ISBN 978-85-89082-23-5

A Ética de Uma Definição Circular de Número Real[1][2]

Roberto Ribeiro Baldino[3]

Resumo

A maioria dos livros textos para o segundo grau introduz números reais por meios que se reduzem à seguinte circularidade: os irracionais são números que não são racionais e os reais são a reunião dos racionais com os irracionais. A Matemática não tem como julgar a conveniência de adotar, em seu ensino, uma proposição que, para ela, é falsa. A questão é ética. Argumentamos que essa circularidade reforça a crença em sua noção abstrata *a priori* de número que rege o discurso sobre os reais e que esse é o mesmo obstáculo contra o qual lutaram Bolzano e Cauchy em suas demonstrações do teorema do valor intermediário. Investimos as categorias de lugar e presença na análise de suas demonstrações para caracterizarmos a superação da circularidade como *construção* dos reais. Para situarmos a questão no momento presente, aplicamos o método da leitura sintomal sobre um parágrafo que resume a construção de Dedekind e mostramos que o autor, Desanti, essencialmente reforça a circularidade. Para argumentarmos em favor da posição hegeliana segundo a qual o dever ético é historicamente situado, analisamos **a performatividade retroativa do significante** *construção* em termos de concepções epistemológicas de Hegel-Lacan, segundo recente exposição de S. Zizek. Chegamos a uma solução da questão ética, situando-a diante de recentes episódios da política brasileira.

Abstract

Most high school textbooks introduce real numbers by ways that amount to the following circularity: irrationals are non-rational numbers and reals are rational plus irrationals. Since this proposition is false, Mathematics does not have means to decide about the convenience of adopting it in its teaching. This is an ethical issue. We argue that this circularity reinforces the belief in an *a priori* abstract conception of number ruling the discourse about the reals; we argue that this is the same obstacle faced by Bolzano and Cauchy in their proofs of the intermediate value theorem. We employ the categories of place and presence in the analysis of their proofs in order to characterize the circunvention of the circularity as a *construction* of the real numbers. In order to situate the question in the present we employ symptomal reading of a paragraph resuming Dedekind's construction and show that its author, Desanti, actually reinforces the circularity. In order to argue in favor of Hegel's position according to which ethical obligations are historically situated, we analyzed the **retroactive performance** of the significant *construction* in terms of Hegel-Lacan epistemology conceptions, as recently exposed by S. Zizek. We reach a solution of the ethical issue by situating it before recent episodes Brazilian's political scene.

---

[1] Digitalizado por Adailton Alves da Silva e Marcos Lübeck, alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro.

[2] Este artigo se baseia na primeira parte de *Análise não-standard: uma alternativa pedagógica* apresentada no I CIBEM, Sevilha, 1990. A segunda parte foi publicada com o título *Analise não-standard: hiper-racionais e o teorema do valor intermediário,* na Revista de Matemática e Estatística da UNESP, vol. 9, 1991.

[3] Prof. Dr. do Departamento de Matemática – IGCE – UNESP – Rio Claro. Coordenador do Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática – GPA.

Introdução

Os autores de livros textos para o primeiro e segundo graus nem sempre conseguem evitar uma circularidade matematicamente comprometedora: os irracionais são os números que não são racionais, e os reais são a reunião dos números racionais e dos irracionais. Para que essa circularidade passe a ser notada, é preciso que se tenha bem arraigada a crença na existência prévia de um conjunto, o dos *números,* constituído anteriormente ao discurso sobre os reais. Os naturais, inteiros, racionais, irracionais e até, com a dificuldade costumeira, os complexes, seriam obtidos por especificação a partir desse conjunto. Ora, do ponto de vista matemático essa concepção não se sustenta: é falsa. Que fazer? Condenar o uso da circularidade no ensino, ainda que como concepção provisória? Admiti-lo, apesar de saber que assim se está reforçando o obstáculo epistemológico[4] segundo o qual a Matemática é uma descrição do real? Adotar ou não essa circularidade no ensino envolve um julgamento de valor que escapa à Matemática, uma vez que, para ela, a proposição é falsa. Poderia a ciência argumentar em favor de uma negação de si própria? No máximo poderia dizer que *assim se ensina mais depressa.* Vá, lá, mas *ensina-se* exatamente o quê? Quais os efeitos pedagógicos, ou seja, que **aprendizagem** resulta desse *ensino*? A questão não é só matemática, é **ética** e, como tal, deve ser tratada pela Educação Matemática. Para resolvê-la, é preciso considerar tanto a história quanto o funcionamento atual da circularidade. É o que faremos.

A falha de Bolzano e Cauchy e a construção dos reais

A criação da Geometria Analítica por Descartes no século XVII, explicitando de maneira surpreendente a relação dos domínios contínuo-geométrico e discreto-numérico, impôs à Álgebra a dupla necessidade de autonomia e rigor:

> A Álgebra, tornada autônoma, devia definir por seus próprios meios os objetos empregados, precisar, estender ela mesma os modos de

[4] Usamos *obstáculo* no sentido forte que este conceito tem em seu proponente (BACHELARD, 1983, p 147-149): "[...] conhecemos *contra* um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal feitos, superando-se o que, no próprio espírito, cria obstáculo à espiritualização. [...] Um obstáculo epistemológico se incrusta no conhecimento não discutido. Hábitos intelectuais que foram úteis e salutares podem, com o tempo, entravar a pesquisa". Assim, o obstáculo é um conhecimento que fracassa diante de uma situação nova, mas que tarda em ser abandonado precisamente porque se revelou fecundo em seu domínio de validade. Ao contrário, a noção de dificuldade que só pode ser avaliada em função do desenvolvimento posterior, o obstáculo pode ser determinado em termos de seu momento presente. É precisamente isso que o torna útil para investigar o estado atual do desenvolvimento de uma ciência e que permite que se pense em adotá-lo como possível estratégia didática.

> emprego. Daí duas espécies de problemas: dar um fundamento puramente analítico às noções e propriedades até então asseguradas somente pela evidência de seu correlato geométrico; desenvolver ambas fora dos limites arbitrários impostos pela intuição. Estabelecimento rigoroso da teoria das funções contínuas, extensão das operações analíticas. (CAVAILLÈS, 1962, p. 31).

