



# Uma Introdução à Pavimentação Arquimediana do Plano<sup>1</sup>

Euripedes Alves da Silva<sup>2</sup>

Marcos Luiz Lourenço<sup>3</sup>

Luiz Carlos Martins Jr.<sup>4</sup>

## Resumo

Este trabalho faz parte de um estudo mais amplo, que trata da teoria da pavimentação do plano euclidiano e seus grupos de simetria. Neste artigo nos detemos no estudo das pavimentações arquimedianas, e nossa contribuição consiste, basicamente, na determinação de 21 possibilidades de adaptação de cópias congruentes de polígonos regulares, de um ou mais tipos, ao redor de um ponto qualquer do plano.

## Abstract

This work is part of a wider study, which discusses the Euclidean paving and its symmetry groups. In this article we focus the Archimedean paving, that uses as tiles congruent copies of regular polygons of several kinds and our contributions consist basically in determining the 21 adaptation possibilities around any point of the plane.

## 1. O problema da pavimentação e os objetivos do trabalho

Uma pavimentação do plano euclidiano consiste de uma família de conjuntos que o cobrem sem lacunas ou sobreposição. O problema, quando restrito a uma família de polígonos, representa aspectos geométricos e combinatoriais de variada natureza e complexidade, revelando um campo extremamente fértil ainda aberto à investigação, que vai dos domínios da interação entre Geometria Elementar, a Arte e a Álgebra até o fascinante capítulo do ensino da Matemática e de ciências como a Física, a Química e a Biologia. A ornamentação do plano, por exemplo, mostra uma íntima relação da teoria da pavimentação com a Arte. Os trabalhos de Maurits Cornelis Escher (1898-1972), que até hoje intrigam estudiosos da área pela beleza e singularidade de suas ilustrações e mosaicos, pelo complexo entrelaçamento de suas gravuras, tornaram-se incomparáveis quando à sua técnica e habilidade aliaram justamente o conhecimento de grupos de simetria e sistemas de divisão e recobrimento regulares do plano – um domínio comum

<sup>1</sup> Digitalizado por Adailton Alves da Silva e Marcos Lübeck, alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro.

<sup>2</sup> Professor do Departamento de Matemática do IBILCE/UNESP/SJRP.

<sup>3</sup> Professor do Departamento de Educação do IBILCE/UNESP/SJRP.

<sup>4</sup> Bolsista de Iniciação Científica da FAPESP.

à ciência e à arte, determinado por matemáticos e cristalógrafos, mas ainda não explorado por eles próprios.

O interesse pelo recobrimento de superfícies remonta às mais antigas civilizações. (Na Grécia Antiga, por exemplo, já se conheciam os três polígonos regulares que pavimentam o plano). A Johannes Kepler (1571-1630), no entanto, se devem as primeiras investigações junto à teoria da pavimentação do plano euclidiano, com um tratamento matemático para o problema, que aparece na sua obra *Harmonice Mundi*. Kepler não só estabeleceu inúmeras possibilidades de pavimentação, como anteviu aspectos da teoria que até hoje não foram inteiramente explorados.

Depois de Kepler, o problema só veio a ganhar maior importância no início deste século. Mais recentemente, Martin Gardner, matemático conhecido por suas publicações de divulgação, favoreceu a popularização do assunto quando, em 1975, através da revista *Scientific American*, propiciou a descoberta de um equívoco na classificação dos pentágonos convexos que pavimentam o plano, devida a R. Kershner (1969), cuja lista permanece incompleta até hoje. As últimas contribuições à teoria contêm uma forte interface algébrica, a exemplo das classificações das pavimentações isoedrais e isogonais, da dupla B. Grünbaum e G. C. Shephard.

Neste trabalho nos detemos no estudo da classificação dos polígonos regulares que pavimentam o plano, isto é, no estudo das pavimentações arquimedianas, geometricamente caracterizadas por adaptações lado-a-lado nas quais os mesmos polígonos, na mesma ordem cíclica, aparecem ao redor de cada vértice. Nossa contribuição consiste basicamente em determinar as possibilidades de adaptação de cópias congruentes de um ou mais tipos de polígonos regulares ao redor de um ponto qualquer do plano.

