ISBN 978-85-89082-23-5

Prova de Matemática para Seleção de Candidatos ao Mestrado em Educação Matemática (1995)[1]

Nelo Allan[2]

1. Introdução

Em agosto de 1995, fui convidado a confeccionar a prova de Matemática para o exame de seleção para Pós-Graduação em Educação Matemática do IGCE, UNESP - Rio Claro. Fui alertado para o fato de que, na opinião de alguns professores, as duas provas anteriores não diferenciaram os alunos, ficando quase todos com a mesma nota. Esta foi minha diretriz na seleção de questões. Minha primeira solução foi dar uma dissertação e o tema "Equações" me pareceu mais apropriado, pois todos os candidatos poderiam escrever algo sobre este tema, e os candidatos falariam desde equações algébricas simples e sistemas até outros tipos de equações como diferenciais, integrais, etc., podendo mostrar os limites de seu conhecimento; mais adiante comentarei o resultado da prova. Em conversa com o Coordenador, ele achou mais conveniente dar também uma primeira parte de questões convencionais, dedicando-se uma pequena parte do tempo a elas.

2. Elaboração das Questões

Na confecção da parte de questões convencionais, conversei com colegas que há alguns anos trabalham com professores secundários, e concordamos que em geral os professores apresentam deficiências em tópicos como manipulação algébrica, determinantes, contagem em geral, geometria plana e ainda maior em geometria no espaço, fatorização única de números inteiros, divisibilidade, etc. Depois disto, decidi que as questões iriam concentrar-se mais na Matemática de primeiro e segundo graus

---

[1] Digitalizado por Fábio Donizeti de Oliveira, Maria Ednéia Martins-Salandim e Tatiane Tais Pereira da Silva.

[2] Professor do Departamento de Matemática IGCE - UNESP - Rio Claro.

com alguns tópicos beirando a de terceiro grau. Isto se deve ao fato de que um bom professor secundário deve poder manipular bem problemas elementares e que os licenciados em Matemática têm obrigação ainda maior de saber estes tópicos. Optei por questões simples, as quais seriam escolhidas pelos candidatos e inicialmente deixaria a escolha a eles. A prova original era a que está abaixo; meus colegas argumentaram que provas assim poderiam causar dificuldades na leitura e interpretação das questões. Decidi então tirar a parte de diálogo de quatro das questões e grupá-las por ordem de dificuldade, pelo menos no conjunto das cinco primeiras questões. Como o tempo dado seria curto decidi, por orientação de colegas, pedir explicitamente que se dessem pelo menos quatro questões. Minha preferência pessoal é dar questões simples, pondo pressão no tempo, a dar um grupo de questões difíceis com tempo ilimitado. Solicitei também que se dessem dez minutos para leitura da prova.

Outra diretriz na organização desta prova foi exibir questões que provocassem reflexão sobre os problemas tratados, como a extração de raízes, prova dos noves, relações entre cubos e esferas inscritas e circunscritas, teorema de Pitágoras, principio de Cavalière, para o cálculo de volumes, triângulo de Pascal e um fractal, etc.

3. Texto Original do Exame

A idéia que regeu nossa prova foi a já apresentada no ano anterior quando o Professor Rômulo Lins foi o organizador do exame. Apresentamos as questões em forma de diálogo, contendo "dicas" sobre a solução das questões.

4. Reflexões de João E Maria

Reflexão I:

João: A Geometria Analítica de planos no Espaço está diretamente ligada ao estudo de sistema de equações, e algumas vezes necessita-se ter cuidado.

Maria: Sim, vamos olhar a um problema simples: “Dados dois planos no espaço de equações $x + y + z = 2$ e $2x - y + 4z = l$, e o ponto P: (1, - 1, 1). Ache a equação de um plano que passe por P seja paralelo à reta interseção dos planos e que não a contém. Ele pode ser resolvido tanto puramente algebricamente como também vetorialmente. João: Ele é simples, mas admite uma infinidade de soluções. Você pode apresentar uma solução. (Você sabe exibir todas as soluções?)

