ZERO), LOG. DA BASE B ELEVADO A X DARA O LOGARITMANDO A. OBS: B TEM QUE SER DIFERENTE DE 1. O EXPOENTE É X.

Tatiana: SE O LOGARITMANDO É MAIOR QUE 0 E A BASE MAIOR QUE 0 E DIFERENTE DE 1, O LOG. DE A NA BASE B É IGUAL A B ELEVADO AO LOG. (QUE É O X), QUE É IGUAL AO LOGARITMANDO.

Notamos que a definição matemática representou um fator complicador no estudo, visto que, mesmo após a realização das fichas e da conceitualização do logaritmo, a interpretação da definição formal não foi satisfatória. Quando solicitamos, no decorrer da sequência, a definição de log, as duas alunas responderam facilmente que era "o expoente da base para dar o logaritmando". Através da simbologia matemática apresentada, notamos que expressaram corretamente a interpretação das condições de existência, porém acabaram "emendando" a frase dizendo que log é igual a b elevado a x, e não o próprio x. Na definição de Tatiana, ela colocou que o log de a na base b é igual a b elevado ao log (que é o x), o que nos mostra que ela concluiu que o log é o x, mas não conseguiu expressá-lo corretamente na linguagem escrita. Essa situação nos leva a crer que a apresentação da definição matemática formal não teve significado para essas alunas, mesmo após a aplicação da sequência. Isso talvez decorra do fato de que há pouca exploração da simbologia matemática no ensino atual.

Conclusão

Podemos afirmar que o desempenho das alunas foi satisfatório ao longo dos quatro encontros. Elas se mostraram interessadas durante todo o processo, comentando que sentiam falta de que os demais assuntos matemáticos também fossem abordados de maneira a envolver questões de aplicação prática,

Resumidamente, o estudo exploratório constatou que:

-as alunas apresentaram grandes dificuldades (ou pouco conhecimento) em relação aos conteúdos de potência e função, considerados pré-requisitos para a formação do conceito de logaritmo;

- havia ainda uma tendência à utilização do pensamento linear;

- a abordagem através de situações-problema constituiu um fator motivador do processo, porém a interpretação e modelização matemática não eram tarefas simples para a dupla;

- o conceito verbal foi, em todas as etapas da sequência, superior ao escrito e a simbologia matemática representou um fator complicador do estudo;

- no decorrer da aplicação, a calculadora, que inicialmente foi vista como uma ferramenta desnecessária, passou a assumir o papel de facilitadora dos cálculos envolvidos.

Para a construção da sequência do estudo principal, acreditamos que há necessidade de efetuarmos alguns ajustes. Em primeiro lugar, temos a intenção de explorar mais situações-problemas. Isso porque acreditamos que, se oferecermos ao aluno um maior contato com o objeto de estudo segundo esse tipo de abordagem, amenizaremos as dificuldades de interpretação e mobilização matemática. Além disso, acreditamos que a sequência atual não cumpriu o papel de explorar a comparação entre os tipos de crescimento exponencial e logaritmico. Pretendemos incluir em nossa sequência, seguindo a ideia da abordagem co-variacional de Confrey (1995), questões na forma de tabelas que facilitem a constatação desse tipo de crescimento, procurando construir o conceito de forma gradativa. Constatamos, ainda, a necessidade de efetuarmos mudanças de valores numéricos (no caso da ficha 1, cujos valores numéricos induziam inicialmente a uma interpretação linear) e de linguagem em algumas questões, a fim de facilitar a interpretação. Por fim, a calculadora será um instrumento central em nossa sequência, pois os resultados deste estudo preliminar não deixaram dúvidas quanto à eficiência dessa ferramenta e aos ganhos por ela proporcionados no processo ensino-aprendizagem.

Bibliografia

GRACIAS.T.; BORBA, M. **Calculadoras gráficas e funções quadráticas**. Revista de Educação Matemática (nº4), 1998.p.27-32.

BORBA, M.C.; MENEGHETTI, R.C.G.; HERMINI.H.A. **Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de ciências biológicas**. Revista de Decca Mathematical (nº3), 1997.p.63-69.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Editora Edgard Blücher Ltda : São Paulo, 1976.

CONFREY, J. **The Concept of Exponential Functions: a Student's Perspective** em "Epistemological Foundations of Mathematical Experience" Ed. L. Steffe, New York: Springer, U.S.A. 1991.

CONFREY, J.; SIMITH.E. **Splitting, covariation and their role in the development of exponential functions**. Journal for Research in Mathematics Education. (26), 66-86, 1995.

LESTER, F. K.; MAU T. S. **Teaching Mathematics via Problem Solving**. For the Learning Mathematics. (13), 8-17, 1993.

VERGNAUD, G. **Problem Solving and Concept Development** in Learning of Mathematics. E.A.R.L.I., Second meeting, Tübigen, September, 1987

VERGNAUD, G. Epistemology and Psicology in Mathematics Education em Nesher, P.; Kilpatrick, J. **Mathematics and Cognition**, Cambridge University Press, 1994.