A despeito dos recursos elementares que exigem, as pavimentações arquimedianas possuem uma motivação algébrica extraordinária, que as caracteriza também como pavimentações vértice-transitivas, propiciando o conhecimento da geometria das moléculas nas fases dos cristais, através dos grupos de isometria – ou de cristalografia – associados aos mosaicos ou padrões de repetição. (Esta caracterização integra o projeto “Uma Introdução ao Estudo da Pavimentação do Plano Euclidiano e aos Grupos de Simetria de Padrões Planos de Repetição”, em desenvolvimento desde 1991 mediante bolsa de iniciação científica, concedida pela FAPESP).

## 2. Preliminares

### 2.1 Definições

- (i) Um ou mais polígonos pavimentam o plano, se suas cópias congruentes cobrem o plano sem lacunas e sem superposições.
- (ii) Uma pavimentação do plano por polígonos diz-se lado-a-lado quando dois quaisquer desses polígonos satisfazem uma e uma única dentre as seguintes possibilidades: (a) os polígonos não têm ponto em comum; (b) os polígonos têm exatamente um ponto em comum (vértice comum aos polígonos, denominado vértice da pavimentação); (c) os polígonos se interceptam segundo um lado comum.
- (iii) Um movimento rígido qualquer do plano (translações, rotações, reflexões, translações refletidas (glide-reflections) ou combinações desses movimentos) que transformam uma figura nela mesma, isto é, que a deixam invariante como um todo, dizem-se uma (operação de) simetria da figura. As simetrias de qualquer figura formam um grupo, denominado grupo de simetria da figura. Uma pavimentação lado-a-lado do plano por polígonos diz-se vértice-transitiva quando os vértices da pavimentação constituem uma única classe de transitividade sob a ação das simetrias de pavimentação. Em outras palavras, se  $A$  e  $B$  são vértices quaisquer da pavimentação, existe uma simetria de pavimentação que leva  $A$  sobre  $B$ .

### 2.2 Proposições

**Proposição 1** *Se num dos vértices de uma pavimentação do plano, concorrem  $\rho$  polígonos regulares  $P_1, P_2, \dots, P_\rho$  e se  $n_i$  é o número de lados do polígono  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq \rho$ , então podemos afirmar que*

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_\rho} = \frac{\rho - 2}{2}.$$

De fato. Consideremos  $\alpha_i$  as medidas dos ângulos internos de  $P_i$ , para  $1 \leq i \leq \rho$ . Então, de

$$\alpha_i = \frac{n_i - 2}{n_i} \pi \text{ e de } \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\rho = 2\pi,$$

temos

$$2.\pi = \rho.\pi - 2.\pi.\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_\rho}\right)$$

e daí a igualdade procurada.

**Proposição 2** *Numa pavimentação regular do plano, se  $\rho$  é a quantidade de polígonos que concorrem num mesmo vértice, então  $\rho \leq 6$ .*

De fato, se  $n_i$  é o número de lados de  $P_i$ , temos  $n_i \geq 3$  e, assim,  $\frac{1}{n_i} \leq \frac{1}{3}$ .

Da Proposição 1 obtemos  $\rho.\frac{1}{3} \geq (\rho - 2)/2$  e portanto  $\rho \leq 6$ .

*Observação.* A Fórmula de Euler, aplicada a uma pavimentação parcial do plano, mais o artifício da passagem ao limite quando é estendida ao plano inteiro, garantem resultados interessantes, envolvendo  $n$  e  $\rho$ , para polígonos regulares ou não. Em nosso projeto alguns deles aparecem inclusive com demonstrações originais (devidas ao Prof. Ruy Madsen Barbosa), ou mais detalhadas do que as que encontramos na bibliografia disponível.