Reflexão II:

Maria: João, você concorda que a definição de determinante é sofisticada?

João: Sim, um determinante quatro por quatro em geral já tem 24 termos. É trabalhoso, mas não difícil, se você entende o processo.

Maria: Você tem duas maneiras de calcular um determinante: a primeira é usar o desenvolvimento do determinante, e a segunda, que é a minha preferida, é aplicar propriedades de linhas e colunas e colocar zeros abaixo ou acima da diagonal.

Aplique um dos processos ao determinante, cujas linhas são:

$\{(1, 0, 0, 1), (0, 2, 1, -1), (3, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1)\}$

Reflexão III:

João: Uma das demonstrações mais simples do teorema de Pitágoras é a de que se baseia nos casos de semelhança de triângulos.

Maria: Sim, esta demonstração é bem simples; é só observar que a altura relativa ao ângulo reto divide o triângulo em dois outros semelhantes ao primeiro.

João: Obtém-se também todas as relações de Pitágoras! Seguindo a sugestão de Maria, demonstre este teorema. (de Pitágoras)

Reflexão IV:

João: Maria, eu comprei um certo número de ovos e fui arrumá-los numa mesa. Agrupei dois a dois, e sobrou um. Agrupei três a três, e sobrou um. Repeti quatro a quatro, cinco a cinco e seis a seis, e em todas as situações sobrou um ovo; só quando agrupei sete a sete é que consegui arrumar todos os ovos.

Maria: Você quer saber quantos ovos você comprou, não? O problema admite várias soluções.

João: Eu sei, mas eu comprei o número mínimo. Quantos ovos João comprou?

Reflexão V:

João: Maria, você sabe que um dos pontos mais delicados no aprendizado do cálculo é a manipulação algébrica?

Maria: Isto é matéria de primeiro grau e, no entanto, é interessante ver nas provas como as expressões se simplificam, dando quase sempre 0 ou 1.

João: Acho que um bom teste é simplificar a expressão: $((a^2-b^2)/(a-b))- ((a^3-b^3)/(a^2 - b^2))$

Reflexão VI*:*

João: Um bom teste para uma visão geométrica é você inscrever um tetraedro numa esfera, digamos , de raio 1 cm. Maria: Eu já fico satisfeita, se o aluno é capaz de calcular o raio da esfera inscrita neste tetraedro.

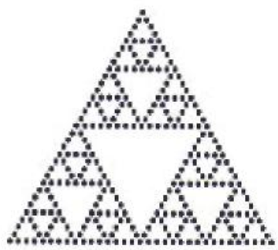
João: Eu gosto de repetir o processo indefinidamente, i.e., inscrevo nesta nova esfera um outro tetraedro e dentro dele inscrevo uma nova esfera, e assim por diante. Daí, eu pergunto: qual é a soma dos volumes de todas estas esferas?

Você é capaz de responder a Maria? E a João? (tetraedro regular)

Reflexão VII:

João chega para Maria e mostra o desenho ao lado:

João: Você gosta do meu desenho? Adivinhe como eu fiz. É simples, é Pascal com um pequeno truque. Você concorda com Maria? (Qual é o truque?)



Reflexão VIII:

João: Eu sempre gostei da prova dos noves; ela se baseia nas propriedades de restos da divisão por nove: o resto da soma ou produto é o resto da soma ou produto dos restos.

Maria: Sim, no fundo olham-se os restos das potências da base 10.

João: O mesmo princípio se aplica a uma prova de divisibilidade por um outro primo qualquer: cada primo tem sua regra.

Explique o que Maria quis dizer e obtenha uma regra de divisibilidade por 7.

ISBN 978-85-89082-23-5

Reflexão IX:

Maria: João, o que é que você achou da prova do ano passado?

João: Eu gostei; havia questões interessantes como a existência tanto de racionais quanto inteiros.

Maria: A enumeração dos racionais é simples: escrevem-se as frações positivas numa mesma linha, em ordem crescente de numeradores, de tal modo que na n-ésima linha estão todas as frações de denominador n. Dai aplica-se a enumeração diagonal.