Essa problemática esteve presente na Matemática durante o século XIX.

Em 1799, como tese de doutorado, Gauss publicou a primeira demonstração do que hoje chamamos teorema fundamental da Álgebra e que pode se enunciar assim: *todo polinômio de coeficientes reais tem pelo menos uma raiz no corpo dos complexos.* Daí se conclui que, contando multiplicidades, o número de raízes em C igual ao grau do polinômio. A prova de Gauss é como segue (VAN DER WAERDEN, 1985, p. 95): para que $x^m + a_{m-1}x^{m-1}+...+a_1x+a_0= 0$ tenha uma raiz, $z = re^{\iota\varphi}$, é necessário e suficiente que $r^m e^{\iota m\varphi} + a_{m-1}r^{m-1}e^{\iota(m-1)\varphi} + ... + a_1re^{\iota\varphi} + a_0 = 0$, ou seja, é necessário e suficiente que exista uma solução (r, φ) do sistema de equações formado pelas partes real e imaginária:

$$\begin{cases} (1)\ r^m \cos m\varphi + a_{m-1}r^{m-1} \cos(m - 1)\varphi +...\ a_1 r \cos\varphi + a_0 = 0 \\ (2)\ r^m \sin m\varphi + a_{m-1}r^{m-1}\sin(m - 1)\varphi +...\ +a_1r \sin\varphi = 0 \end{cases}$$

Gauss considerou então as curvas em coordenadas polares dadas por (1) e (2) e provou que, para R suficientemente grande, entre duas interseções de uma com a circunferência $|z| = R$ existe uma interseção da outra com $|z| = R$. Daí ele conclui que haverá duas interseções A_1 e B_1 *de* (1) e duas interseções A_2 e B_2 de (2) na situação da figura 1. Concluiu, então, que as duas curvas devem se interceptar em pelo menos um ponto z do círculo $|z|< R$.

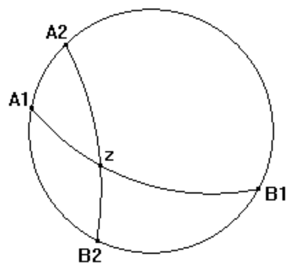


figura 1

Bolzano, pioneiro da tendência de buscar fundamentos analíticos para as demonstrações, procurou fundamentar o argumento final da prova de Gauss de que duas curvas na situação da figura 1 devem se interceptar. Esta propriedade era tida como geometricamente evidente. Ele a enunciou em forma muito próxima ao enunciado moderno do teorema do valor intermediário: *uma linha contínua com curvatura simples, cujas coordenadas são primeiro negativas, depois positivas, deve encontrar o eixo das abscissas em pelo menos um ponto situado entre essas coordenadas.*

É interessante examinar a demonstração que Bolzano produziu naquela época, porque a falha que ela contém revela o mesmo obstáculo epistemológico, cuja forma atual é a circularidade na definição dos reais apontada inicialmente: a crença na metafísica do número. Na prova de Bolzano a definição de função contínua, que ele mais tarde tornou precisa[5], já era essencialmente a de hoje, pelo menos no que toca à propriedade da permanência do sinal: *uma função contínua que assume um valor positivo (ou negativo) para um certo valor da abscissa deve assumir exclusivamente valores positivos (respectivamente negativos) para valores da abscissa suficientemente próximos do valor em questão.*

Bolzano usa o método da bissecção. Começa supondo que $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Anota $v = b - a$ e pergunta se f assume exclusivamente valores positivos entre a e $a + v/2$. Em caso negativo, pergunta se f assume exclusivamente valores positivos entre a e $a + v/2^2$ e assim sucessivamente, até determinar o menor inteiro $m \geq 1$ tal que f assume exclusivamente valores positivos entre a e $a + v/2^m$, assumindo, portanto, valores positivos e negativos entre $u_1 = a + v/2^m$ e $u'_1 = a + v/2^{m-1}$. Como $f(a) > 0$ a propriedade da permanência do sinal garante a existência de um tal m. Recomeça, então, o raciocínio no intervalo $[u_1, u'_1]$ onde a função assume valores positivos e negativos, até determinar o menor inteiro $n \geq 1$ tal que f assume exclusivamente valores positivos entre $a + v/2^m$ e $a = v/2^m + v/2^{m+n}$, assumindo, portanto, valores positivos e negativos entre $u_2 = a + v/2^m + v/2^{m+n}$ e $u'_2 = a + v/2^m + v/2^{m+n-1}$. Recomeça o raciocínio em $[u_2, u'_2]$ e assim sucessivamente.

Bolzano conclui então que, tendo sido obtida a seqüência $\{u_k\}$, se pode calcular seu limite com a aproximação que se quiser. Então o número U, obtido como limite dos u_k, deve ser tal que $f(U) = 0$. De fato, se $f(U) > 0$ (resp. $f(U) < 0$) então, pelo teorema da permanência do sinal, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$) para todo x, $U - \varepsilon < x < U + \varepsilon$. Como $u'_1 - u_1 = v/2^m \leq v/2$, $u'_2 - u_2 = v/2^{m+n} \leq v/2^2$, ..., $u'_k - u_k \leq v/2^k$ e como $\{u_k\}$ converge para U, para algum valor de k tem-se $U - \varepsilon < u_k < u'_k < U + \varepsilon$ o que não é possível, pois f assume valores positivos e negativos entre u_k e u'_k, enquanto entre $U - \varepsilon$ e $U + \varepsilon$ deve manter o mesmo sinal.