### 3. Os 21 tipos possíveis de vértices

Estamos agora em condições de determinar quais polígonos regulares podem ser adaptados lado-a-lado ao redor de um ponto do plano. De início faremos isso independentemente da configuração obtida poder estender-se a uma pavimentação do plano inteiro.

**Teorema 1** *Existem 21 combinações, ou tipos de vértices, de polígonos regulares que podem ser adaptados lado-a-lado ao redor de um vértice comum, de maneira a se cobrir sem lacunas ou sobreposição uma vizinhança desse vértice no plano.*

#### 3.1 As combinações possíveis para o caso $\rho = 3$

Podemos supor as medidas dos ângulos internos dos polígonos,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ , satisfazendo as relações  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ .

Por outro lado, de  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$ , obtemos  $\alpha_1 \leq 2\pi/3$  e portanto

$\frac{n_1 - 2}{n_1} \pi \leq \frac{2\pi}{3}$ , ou seja,  $n_1 \leq 6$ . Isso significa que  $\boxed{3 \leq n_1 \leq 6}$  e  $\frac{\pi}{3} \leq \alpha_1 \leq \frac{2\pi}{3}$ . Além disso, ainda obtemos  $\alpha_2 \leq (2\pi - \alpha_1)/2$  e, como  $\alpha_1 \geq \pi/3$ , obtemos  $\alpha_2 \leq 5\pi/6$ . Assim ficamos com  $\frac{\pi}{3} \leq \frac{n_2 - 2}{n_2} \pi \leq \frac{5\pi}{6}$ , ou seja, com  $\boxed{3 \leq n_2 \leq 12}$ .

Passemos agora analisar as possibilidades para  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$ .

**(A)**  $n_1 = 3$ .

Como  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$  e  $\alpha_i < \pi$  para  $i = 1, 2, 3$ , temos necessariamente  $\alpha_1 + \alpha_2 > \pi$ . Assim, se  $n_1 = 3$  temos  $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$  e, portanto,  $\alpha_2 > 2 \cdot \frac{\pi}{3}$ , o que significa que

$(n_2 - 2)/n_2 > 2/3$  e, finalmente, que  $\boxed{n_2 > 6}$ .

Resumindo, para  $n_1 = 3$  e  $6 < n_2 \leq 12$ , as possibilidades para  $n_3$  estarão restritas às seguintes ternas:  $(n_1 = 3, n_2 = 7, n_3)$ ,  $(3, 8, n_3)$ ,  $(3, 9, n_3)$ ,  $(3, 10, n_3)$ ,  $(3, 11, n_3)$  e  $(3, 12, n_3)$ .

Da Proposição 1 obtemos para  $\rho = 3$ ,

$$n_3 = \frac{2 \cdot n_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2 - 2 \cdot (n_1 + n_2)}$$

e a primeira terna nos fornece  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 7$  e  $n_3 = 42$ , significando que uma das possibilidades de adaptação de 3 polígonos regulares em torno de um ponto do plano corresponde ao caso onde aparecem um polígono de 3 lados, um de 7 lados e um de 42 lados, denotado por  $(3, 7, 42)$ . As demais ternas, com exceção de  $(3, 11, n_3)$ , que implica  $n_3$  não natural, fornecem as possibilidades  $(3, 8, 24)$ ,  $(3, 9, 18)$ ,  $(3, 10, 15)$  e  $(3, 12, 12)$ .

**(B)**  $n_1 = 4$ .

Raciocinando como em **(A)**,  $\alpha_1 + \alpha_2 > \pi$  e  $n_1 = 4$  impõem  $\boxed{n_2 > 4}$ , e daí as possibilidades  $(4, 5, 20)$ ,  $(4, 6, 12)$  e  $(4, 8, 8)$  (sendo que em  $(4, 7, n_3)$   $n_3$  não é natural,  $4 < n_2 \leq 12$  e  $n_3 \geq n_2$ , visto que supusemos  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ ).

**(C)**  $n_1 = 5$ .

As relações anteriores nos levam a uma única possibilidade:  $(5, 5, 10)$ .