João: Você tem um problema, você repete números muitas vezes.

Você também tem que incluir os números negativos.

Repetição não importa na enumeração, e o problema dos negativos é fácil de ser contornado.

João: Se isto não importa, me dê a ordem da fração 127/433.

Você concorda com João? Você é capaz de responder à pergunta de

Maria?

O que Maria quis dizer com repetição? Como você contornaria o problema dos números negativos?

Reflexão X:

João: Maria, você se lembra como extrair raízes quadradas?

Maria: Sim, porque eu entendi os dois processos usuais. O primeiro se baseia no estudo da representação decimal, compara-se o quadrado do número 10a + b com o número dado. O segundo se baseia no método das tangentes de Newton.

Você sabe explicar melhor pelo menos um destes métodos e sugerir como tratar raízes cúbicas?

Reflexão XI:

Maria: João, estou com vontade de dar um almoço para o José e Amélia, estreando a nossa nova mesa retangular de doze cadeiras, e convidar mais quatro casais.

João: Amélia é muito ciumenta, não quer que nenhuma mulher se sente na frente nem ao lado de José.

Maria: É um bom problema matemático saber de quantas maneiras podemos acomodar nossos convidados na mesa. Você pode resolver este problema? (e se os casais se sentassem juntos? quantas maneiras?)

Reflexão XII:

João: Estive olhando a fórmula do volume do tronco de pirâmide; você sabia que esta fórmula foi um dos grandes feitos dos matemáticos da antigüidade?

Maria: Sim, eles a deduziram empiricamente. Um grande lance de intuição de engenheiros egípcios. Sua demonstração envolve os princípios do cálculo integral e só veio a ser verificada pelo princípio de Cavalieri.

Você é capaz de explicar o princípio de Cavalieri e aplicá-lo ao cálculo do volume da pirâmide.

5. Gabarito e comentários sobre as questões

Questão I: A questão dada foi a seguinte:

Dados dois planos no espaço de equações $x + y + z = 2$ e $2x - y + 4z = 1$, e o ponto P: (1, -1, 1). Ache a equação de um plano que passe por P seja paralelo à reta interseção dos planos e que não a contém. Aqui basta tomar um plano que passa por P é paralelo a um ou dois planos que determinam a reta dada. Procede-se da seguinte maneira: a equação dos planos paralelos a, por exemplo, $x + y + z = 2$ é $x + y + z = c$, e este último passa por P se e só se $1 + (-1) + 1 = c$ ou $c = 1$. $x + y + z = 1$ é uma solução! Outra solução seria $2x - y + 4z = 7$. Para respondermos à questão original (reflexão I), teríamos que achar a equação do feixe de planos que passam por P e são paralelos; esta reta é $a.(x + y + z - 1) + b.(2x - y + 4z - 7) = 0$. Neste feixe existe um plano com a reta dada; devemos omiti-lo. Para isto achamos um ponto da reta, resolvendo o sistema: $z = 0$, $x = 1$ e $y = 1$. Assim, a condição para que o plano do feixe não passe pela reta dada é $a - 6b \neq 0$.

Esta questão é de Geometria Analítica no Espaço, e o que foi pedido é muito simples.

Uma meia dúzia tentou, e somente um me apresentou uma equação correta.

Somente um tentou fazer vetorialmente.

Questão II: Calcule o determinante, cujas linhas são {(1, 0, 0, 1), (0, 2, 1, -1), (3, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1)}

Aqui, subentende-se que a ordem das linhas é a que foi dada, e todos os que a fizeram a interpretaram desta maneira. Uns vinte tentaram, e somente oito acertaram; muitos ganharam créditos parciais; por exemplo, para quem calculou corretamente um determinante menor três por três. Pode-se fazer esta questão, usando-se o desenvolvimento pela primeira coluna:

det[{(1, 0, 0, 1), (0, 2,1, -1), (3, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1)}]

= 1. det[{(2, 1, - 1), (1, 1, 1), (1, 0, l)}]

0. det[{(1, 0, 1), (3, 1, 1), (0, 0, 1)}]

+ 0. det[I (1, 0, 1), (0, 2, - 1), (0, 1, 1)}]

1. det[{(0, 2, l), (3, 1, 1), (0, 1, 0)}] =det[{(2, 1, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 1)}]

det[{(1, 0, 0), (0, 2,1), (3, 1, 1)}]

=((2 + 1 + 0) - (-l + 0 + 1)) - ((0 + 0 + 3) - (0 + 0 + 0))

=3 - 3 = 0.