O leitor é convidado a examinar essa demonstração com a intenção de descobrir seu ponto falho. Se a sutileza da falha lhe escapa, isso é sintoma de que está dentro do mesmo obstáculo que não foi superado nem por Bolzano sem por Cauchy, que também

[5] Bolzano, em 1817 e Cauchy em 1821, aparentemente de maneira independente, foram as primeiros a enunciar a definição de função contínua como se adota hoje.

publicou uma demonstração desse teorema. Para auxiliarmos o leitor a encontrar o ponto falho, conjecturamos uma demonstração que poderia ter sido produzida, por exemplo, por Weierstrass, já no último terço do Século XIX. Ele concebia os números de um ponto de vista genético e definia os reais como *agregados* de números racionais, um caso particular dos quais são as frações decimais. Segundo a versão moderna dessa concepção, um número (real) é uma seqüência de dígitos, precedida de um número natural e de um sinal ($\pm\ n,n_1n_2n_3$ ...). Em linguagem atual, a demonstração poderia ser assim:

Supõe-se, para simplificar a exposição, que $a = 0$ *e* $b = 1$, f é continua, $f(\mathrm{a}) > 0$, $f(b) < 0$. Divide-se o intervalo [0,1] em dez partes iguais pelos pontos 0, 0.1, 0.2, ... , 0.9, 1. Supondo que f não se anule entre 0 e 1, ela deve assumir valores com sinais contrários nos extremos de ao menos um desses intervalos. Digamos que $f(0.7) > 0$ e $f(0.8) < 0$. Define-se então $u_1 = 0.7$ e divide-se [0.7, 0.8] em dez partes iguais pelos pontos 0.70, 0.71, ..., 0.79, 0.8; procura-se uma dessas partes nos extremos da qual f assume valores com sinais contrários. Digamos que $f(0.76) > 0$ e $f(0.77) < 0$. Define-se $u_2 = 0.76$ e divide-se [0.76, 0.77] em dez partes iguais, determinando u_3, digamos $u_3 = 0.763$ e assim sucessivamente. O número U, procurado, será então 0.7635..., gerado por esse processo de divisão decimal. Pelo teorema da permanência do sinal, tanto a suposição de $f(U) > 0$ como $f(U) < 0$ levam à contradição. Então $f(U) = 0$.

Essa prova é essencialmente a apresentada por Cauchy em 1821. Embora as frações decimais fossem corriqueiras já havia muito, nem Cauchy nem Bolzano as usaram nesse caso. Bolzano usou a base 2, e Cauchy usou uma base qualquer. Examinemos essa demonstração investindo na análise das categorias de lugar e presença. Nos termos acima, ela teria inviabilizado o objetivo de rigor que almejava porque tornaria por demais evidente a presença *a priori* do número. A demonstração motiva o seguinte dialogo:

P: Que número é esse que está presente no lugar para onde converge a seqüência 0.7, 0.76, 0.763, 0.7635,...?

R: É o número 0,7635...

P: Que significam esses três pontinhos?

R: São os dígitos que se vão obtendo pelo processo da divisão decimal.

ISBN 978-85-89082-23-5

Portanto, a pergunta *o que está presente no lugar que o processo indica?* Tem por resposta: *a seqüência de dígitos que o processo produz.* Mas o que é o processo se não a própria seqüência de dígitos que ele produz? Então o processo está presente no lugar que o processo indica. É o processo que está no lugar do processo! A falha fica agora mais evidente. Na concepção vigente na época de Bolzano e Cauchy, algo que se pensava como *número* estava **presente** no **lugar** para onde a seqüência convergia como que à espera de que a convergência se consumasse. A seqüência apenas indicava o **lugar** de uma certa **presença**, conceitualmente distinta dela e constituída anteriormente a ela. A falha da demonstração de Bolzano está neste ponto: *Bolzano conclui então que, tendo sido obtida a seqüência* $\{u_k\}$*, se pode calcular seu limite com a aproximação que se quiser.* Cavaillès enuncia essa falha assim:

> Um rigor completo não é, na verdade, obtido: é necessário admitir que a seqüência convergente a, $a + v/2^m$, $a + v/2^m + u/2^{m+}$",... dá a existência de U. Bolzano crê demonstrar isso provando que a seqüência estando dada, pode-se calcular seu limite com uma aproximação arbitrária, como se a seqüência das aproximações não fosse, por sua vez, uma seqüência convergente (CAVAILLÈS, 1962, p. 34).

A *seqüência dada* gera uma seqüência de aproximações, e ambas erram o alvo: *o número.*

> Boyer se refere à circularidade de modo ainda mais claro: Cauchy tinha enunciado em seu Cours d`analyse que os números irracionais devem ser considerados como limites de seqüências de números racionais. Uma vez que o limite é definido como um número do qual os termos da seqüência se aproximam, de tal modo que finalmente a diferença entre esse número e os termos da seqüência pode ser tornada menor que qualquer número dado, a existência do número irracional depende, na definição de limite, de uma existência conhecida, e, portanto, (depende) da definição prévia da própria quantidade, cuja definição está sendo buscada. Isto é, se pode definir o número $\sqrt{2}$ como limite da seqüência 1, 1.4, 1.41, 1.414, ... porque, para provar que essa seqüência tem um limite, deve-se supor, diante das definições de limite e de convergência, a existência desse número como previamente demonstrada ou definida. Cauchy, aparentemente, não notou a circularidade desse raciocínio [BOYER, 1949, p. 281, grifo meu].

Se a tivesse notado e tivesse podido saltar sobre 50 anos de história, até a década de 1870, talvez não tivesse se preocupado em *demonstrar* a propriedade do valor intermediário: o número procurado seria o próprio processo de geração dos u_k, evidente desde o início. Não haveria o que procurar. Ele não teria pensado que *se pode calcular o* *limite da seqüência com a aproximação que se quiser,* ou que a *seqüência* u_k *tem por limite U*, mas teria dito que o número procurado *U* é a *seqüência* u_k. O que é afinal isto para onde a seqüência converge? Que ser está presente neste lugar? A história terminou evitando a circularidade, assumindo-a, quando se compreendeu que, para constituir uma **presença** no **lugar** que o processo indica, nada mais se tem a não ser o próprio processo.

> O trabalho desses homens (Cauchy, Méray, Weierstrass) levou Heine e Cantor a expressar visões como as deles. Em vez de postularem a existência de um número *S* que fosse o limite de uma série infinita intrinsecamente convergente, eles consideraram *S*, não exatamente como determinado pela série como Méray tinha feito de maneira um tanto indecisa, mas como definido pela série - como simplesmente um símbolo para a própria série [Boyer, 1949, p. 290, grifos do autor].

Em um mesmo ano, 1872, foram publicadas as três construções dos reais, por cortes de racionais, devida a Dedekind, por seqüências fundamentais, devida a Méray e Cantor e (em termos modernos) por frações decimais, já aludida acima, devida a Weierstrass e Haine. O leitor poderá consultar, por exemplo, Spivak (1967), Monteiro (1969) e Bugrov & Nikoliski (1984), respectivamente, para ver os tratamentos matemáticos modernos dessas três construções. Também encontrará a construção de Dedekind exposta e discutida abaixo. Com elas o estatuto de categoria **definição** passa de **descritivo** a **constitutivo** do objeto.