**(D)**  $n_1 = 6$ .

Neste caso também estamos restritos a uma só possibilidade:  $(6, 6, 6)$ . E, assim, essas 10 possibilidades encerram a investigação para  $\rho = 3$ .

### 3.2 As combinações possíveis para o caso $\rho = 4$

Como  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$ , supondo  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4$ , obtemos  $\alpha_1 \leq \pi/2$  e daí  $(n_1 - 2)/n_1 \leq 1/2$ , donde  $\boxed{3 \leq n_1 \leq 4}$ . Além disso, de  $\alpha_1 \geq \pi/3$ , vem  $\pi/3 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \leq 2\pi$ , obtendo  $\pi/3 + 3\alpha_2 \leq 2\pi$  e, portanto, a desigualdade  $\frac{\pi}{3} \leq \alpha_2 \leq \frac{5\pi}{9}$ . Então,  $\frac{\pi}{3} \leq \frac{n_2 - 2}{n_2} \pi \leq \frac{5\pi}{9}$ , donde obtemos, finalmente  $\boxed{3 \leq n_2 \leq 4}$ . Desta forma, com raciocínio análogo, obtemos  $\boxed{3 \leq n_3 \leq 4}$ .

A partir daí, dentre as quádruplas  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$  que se podem formar, tomando-se da Proposição 1

$$n_4 = \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 - (n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + n_2 \cdot n_3)},$$

obtemos as possibilidades  $(3, 3, 4, 12)$ ,  $(3, 3, 6, 6)$ ,  $(3, 4, 4, 6)$  e  $(4, 4, 4, 4)$ .

### 3.3 As combinações possíveis para o caso $\rho = 5$

No caso  $\rho = 5$  temos apenas duas possibilidades. De fato, a partir de

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 2\pi \text{ e } \frac{\pi}{3} \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4 \leq \alpha_5$$

obtemos  $5\alpha_1 \leq 2\pi$  e daí  $\alpha_1 \leq \frac{2\pi}{5}$ , donde  $(n_1 - 2)/n_1 \leq 2/5$  e, portanto,  $\boxed{n_1 = 3}$ . Quanto

às restrições a  $n_2$  temos, analogamente,  $\frac{\pi}{3} + 4\alpha_2 \leq 2\pi$  e daí  $\alpha_2 \leq \frac{5\pi}{12}$ , de onde

$(n_2 - 2)/n_2 \leq 5/12$  e, portanto,  $\boxed{n_2 = 3}$ . Da mesma forma, de  $\frac{2\pi}{3} + 3\alpha_3 \leq 2\pi$  obtemos

$\boxed{n_3 = 3}$  e de  $\pi + 2\alpha_4 \leq 2\pi$  obtemos  $\boxed{n_4 \leq 4}$ . Das 5-uplas  $(3, 3, 3, 3, n_5)$  e  $(3, 3, 3, 4, n_5)$  chegamos então a  $(3, 3, 3, 3, 6)$  e  $(3, 3, 3, 4, 4)$ .

### 3.4 As combinações possíveis para o caso $\rho = 6$

Neste caso a única possibilidade é dada por  $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6) = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$ , obtida mediante raciocínio análogo ao já desenvolvido. Das combinações acima,  $(3, 3, 4, 12)$ ,  $(3, 3, 6, 6)$ ,  $(3, 4, 4, 6)$  e  $(3, 3, 3, 4, 4)$  admitem duas maneiras distintas de adaptação, bastando alterar a ordem cíclica em que aparecem ao redor do vértice. Surgem assim, respectivamente, as possibilidades,  $(3, 4, 3, 12)$ ,  $(3, 6, 3, 6)$ ,  $(3, 4, 6, 4)$

e (3, 3, 4, 3, 4).