Outro processo é usar operações de colunas: Substitui-se a quarta coluna pela sua diferença com a primeira, obtendo-se

det [{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 1, -1), (3, 1, 1, -2), (0, 1, 0, 1)}]

A seguir, substitui-se a quarta coluna pela sua diferença com a segunda e obtém-se um determinante com as duas últimas colunas iguais e, portanto, vale zero:

det[{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 1,-3), (3, 1, 1, -3), (0, 1, 0, 0)}]= 0.

Questão III: Teorema de Pitágoras

Seja A o vértice correspondente ao ângulo reto, H, o pé da altura; e C, o vértice tal que AC é o menor cateto. Seja a = BC, b = AC, c = AB, h = AH, m = BH e n = CH. Vamos usar o seguinte caso de semelhança de triângulos: Sejam dados dois triângulos ABC e A'B'C' tais que <CAB = <C'A'B', <BCA =<B'C'A'. Então, os lados AB, BC, e CA são proporcionais a A'B', B'C', e C'A'. Como em todo

ISBN 978-85-89082-23-5

triângulo retângulo um ângulo é reto, basta então mostrar que, primeiramente, os ângulos <ABC, <HBA, e <CAH são iguais. Por isso construo <ABC = <HBA e <ABC+<BCA = <BCA+<CAH e, daí, segue-se que <ABC = <CAH. Assim, os triângulos ABC, HAC e HBC são semelhantes tendo respectivamente, BC, AC e BC como hipotenusa, e AC, CH, AH como menor cateto. Temos as relações BC/AC = AC/CH = AB/AH, BC/AB = BA/BH = CA/AH, e AB/AC = BH/AH = AH/CH ou a/b = b/m = c/h, a/c = c/n = b/h e c/b = n/h = h/m. Assim $b^2 = am$, $c^2 = an$, $bc = ah$, $bh = mc$, $ch = nb$, $h^2 = mn$, ou $b^2 + C^2 = am + an = a^2$. Alguns interpretaram a questão como se fossem só mostrar a semelhança de triângulos. Considerei metade da questão.

Questão IV: (problema dos ovos)

Seja x o número de ovos; então, x - 1 é divisível por 2,3,4,5, e 6; logo, x -1 é divisível por 60, ou seja, x = 60k + 1 para algum k. Aplicando-se o método das tentativas sucessivas, chega-se a que o menor valor de k para que x seja divisível por 7 é 5. Existe um processo matemático de solução de problemas deste tipo: dados três números a, b, e p tais que a e p sejam relativamente primos, i.e., não tenham fator comum, o problema é encontrar um número x tal que ax-b seja divisível por p. Procede-se da seguinte maneira: Usando-se o algoritmo da divisão, encontram-se números r e s tais que ar + sp = 1. Estes números são únicos a menos um múltiplo de a.p. A solução do problema é b.r, pois a.(b.r) - b = b.s.p. A determinação explícita de r e s é feita em qualquer livro elementar de teoria de números. Muitos trabalharam nesta questão, uns 7 acertaram. Alguns apresentaram somente o resultado final e o aceitamos e Ihes demos crédito total. Isto nem em vestibular se aceita!

Questão V: (expressão)

Simplifique (a2 - b2)/(a - b)) - ((a3 - b3)/(a2 - b2))

Como era de esperar, a simplificação de (a3 - b3)/(a2 - b2) foi um pequeno desastre. É visível que (a3 - b3) é divisível por (a - b), o que bastaria para efetuar a divisão e obter a2 + ab + b2. Assim a expressão fica

$$(a+b)-\frac{(a^2+ab+b^2)}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a^2+ab+b^2)}{a+b}$$

$$=\frac{(a^2+2ab+b^2)-(a^2+ab+b^2)}{a+b}$$

$$=\frac{ab}{a+b}$$

Crédito parcial foi dado para pequenos erros de sinal.