> Os gregos sabiam que, dada uma grandeza, pode-se construir uma seqüência que admita como limite "eu não vejo que eles se atrevessem a considerar a tese inversa, que uma seqüência infinita, dada a priori e satisfazendo algum critério elementar de convergência (...) admitisse limite." (ZARISKI (1926), *apud* BOYER, 1949).

Em vez de uma presença metafísica *a priori* que pedia uma determinação de seu lugar por um processo de aproximações sucessivas, foi o próprio processo de aproximação que se impôs como presença no lugar que ele mesmo indicava. Dissolveu-se a consistência ontológica do número como entidade metafísica. "A passagem dialética para a "verdade" de um objeto implica, portanto, a experiência de sua perda na rede das "mediações", dos possessos formais" (ZIZEK, 1991, p. 29). Creio que ninguém protestará, se eu resumir no seguinte entendimento: Dedekind, Méray, Cantor, Weierstrass e Heine **construíram** os reais. Eis um exemplo de como a Matemática constrói seus objetos.

Desanti e a construção de Dedekind

A história da trajetória da construção dos reais é discutida no artigo *Uma crise de desenvolvimento exemplar: a "descoberta" dos números irracionais,* de Jean T. Desanti (Desanti, 19...). Traduzi-o em 1991, visando a fornecer subsídios para os alunos da disciplina de Análise do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro.

Várias afirmações de Desanti me inquietaram e abriram a oportunidade de discutir questões interessantes. Por exemplo, esta: *Importava* (aos Gregos) *estabelecer uma teoria geral, válida para as grandezas comensuráveis e incomensuráveis.* Seria mesmo esse um objetivo, por exemplo, de Euclides? Ou esta: *O domínio de validade destas operações* (livros V e X de Euclides) é *formado por um sistema de objetos que desempenhou* (a joué le rôle) *para os gregos o papel que teve para nós o conjunto dos números reais.* Não seria melhor dizer que o sistema dos objetos (proporções) desempenha para nós o papel dos números reais quando estudamos a Matemática dos gregos? Porque, para os gregos, as grandezas e os números pertenciam a universos conceituais radicalmente distintos (Lins, 1992). Do artigo tive a impressão de que Desanti projeta sobre a formação social antiga preocupações que lhe são posteriores. Pareceu-me que é nosso pensamento que, ali, se volta ao passado, para entendê-lo à luz do presente. Tratar-se-á da performatividade de algum significante atual? Essas discussões poderão se ampliar quando estiver disponível a tradução de Euclides para o português[6].

Quase no fim do artigo, quando Desanti resume seu entendimento dos cortes de Dedekind, ponto culminante da *crise de desenvolvimento exemplar,* encontrei um parágrafo que me incomodou mais que os outros. Ei-lo:

Sabe-se, na verdade, que se denomina corte sobre o conjunto • dos números racionais (suposto ordenado pela relação $\leq$) um modo de decomposição desse conjunto em duas classes **A** e **B** tais que: **1)** todo número pertencente a **A** é inferior a todo número pertencente a **B**; **2)** todo número inferior a um número pertencente a **A**, pertence a **A** e todo número superior a um número pertencente a **B**, pertence a **B**; **3)** para α pertencente a **A** e β pertencente a **B**, (β - α) pode ser tornado tão pequeno quanto se quiser. (Esta última condição permite mostrar que existe um número único separando as duas

[6] A tradução está sendo feita diretamente do original pelos Professores Irineu Bicudo (coordenador), Henrique G. Murachco e Carlos Henrique Barbosa; será editada pela Editora da UNESP a partir de 1994.

classes). Se existe em **A** um número α superior a todos os outros, todos os x pertencentes a **A** são inferiores ou iguais a esse número. Se existe em **B** um número β inferior a todos os outros, todos os y pertencentes a **B** são superiores ou iguais a β. Dir-se-á, então que, em cada caso, o corte define um número racional. Se não existe em **A** um número superior a todos os outros nem em **B** um número inferior a todos os outros, existirá um número único ξ tal que os x pertencentes a **A** lhe sejam inferiores e que todos os y pertencentes a **B** lhe sejam superiores. Nesse caso o corte define o número irracional ξ. Todo número racional ou irracional é definido por um corte: chama-se conjunto dos números reais o sistema dos números assim definido[7].

Numa primeira leitura eu tinha descuidado desse parágrafo que expressava fatos bem conhecidos, mas, ao traduzi-lo, chamou-me a atenção, primeiro, o truísmo: *Se existe* (S'il existe) *em* **A** *um número* α *superior a todos os outros, todos os x pertencentes a* **A** *são inferiores ou iguais a esse número.* Não poderiam deixar de ser, uma vez que $\alpha > x$ implica $x \leq \alpha$. O mesmo truísmo aparece na frase que segue a essa. Fiz, então, um esforço para entender as duas outras orações como conectadas por um *e*, e não como ligadas por um *se ... então,* e voltei a ler o parágrafo. A notação inusitada da primeira frase: *o conjunto* $\mathfrak{R}$ (e não **Q**) *dos números racionais* (e não *reais),* forneceu-me a chave para extrair dele as lições que contém. Desanti se refere, de fato, aos números racionais, como **escreve,** ou está se referindo aos números reais, como **anota**? Mostrarei que nenhuma das possibilidades evita o caráter aparentemente desastroso do parágrafo.