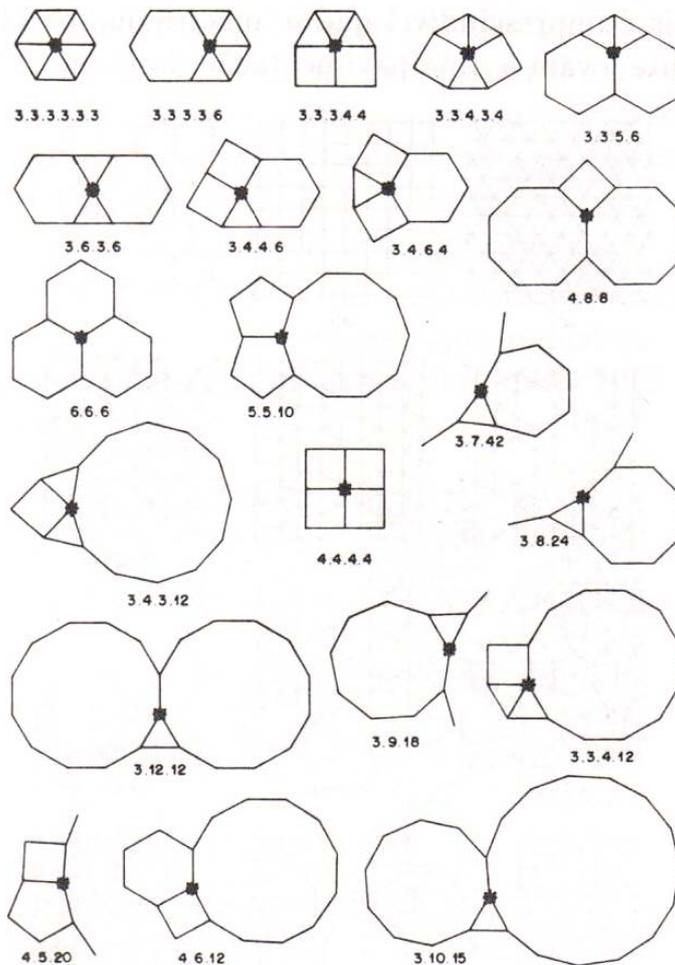
O quadro abaixo resume todos os 21 tipos de vértices (denotados simplificadaamente por *a.b.c. ...*), com destaque para os que levam às pavimentações arquimedianas. A figura logo a seguir, por outro lado, ilustra a configuração geométrica de cada um dos 21 tipos.

Nº de espécies de vértices	tipo de vértice	tipo de pavimentação
1	3.3.3.3.3.3	Arquimediana
2	3.3.3.3.6	Arquimediana
3	3.3.3.4.4	Arquimediana
	3.3.4.3.4	Arquimediana
4	3.3.4.12	
	3.4.3.12	
5	3.3.6.6	
	3.6.3.6	Arquimediana
6	3.4.4.6	
	3.4.6.4	Arquimediana
7	3.6.42	
8	3.8.24	
9	3.9.18	
10	3.10.15	
11	3.12.12	Arquimediana
12	4.4.4.4	Arquimediana
13	4.5.20	
14	4.6.12	Arquimediana
15	4.8.8	Arquimediana
16	5.5.10	
17	6.6.6	Arquimediana

**Fig. 1.** A mudança na ordem cíclica dos polígonos leva a um novo tipo de vértice. Por isso, consideram-se 17 espécies mais 21 tipos de vértices.