Questão VI: (tetraedro)

Aqui nos esquecemos de dizer que o tetraedro é regular, o que ficou subentendido pelos candidatos. Caso contrário, o problema iria depender das dimensões do tetraedro. Sejam ABCD os vértices do tetraedro, a sua aresta lateral, h sua altura, R o raio da esfera circunscrita, r o raio da esfera inscrita, H o pé da altura baixada pelo vértice A e O o centro do tetraedro. H é o baricentro da base e, portanto, vale 2/3 da altura do triângulo BCD que será a(3)/2, e AH = h = R + r. O volume V do tetredro será (1/3). (Área da base).h. Por outro lado, o ponto O determina quatro pirâmides, cujas bases são as faces do tetraedro, e a altura é r; então, o volume do tetraedro será V = 4.(I/3). (Área da base).r . Assim, h = 4r e R = 3r. Logo, r = R/3, e, no nosso caso, r = 1/3. O cálculo de h não é necessário, porém segue-se que o triângulo AHB é retângulo, AB' = AH2 + HB 2 , a 2 = h 2 +((2/3).a.(3)/2)2, ou h = a. (6)/3. Assim, a razão entre os raios de duas das esferas consecutivas é 1/3, e, conseqüentemente, a razão entre seus volumes é 1/27. A soma dos volumes dos tetraedros será a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, cujo primeiro termo é o volume W da esfera, e a razão é q = 1/27. A fórmula nos dá S = W.(1/(l - q)), ou seja, S (27/26).(4p)/3. Somente um candidato fez a questão.

Questão VII: (triângulo de Pascal)

O triângulo de Pascal consiste nos coeficientes binomiais distribuídos em formas de um triângulo que tem na sua n-ésima linha os coeficientes binomiais Cni, i = 0, 1,.., n

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 30 15 6 1

O truque é substituir cada número ímpar por um disco preto e apagar cada número par. A figura dada é uma das aproximações de um fractal chamado "gasket" (ou cesta?), que leva o nome de quem o estudou, o matemático polonês W. Sierpinski, cujo processo de construção é o seguinte: Parte-se de um triângulo equilátero e remove-se de seu interior o triângulo médio, i.e., o triângulo, cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo. Ficam quatro triângulos equiláteros. Repete-se o processo para estes quatro triângulos. Procede-se indefinidamente.

Um candidato escreveu algumas linhas do triângulo de Pascal, e alguns descreveram a construção da "gasket".

Questão VIII: (divisibilidade)

Dados três números inteiros a, b e p, diremos que a é congruente a b módulo p se p divide b- a, i.e., a e b têm o mesmo resto, quando divididos por p.

A prova dos noves tem por base o seguinte fato. Dado um número N escrito na base dez como

$N = a_r a_{r-1} \ldots a_2 a_1 a_0$

$= a_r 10^r + a_{r-1} 10^{r-1} + \ldots + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0,$

onde cada ai. É um número inteiro de zero a nove. Como o resto da divisão das potências de 10 por 9 é sempre 1, então, N e ar + ar-1 + - - -+ a2 + a1 + a0 são congruentes módulo 9. No caso onde p é 11, os restos das potências de 10 módulo 11 se alternam entre 10 para as potências ímpares, 1 para as potências pares. Como 10 é congruente a -1 módulo 11, podemos enunciar o seguinte critério de divisibilidade: N é divisível por 11 se e só se a soma dos algarismos de ordem par menos, a soma dos algarismos de ordem ímpar é divisível por 11. No caso 7 divido as potências de 10 por 7 e obtenho restos {1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3,2, 6, 4, 5 ....} que são congruentes: módulo 7 a {1, 3, 2, - 1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2 ....}. Estes números se repetem. Obtém-se a seguinte regra: o resto da divisão de N por 7 é o mesmo que o resto da divisão de a0 + 3a1 + 2a2 - a3 - 3a4 - 2a5 + a6 + 3a7 + 2a8 - a9 - 3a10 -2a11 .... Por exemplo, o resto da divisão de 1249875065 por sete é o resto de 5 + 18 + 0 - 5 - 21- 16 + 9 + 12 + 12 - 1 que é congruente a 6 módulo 7, logo este número não é divisível por 7.