Tentei ler Desanti pelo que ele **anota,** supondo que ele está se referindo a cortes sobre os reais, com o objetivo de provar a completeza, isto é, que todo corte sobre os

---

[7] On sait en effet qu'on appelle coupure sur 1'ensemble $\mathfrak{R}$ des nombres rationnels (supposé ordené para la relation $\leq$) un mode de décomposition de cet ensemble en deux classes **A** et **B** telles que : **1)** tout nombre appartenant à **A** est inférieur à tout nombre appartenant à **B**; **2)** tout nombre inférieur a un nombre appartenant à **A** appartient à **A** et tout nombre inférieufa un nombre appartenant à **B** appartient à **B**; **3)** pour α appartenant à **A** et β appartenant à **B**, $(\beta - \alpha)$ peut être rendu aussi petit que l'on voudra. (Cette derniére condition permet de montrer qu'il existe un nombre unique séparant les deux classes.) S'il existe dans **A** un nombre α superieur à tout les autres, tous les x appartenant à **A** sont inférieurs ou égaux à ce nombre. S'l existe dans **B** un nombre β inférieur à tous les autres, tous les y appartenant à **B** sont supérieurs ou égaux à β. On dira alors que, dans chaque cas, la coupure définit un nombre rationnel. S'il n'existe pas dans **A** de nombre supérieur à tous autres, ni dans **B** de nombre inférieur à tous les autres, il existera un nombre unique ξ tel que tous les x appartenant a **A** lui soient inférieurs et tous les y appatenant à **B** soient supérieurs. Dans ce cas la coupure définit le nombre irrationel ξ. Tout nombre rationnel ou irrationnel est définit par une coupure: on nomme ensemble des nombres réels le système des nombres ainsi défini.

reais já é caracterizado por um real. Afinal, foi este resultado que Dedekind enunciou como o **axioma da continuidade** da reta e que obrigou a comunidade matemática a discutir seu trabalho, embora muitos talvez tivessem preferido silenciar sobre ele. Para tal leitura eu deveria ler *número* como significando *número real.* Porém, procedendo assim, a definição de número racional ficava errada, porque tinha de ser lida assim: *se existe em* **A** um *número* (real) *superior a todos os outros ... ou se existe em* **B** *um número* (real) *inferior a todos os outros ... dir-se-á que ... o corte define um número racional.* Além disso, tendo sido pressupostos os reais, eu não entendia por que a definição final: *chama-se conjunto dos reais ....* Entretanto, fazia perfeito sentido a afirmação: *Se não existe em* **A** *um número superior a todos os outros nem em* **B** *um número inferior a todos os outros, existirá um número único ξ tal que todos os x pertencentes a* **A** *lhe sejam inferiores* (logo, distintos) *e que todos os y pertencentes a* **B** *lhe sejam superiores* (logo, distintos). Esse número ξ não estaria, então, nem em **A** nem em **B**, o que seria absurdo e mostraria que, ou **A** tem máximo, ou **B** tem mínimo. Porém o artigo nada dizia sobre a demonstração dessa afirmação, o que me fez desistir de minha tentativa de leitura.

Procurei então ler o parágrafo priorizando o que Desanti escreve e não o que anota. Ele estaria se referindo a cortes sobre o conjunto dos racionais, com o objetivo de, só depois, dizer que os reais são definidos como sendo esses cortes. Li, então, o parágrafo com o conceito de número real *in absentia* e procurei entender o termo *número,* que nele aparece por toda parte, como significando *número racional,* já que os reais ainda não o eram. Nesse caso, esta afirmação: *essa última condição permite mostrar que existe um número* (racional) *único separando as duas classes* e esta: […] *existirá um número* (racional) *único ξ tal que todos os x pertencentes a* **A** *lhe sejam inferiores e que todos os y pertencentes a* **B** *lhe sejam superiores,* ficavam, evidentemente, falsas.

Quando lia que um corte é *um modo de decomposição desse conjunto* (dos racionais) em *duas classes* **A** e **B** tais que : **1), 2), 3)** (grifo meu), entendia que Desanti estava descrevendo o *modo de decomposição* e era levado a crer que, por se tratar de uma decomposição, já se tinha $\mathbf{Q} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$. Nesse caso a segunda e a terceira condições eram supérfluas. Para que essas condições fossem entendidas como necessárias, como a redação parecia indicar, era preciso entender que as três condições **definiam** o modo de decomposição, isto é, que esse *modo de decomposição* **era** o que diziam as condições e nada mais. Para obter esse efeito, melhor seria que Desanti tivesse escrito: *um modo de decomposição desse conjunto* (dos racionais) em *duas classes* **A** e **B**, isto é, **1), 2), 3).** Um *isto é,* em vez de *tais que,* faria as três condições passarem de descritivas a constitutivas do corte. Isso revogaria o estatuto ontológico que *o modo de decomposição* tem no parágrafo. Porém, nesse caso, a inferência entre parêntese *(Esta última condição permite mostrar que existe um número único separando as duas classes.)* não garante que $\mathbf{Q} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ como se pode ver, tomando para **A** os racionais negativos e para **B** os positivos. Valem as três condições, mas o zero fica de fora.

Em vez de continuar tentando uma leitura linear, procurei, então, uma leitura **sintomal** do parágrafo. Em vez de desculpar Desanti pela imprecisão de sua comunicação, como eu tinha feito inicialmente, dizendo para mim mesmo: *sim, já sei de que se trata,* preferi o caminho de considerar as imprecisões, não como sua maneira própria de expressar-se, mas como **sintomas**. Notei primeiro a imprecisão lógica de pretender *tornar pequena (rendere petitie)* a diferença (β -α) entre dois números previamente dados α pertencente a **A** e β pertencente a **B**. Maneira de se expressar? Abuso de linguagem? Sim, mas é precisamente nesses pontos que se constitui o sintoma, não na observância do dito a uma regra lógica de sintaxe, mas na diferença entre o dito e a maneira esperada de dizer. Desanti adota a mesma dança dos quantificadores que levou Cauchy a não distinguir continuidade de continuidade uniforme. Desanti certamente teria elementos mais que suficientes para evitar essa confusão. Preferiu introduzi-la, ainda que como estilo, vá lá, mas com efeito sobre quem o lê.

Abandonei, então o plano do **enunciado**, da mensagem codificada pelo emissor e decodificada pelo receptor, e passei ao plano da enunciação: não tomei Desanti pelo que ele quis dizer, mas pelo que ele efetivamente disse, ou melhor, pelo que esse dizer faz, pelas posições que reforça. Percebi, então, que a metafísica do número aparece com força total no fim do parágrafo, nas definições de corte e de número real. De fato, do ponto de vista da Matemática da época em que Desanti escreve e que é a atual, um corte não é um *modo de decomposição* dos racionais, é **um par ordenado de subconjuntos** dos racionais; o *conjunto dos números reais* não **é** o *sistema dos números assim* *definidos,* **é o conjunto dos cortes** assim definidos. A que conduz esse viés na maneira de se expressar de Desanti?