#### 4. As pavimentações arquimedianas

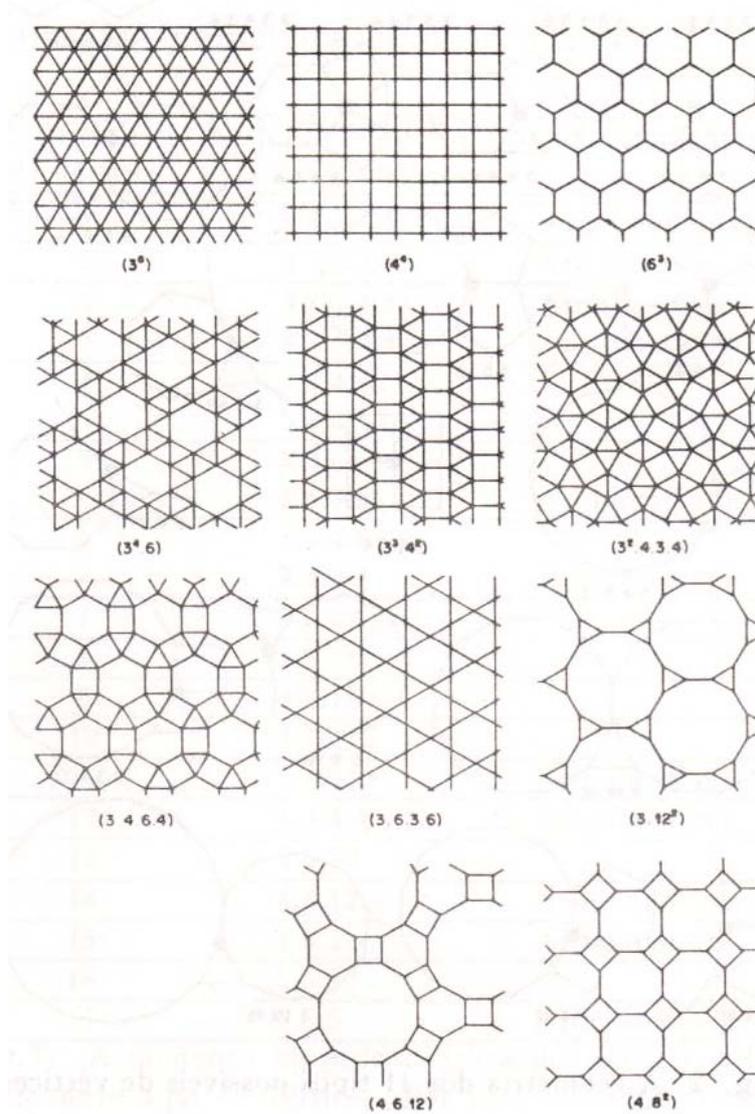
O resultado a seguir estabelece quais dos 21 tipos de vértices obtidos se estendem – de uma pavimentação parcial ao redor de um ponto do plano – a uma pavimentação do plano inteiro. São as pavimentações arquimedianas, caracterizadas do ponto de vista geométrico como pavimentações regulares lado-a-lado, através de um polígono ou mais, cujas configurações não variam, no sentido de que os mesmos polígonos, na mesma ordem cíclica, aparecem ao redor de cada vértice da pavimentação.



**Fig. 2.** A geometria dos 21 tipos possíveis de vértices.

**Teorema 2** *Existem apenas 11 tipos distintos de pavimentações arquimedianas: (3, 3, 3, 3, 3, 3), (3, 3, 3, 3, 6), (3, 3, 3, 4, 4), (3, 3, 4, 3, 4), (3, 6, 3, 6), (3, 4, 6, 4), (3, 12, 12), (4, 4, 4, 4), (4, 6, 12), (4, 8, 8) e (6, 6, 6).*

Para se chegar ao resultado acima, mostra-se primeiramente que, dentre os 21 tipos possíveis de vértices, exatamente 10 não conduzem a uma pavimentação do plano inteiro sempre com um mesmo tipo de vértice. Depois é imprescindível que se mostre que os 11 vértices restantes realmente levam a uma pavimentação do plano.