Questão IX: (raiz quadrada)

Será melhor usarmos um exemplo para explicar o método. Vamos considerar um número de quatro algarismos de que queremos extrair a raiz quadrada; por exemplo, 5678. Como o quadrado de um número de um só algarismo é no máximo 100, e o quadrado de 100 é 10000, o nosso número procurado é menor que 100. Ele se escreve na notação decimal como x = ab = 10a + b. O quadrado deste número é (10a +b)2 = 100a22 + 20ab + b . A seguir, observamos que o termo dominante desta expressão é 100a2, e para compararmos com nosso número abandonamos os dois últimos algarismos e comparamos a2 com 56, o que corresponde a comparar 100a2 com 5600. Chegamos à conclusão de que a é 7. O resto é 56-49 = 7. Ficamos com 5678 - 4900 = 778 = 20.7b + b2. Agora o termo dominante é 140b ou, abandonando o zero, comparamos 77 com 14b. Em primeira aproximação vamos tentar b = 5. Teremos 20.7b + b2 = 700 + 25 = 725 e sobram 778 - 725 = 53. O 5678 = 752 + 53. Suponhamos que agora quiséssemos continuar o processo. Partiríamos para 567800 e escreveríamos x = 75. 1 0 + c. x2 = 562500 + 2.75.10c + c2. Ou seja, comparamos 5300 com 2.75.10c + c2 = 150.10c + c2, ou 530 com 150 que nos da c = 3. Nosso novo resto é 5300-4500-9 = 791, i.e., 5678 = 75,32 + 7,91. Na próxima etapa, comparamos 2.753.10 com 79100, ou 7910 com 1506d, ou seja, d = 5. O resto será 79100 - 15060.5 - 25 = 79100 -75325 = 3775, ou seja, 5678 = 75,352 + 0,3775. Se quiséssemos a raiz cúbica de 5678, compararíamos com (10a+b)3 = 1000a3 + 300a2 b + 30ab2 + b3). Pelo mesmo

ISBN 978-85-89082-23-5

raciocínio compararíamos a3 com 5, obtendo a = 1. Depois compararíamos 4678 com 300b, obtendo para b = 46/3, ou b = 9. O resto seria 4678-2700-30.81-729 = 4678-(2700+2430+729), o que mostra que 9 é forte. Para b = 8 temos (2400+1820+512 = 4732. 8 ainda é forte. Para b = 7,obteremos 4678 - (2100 + 1370 + 343) = 765. Na próxima etapa acrescento três zeros a 765, obtenho 756000 e comparo com 300.172.c ou c é 7560/(189.3) que é aproximadamente 8. O cálculo mostra que o resto é 38,248. O outro processo não é bem de Newton, pois já era conhecido dos babilônios. Começo com uma primeira aproximação, no nosso caso 70, e tomo como segunda aproximação a média aritmética entre (70 + 5678/70)/2 = 75,5571, e, assim sucessivamente, construo uma seqüência a[n + 1] = (a[n] + N/a[nl)/2, N = 7678, para n = 3 já temos 75, 3528. Este processo é bem mais rápido que o anterior e mais fácil de justificar. Assumindo que a seqüência converge para a, teremos que a = (a + N/a)/2 on 2a2 = a+ N, ou a2 = N. Para uma raiz cúbica, basta tomar a seqüência a[n + 11 = (a[n] + N/(a[n]2))/2.