Através de seu modo de expressão, Desanti impõe à categoria de **definição** o funcionamento de **determinação** (produção do efeito de existência) em detrimento do funcionamento de **constituição**, de nomear um conjunto cuja **construção** está axiomaticamente garantida. Com isso permite que a noção de número se intrometa no discurso como significante sem referente. A existência dos números, objetivo precípuo do parágrafo, fica fora de cogitação. Os números preexistem ao que deles se fala. Importa descrevê-los, especificá-los. Os números se dividiriam em racionais, irracionais, complexos, etc. Um certo *modo de decomposição* específica os números reais. *Se não existe em* **A** *um número superior a todos os outros nem em* **B** *um número inferior a todos os outros, existirá um número único* ξ, retirado do manancial inesgotável dos números, *tal que todos os x pertencentes a* **A** *lhe sejam inferiores e que todos os y pertencentes a* **B** *lhe sejam superiores. Nesse caso o corte define o número irracional* ξ, isto é, torna o número ξ mais preciso, **determinado, conhecido**. Bem que Desanti poderia dizer que nesse caso o número ξ **corresponde** a esse corte ou que ele produz esse corte. Ele jamais diz que o número **é** o corte. *Todo número, racional ou irracional, é definido por um corte,* ou seja, lá estão os números e aqui vão os cortes para **defini-los** melhor. *Chama-se conjunto dos números reais o sistema dos números assim definidos,* diz Desanti; poderia dizer: determinados, conhecidos ou ... descobertos, removendo as aspas que ele coloca no título do artigo.

Portanto, Desanti engrena uma marcha à ré na Matemática. Apaga a construção e reforça a presença prévia do número que constitui o ponto de vista da circularidade dos livros textos para o primeiro e segundo graus e de certas apostilas fornecidas aos calouros em boas universidades: os irracionais são os números que não são racionais, e os reais são a reunião dos racionais e dos irracionais. Desanti envolve-se, então, com a questão didático-pedagógica da conveniência de empregar *x* possibilidade de evitar uma tal circularidade no ensino da Matemática. Abre-se também a questão de saber se essa mesma metafísica do número que sustenta a distinção entre cardinais e ordinais no ensino elementar (MENEGHETTI, 1994), enquanto, para a Matemática superior, (teoria dos conjuntos de Zermelo Fraenkel, por exemplo) cardinais e ordinais não se distinguem no caso finito (HALMOS, 1960).

ISBN 978-85-89082-23-5

Meio século entre a criação e a construção

Poderia eu dizer que um filósofo da envergadura de Desanti, precisamente aquele que faz apologia de que, para fazer filosofia de uma ciência, é necessário conhecer profundamente seu conteúdo, viola o espírito da Matemática como ciência fundada na construção axiomática de seus objetos? Preocupado com essa questão, fui procurar o próprio Dedekind: *Diremos que o número α corresponde a esse corte ou que ele produz esse corte.* Ué! Não era exatamente isso que há pouco eu reprovava em Desanti? Deixar de ver que o número **é construído** e não **determinado** pelo corte? Dedekind também teria caído nessa? Procurei os matemáticos historiadores. Leio em Bottazzini:

> [...] Dedekind estava bem consciente de que não tinha iluminado nenhum novo fenômeno, vendo que, como escreveu a Lipschitz "o surgimento de cortes é citado em quase todos os textos de aritmética quando é necessário aproximar números irracionais com precisão arbitrária por números racionais" (BOTTAZZINI, 1986, p. 270).

Ou seja, o próprio Dedekind não hesitava em incluir seus cortes entre os processos de aproximação de irracionais. Bottazzini assinala o erro lógico que **é**, enfim, o mesmo de Bolzano e Cauchy!

Em seu parágrafo decisivo, Dedekind se expressa assim:

> Agora, cada vez que aparece um corte (A_1, A_2) que não é produzido por um número racional, nós **criamos** um novo **irracional** α que nós encaramos como estando completamente definido por esse corte (A_1, A_2). Diremos que o número α corresponde a esse corte, ou que ele produz esse corte (DEDEKIND (1872), *apud* BOTTAZZINI, 1984, p. 268; grifos do original).

Procuro, então, entre os contemporâneos de Dedekind, os vestígios da propalada construção dos reais: Méray, em 1869, se expressava assim: "Se agora **v** é uma "seqüência de Cauchy" e se não existe número racional para o qual **v** converge, dir-se-á que uma tal seqüência converge para um **limite fictício**" (DIEUDONNÉ, 1978, p. 368; grifo do original). E Cantor se expressava assim: "A seqüência (de Cauchy) tem um limite determinado *b*", *b* sendo apenas "um signo particular ligado à seqüência" (DIEUDONNÉ, 1978, p. 369).

Onde está a *construção?* Quem, enfim, falou que o número é o corte? Foi Bertrand Russel, em 1924! Ele "tomaria simplesmente uma das classes de Dedekind e faria dela, e não do elemento de corte, o número. [...] De acordo com esse ponto de vista não há necessidade de criar os números irracionais; eles estão disponíveis no sistema dos números racionais [...]" (BOYER, 1949, p. 293). Só então pôde se escrever o símbolo da construção: $\alpha = A_1$ ou $\alpha = (A_1, A_2)$. Teria sido então a partir desse dia que a Matemática ficou construtiva? Ou teria sido a partir do dia em que, pela primeira vez, se usou a palavra *construção?* Como se pode dizer que Dedekind, Méray, Cantor, Weierstrass e Heine **construíram** os reais e que a Matemática **constrói** seus objetos? Será história da carochinha? Onde está a Verdade? O que realmente aconteceu? Quem distorceu?

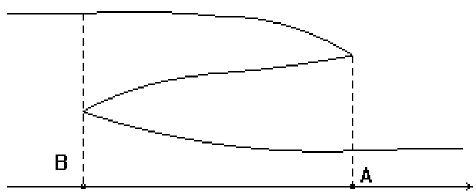
A performatividade retroativa do significante

Dilema! Um falseamento da Matemática por um filósofo da ciência? Um falseamento da história por historiadores matemáticos? Essa observação pode trazer ao leitor uma certa dose de infelicidade, lançando dúvidas sobre as garantias oficiais da Verdade e gerando impotência diante da impossibilidade de chegar a uma conclusão absoluta, uma vez que os meios para isso estão enterrados em textos escritos em alemão, muitos ainda sem tradução para o inglês e que as nossas melhores bibliotecas levariam meses para conseguir... . Minhas observações podem fazer com que o leitor se sinta "[…] cortado do Em-si divino que persiste na transcendência inacessível [...] a "consciência infeliz"[8] [...] é "infeliz" na medida em que tem de suportar a dor da cisão entre o Absoluto e ela mesma. Em que consiste a superação dessa cisão?" (ZIZEK, 1992, p. 34).

Primeiro é preciso reconhecer o fracasso do entendimento da consciência ingênua para apreender o processo dialético regido pela **lógica do significante** em que estão envolvidas **determinações simbólicas**. A metáfora do monte é esclarecedora: se vamos jogando grãos sobre a mesa, num dado momento alguém dirá que temos um monte. "Monte" é uma *determinação simbólica.* Se retirarmos o último grão, acrescentado antes da constatação de que ali há um monte, nem por isso nosso interlocutor dirá que agora não se tem mais um monte. Então, já se tinha um monte um pouco antes da constatação, mas, se a constatação não tivesse sido feita, não se teria tido esse monte um pouco antes. Não é que ele estivesse ali, em estado ainda não constatado. Foi a constatação que retroagiu e fez dele o que ele já era. É assim que se deve entender

[8] A identificação do "leitor" com a "consciência infeliz" deve ser entendida como meramente retórica.

a formulação de Hegel, *o real é racional,* ou seja, sem conceito não há existência. Esse é o fenômeno da **retroatividade** inerente e inevitável em toda determinação simbólica. Para um modelo matemático, pense-se na catástrofe: não há como evitar que, o que se constata em **A**, **produza** uma dobra e passe a existir desde B.



Se agora vamos retirando grãos do monte, um a um, pode-se chegar ao momento em que nosso interlocutor dirá que não se tem mais um monte; aí se tem de novo o mesmo fenômeno de retroação. Mas, se o compromisso do interlocutor com a determinação *monte* for maior, ele poderá chegar a dizer que mesmo um só grão ainda constitui um monte, o monte unitário ou, até, removendo-se todos os grãos, tem-se um monte vazio. Afinal, a matemática está cheia desses exemplos, não só na figura do conjunto vazio, mas também nos retângulos de altura zero e nas funções que não funcionam por serem constantes, exemplos tão apreciados nos cursos de cálculo. Esse é o fenômeno da **performatividade** das determinações simbólicas. Uma vez constatado, as observações ulteriores tendem a confirmar a constatação.

Então, quando se constata que a Matemática constrói seus objetos, *descobre-se* que ela já vinha fazendo isso há algum tempo? De modo algum!

> O principal motivo da crítica hegeliana à teoria do conhecimento "ingênuo" ou "bom senso" consiste em censurá-la por apreender o processo de conhecimento segundo o modelo de uma descoberta, de uma penetração no domínio do já-dado: supõe-se que tomamos conhecimento de uma realidade tal como ela já existia antes desse processo. Essa teoria "ingênua" desconhece o caráter constitutivo do processo de conhecimento quanto a seu objeto, a maneira como o próprio conhecimento modifica seu objeto, dá-lhe, através do ato de conhecimento, a forma que ele possui enquanto objeto de conhecimento (ZIZEK, 1992, p. 31).

Quando se constata que a Matemática constrói seus objetos, **faz-se com que** ela já tenha estado a fazer isso há algum tempo!

Vejamos como é esse *fazer com que* performativo que dá forma ao objeto de conhecimento (os reais) a partir da constatação (a construção) que "retroativamente faz dele o que ele já era" (ZIZEK, 1992, p. 33). Dieudonné, um dos Bourbaki, construtivista (no sentido que a palavra *construção* tem aqui) maior da matemática moderna, que um dia proclamou *abaixo Euclides,* quando cita o parágrafo decisivo de Dedekind, acima transcrito, (DIEUDONNÉ, 1978, p. 368), omite a frase final: *Diremos que o número α*

corresponde a esse corte, ou que ele produz esse corte. Que não se veja aí uma intenção deliberada, muito menos uma maldade. Do ponto de vista da construção, a frase é irrelevante, não faz sentido, não é notada. Ao expor a construção de Cantor, Edwards (EDWARDS, 1979, p, 332) começa assim: “em linguagem moderna, a construção de Cantor resume-se em [...]”. Criação ou construção? É uma questão de linguagem!

Bottazzini, de fato, exerce esse esforço de *linguagem* ao citar Dedekind. Preste atenção às expressões modernas (fora das aspas) que ele teve de articular com as de Dedekind (entre aspas) porque, certamente, não encontrou ali expressões mais “adequadas”:

> Portanto, os números racionais não são suficientes para dar conta “aritmeticamente” das propriedades da linha e, “por isso se torna absolutamente necessário” estender o campo (field) numérico “pela criação de novos números” de tal modo a obter um corpo (field), tendo “a mesma continuidade que a linha reta”, ao qual nos atribuiremos a propriedade de ser completo e sem folhas (BOTTAZZINI, 1986, p. 267).

Por que acrescentar, fora das aspas, esse *sem folhas* que, do ponto de vista moderno, é supérfluo? Para dar um toque de legitimidade antiga à frase? É Boyer, (preste atenção as datas) escrevendo em 1939, que nos conta que $\alpha = A_1$ se deve a Bertrand Russell. Essa passagem não aparece nem em Bottazzini, 1986, nem em Edwards, 1979, nem em Dieudonné, 1978. Em 40 anos o fato tornou-se menos relevante. É por aí que o objeto do conhecimento vai sendo moldado pelo próprio processo de conhecimento: quem conta um conto ... diminui um ponto. Que não se veja aí uma intenção deliberada, muito menos uma maldade. É uma conseqüência inevitável da lógica do significante, cujo efeito sobre o indivíduo Lacan denomina **inconsciente**[9]. Em Hegel,

> o conhecimento não é uma incursão ao conteúdo substantivo, que em si seria indiferente ao processo de conhecimento, mas antes o ato de conhecimento subjetivo está antecipadamente incluído em seu “objeto” substancial, o caminho para a verdade faz parte da própria verdade (ZIZEK, 1992, p. 31).