Questão X: (números de racionais)

A primeira observação sobre repetições é devido ao fato de um número racional ter um número infinito de representações como frações. Seguindo a "dica" de João, escreve-se um tablado onde cada linha contém em ordem todas as frações de um mesmo denominador e se enumeram segundo diagonais. A primeira diagonal é composta da fração 1/1; a segunda, {1/2, 2/1}; a terceira, {1/3,2/2,3/1}. Assim, todas as frações que estão na n-ésima diagonal são tais que a soma do numerador com o denominador é n + 1, e a fração j/n será a j-ésima fração da (n + j - l)-ésima diagonal. A n-ésima diagonal tem n frações, e antes dela teremos 1 + 2 +... + n - 1, elementos nas diagonais que a precedem. Assim, a fração i/n esta na posição (n + j-1) (n + j- 2) 12 + j desta contagem. Assim, 127/433 está na posição 559.278 + 127 = 156088. Um só tentou a primeira parte desta questão.

Questão XI: (casais na mesa)

Temos três posições onde só podem sentar-se Amélia e homens num total de 6 pessoas. Assim, nestas três posições há 6.5.4 possibilidades. Para as demais teremos 8! possibilidades; sendo assim, temos no total 120.8! possibilidades num total de 4838400 possibilidades. Muitos tentaram, porém somente um chegou perto.

Questão XII: (Cavaliere)

O princípio de Cavaliere diz que o volume de urn sólido depende somente das áreas de suas seções. No caso de uma pirâmide de base quadrado de lado a que por conveniência vamos tomar reta, de vértice na origem e base no plano z = h e altura h tem como área da seção z = t igual a A[t] = (at/h)2; assim, seu volume V será a integral de A[t] entre 0 e h. A primitiva de A é (a2/h2)t3/3 ou por substituição V = (1/3)a2h.

6. Observações finais

1. Os candidatos reclamaram do pouco tempo para desenvolver a parte 1, o que já foi observado acima. O tempo curto também seleciona candidatos: os que têm mais destreza se saem melhor.

2. Redação muito geral.
Aqui eu me enganei completamente; pensei que todos fossem desenvolver tópicos de equações com tipos e exemplos. Eu deveria ter dado mais instruções sobre o que desejava. O exame não mostrou muito sobre o conhecimento dos candidatos, porém mostrou o enfoque dos candidatos no ensino do tópico no primeiro e segundo grau, o que procedia, visto o programa ser de Educação Matemática. Dei uma lida geral nas redações e fiquei sem parâmetros para correção e resolvi deixar para os professores questionarem a redação durante a entrevista. Aparentemente não houve tempo para isto.

3. Alguns candidatos apresentaram somente a resposta de questões; aceitei, assumindo que não houve "cola". Refletindo melhor, isto é inadmissível para um

candidato que faz uma prova de ingresso a um programa, prova, cujo objetivo é verificar conhecimentos.

4. O material da prova versava em boa parte sobre conhecimentos, a meu ver, obrigatórios para alguém que queira envolver-se com o ensino do segundo grau. A meu ver, é imperdoável haver erros na simplificacão da expressão da questão V. Para os candidatos que estudaram Geometria Analítica a questão I deveria ser fácil, bem como a de número dois deveria ser fácil para quem fez um curso de Álgebra Linear. O mesmo se aplica à questão XII. A questão IX versava sobre uma questão da prova passada.

5. A distribuição das notas foi a seguinte: A média ficou em torno de 4,5. Neste sentido, a prova foi satisfatória.

7. Recomendações pessoais

l. Uma redação é desejável , porém mais específica

2. Instruir os candidatos de que a prova é de conhecimentos matemáticos, e é isto que se espera deles.

3. A prova deve conter grupos de questões fáceis, médias e difíceis, admitindo troca de questões a ser levado em consideração na seleção. Material do secundário deve estar presente.

4. Pessoalmente acho que deveremos dar mais tempo para leitura e compreensão deste tipo de prova. Acho também que devemos optar por manter a pressão sobre o tempo, e não sobre a dificuldade das questões.

5. Seria interessante os professores entrevistadores analisarem as provas dos candidatos antes da entrevista.

ISBN 978-85-89082-23-5

6. Deve-se explicitar o material que vai ser pedido no exame. Finalmente devo mais uma vez enfatizar que o escrito acima sãos, opiniões pessoais, e que podem até servir de guia para o próximo exame.