Se eu estou tendo êxito nesta intervenção textual, a “consciência infeliz” deve estar aflita: então, se não foi construção, foi o quê? Qual a verdadeira História? O que

[9] A melhor maneira de dar uma certa forma ao objeto de conhecimento é apresentá-la como constatação, principalmente porque a constatação, por efeito do significante, já é, em si, a única maneira de dar-lhe essa forma. Esse é o registro do imaginário, da conceituação clássica (althusseriana) de ideologia. Quando se põe a questão: *o que constatar?,* abre-se o domínio do real, do gozo e da luta de classes, mas essa é outra historia.

dizer sobre o que foi a Matemática ontem e sobre o que ela é hoje? Como superar a cisão e chegar à verdade absoluta?

> A superação da cisão consiste na simples constatação (com efeito retroativo e tudo) de que "a consciência infeliz" já é, ela mesma, o campo de mediação, a unidade dos dois momentos opostos, porque os dois momentos recaem nela e não no Absoluto (ib. id. p. 32).

Ou seja, é a própria "consciência infeliz" que se obriga a conceituar a Matemática de algum modo, por exemplo como construção, e que, a seguir, não se conforma com que isso não seja tudo, nem com os compromissos conceituais a que essa decisão a obriga.

A passagem da cisão à síntese dialética é uma "sintetização" qualquer de opostos, um ato produtivo que reconcilie os opostos, apagando a cisão. Ela reduz-se à constatação de que, no fundo, a cisão nunca existiu, *de que era um efeito de nossa perspective.* Abre-se por aí a questão da ética: se mudarmos nossa perspectiva sobre o Bem e o Mal, se abandonarmos a batalha incessante contra o que é inerte, **não** racional e contingente, se atribuirmos ao acaso a "decisão" (de quem?) de dizer que a Matemática constrói seus objetos, se aceitarmos que a história seja contada (deturpada?) segundo essa "decisão", enfim, se admitirmos que o movimento do conceito está inevitavelmente condicionado pela **performatividade retroativa** do significante, o que nos resta fazer? Deixar acontecer? Cair no estoicismo, *homesotase de um indivíduo isolado?* De modo algum! "Para Hegel, o dever ético assume uma forma especificada a cada vez pela situação histórica da comunidade social, da polis." (ib. id. p. 37). Espero ter mostrado que não há outra saída para a questão ética da circularidade: "o Bem colocado como exclusivo coincide com o Mal absoluto" (ib. id. p. 38).

Para responder a questão inicial no plano do entendimento da consciência ingênua, no qual a formulei, pergunto agora que partido tomar entre um Desanti, que busca recuperar a metafísica dos números, e os Dieudonné, Bottazzini, Edwards, que tentam adequar a história a uma certa concepção de construção? Vamos defender a História contra a deturpação arbitrária das construções matemáticas? Ou vamos nos voltar contra a tentativa de manter sempre viva a riqueza inesgotável do conceito de número? É fácil achar a resposta. "Ha um desenvolvimento interno do campo ético; esse campo é a "batalha do espírito contra si mesmo [...]"" (ib. id. p. 38). A quem convém que os números reais sejam um certo *modo de decomposição* e a quem convém que nada mais haja em α a não ser (A_1, A_2)? A quem convém que a definição esvazie o caráter ontológico do objeto e a quem serve enfraquecer o caráter construtivo e peremptório, não das demonstrações, mas das próprias **definições** em Matemática? A quem convém que, diante da lei, sempre se possa fazer deslizar o significado sob o significante? Diz-se que o número é um corte, mas ... sussurra-se que ele é muito mais que isso, que nenhuma *definição* jamais o esgotará, que ele terá sempre o estatuto que o amor e a esperança lhe conferem. A quem convém dizer que a probabilidade de ganhar na loteria é ínfima mas ... Deus é muito mais generoso? Ou que a conta bancária é maior que os vencimentos, mas .... A quem convém que sempre seja necessária uma *prova* que só esconde o que todos já sabem? A que **ética** convém que a **verdade** seja sempre outra e que sempre haja um **mas**? A recente política brasileira, a *polis*, abunda em respostas. Um pouco mais de Matemática (construção dos números reais, quem sabe?) não lhe faria mal.

Referências

BOTTAZZINI, U. **The Higher Calculus:** A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass. New York: Springer-Verlag, 1986.

BOYER, C. B. **The History of the Calculus and its Conceptual Development**. New York: Dover, 1949.

BACHELARD, G. **Epistemologia.** Rio de Janeiro: Zahar, 1983. (Original Epistémologie. Paris: Press Universitaires, 1971).

BUGROV, Ya. S.; NIKOLSKI, S. M. **Matemáticas Superiores; Cálculo diferencial e Integral**. Moscou: Mir, 1984. (Trad., do Russo para o Espanhol).

CAVAILLÈS, J. **Philosophic mathématique**. Paris: Hermann, 1962.

DESANTI, J. T. **Une crise de développement exemplaire:** la “decouverte” des nombres irratinnels. s/d..

DIEUDONNE, J. **Abrégé d´histoire des matkématiques 1700-1900**. Vol. I. Paris: Hermann, 1978.

EDWARDS, C. H. Jr. **The Historical Development of the Calculus**. New York: Springer-Verlag, 1979.

HALMOS, P. **Naive Set Theory**. Toronto: Van Nostrand, 1960.

MENEGHETTI, R. C. G. **Sobre a transposição didática dos cardinais e ordinais**. 1994. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro (SP), UNESP, 1994. (Em execução).

MONTEIRO, L. H. J. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1969.

LINS, R. C. (1992) **A framework for understanding what algebraic thinking is**. Tese de Doutorado, Inglaterra: Nottingham University, 1992.

SPIVAK, M. **Calculus**. New York: Benjamin, 1967.

WAERDEN, B. L. van der. **A History of the Algebra**. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1985.

ZIZEK, S. **O mais sublime dos histéricos:** Hegel com Lacan. Rio de Janeiro: Jorge Zahar. 1992. (Original: Le plus sublime de hysteriques. Hegel passe. França: Point Hors Ligne, 1988).