**Fig. 3.** A geometria dos vértices das 11 pavimentações arquimedianas.

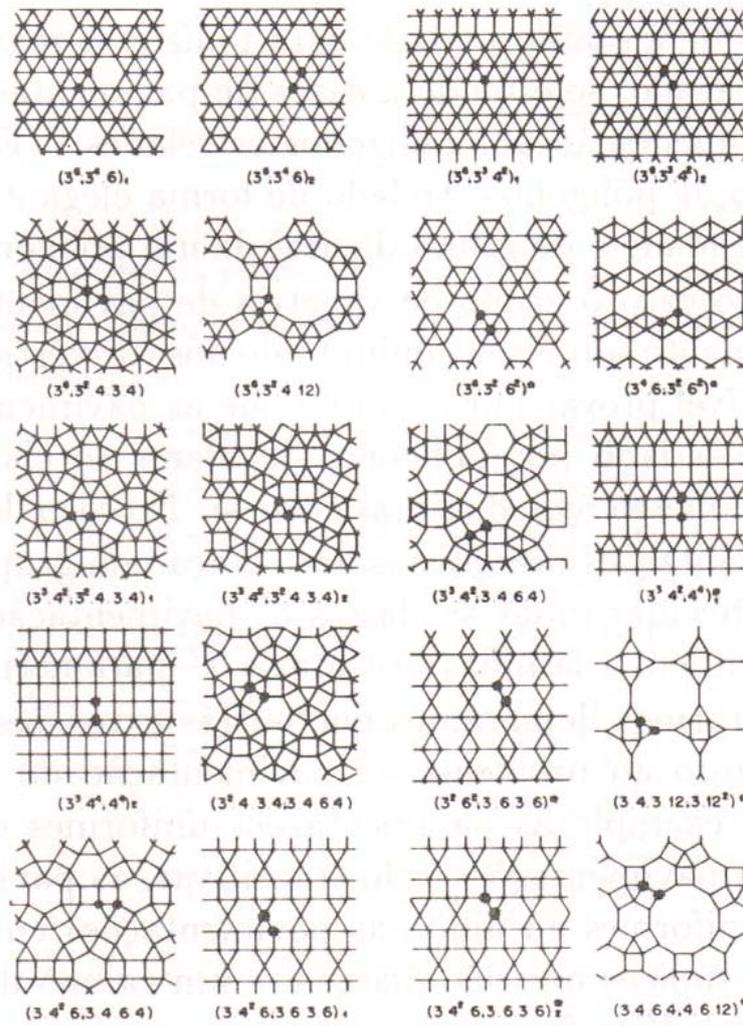
As pavimentações arquimedianas possuem uma caracterização algébrica importante: seus vértices formam uma classe de transitividade sob a ação do grupo de simetria da pavimentação (são vértice-transitivas). Por isso são também referidas como pavimentações uniformes. Este aspecto, aliás, sugere generalizações interessantes, como veremos a seguir.

### 5. Algumas generalizações

De fato, a idéia de uniformidade de uma pavimentação, como acima definida, torna razoável que se indague por exemplo a respeito das pavimentações (lado-a-lado ou não, e mesmo através de polígonos estrelados), cujas simetrias dividem seus vértices em

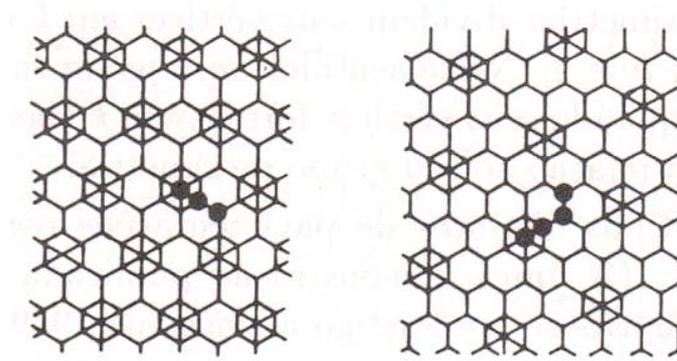
$k$  classes de transitividade,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ . Neste sentido, uma pavimentação do plano seria  $k$ -uniforme quando seus vértices formassem  $k$  classes distintas de transitividade com relação ao seu grupo de simetria.

Existem 20 tipos distintos de pavimentações regulares lado-a-lado 2-uniformes. (A única demonstração publicada desse fato, segundo consta, encontra-se num artigo alemão, de 1969, de autoria de O. Krötenheerdt).



**Fig. 4.** A geometria dos vértices das 20 pavimentações 2-uniformes.

Embora seja possível provar que existem pavimentações  $k$ -uniformes para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ , não se sabem ainda por exemplo as pavimentações 3-uniformes, nem mesmo se possuem estimativas assintóticas práticas para o número de pavimentações  $k$ -uniformes, quando  $k$  é elevado.

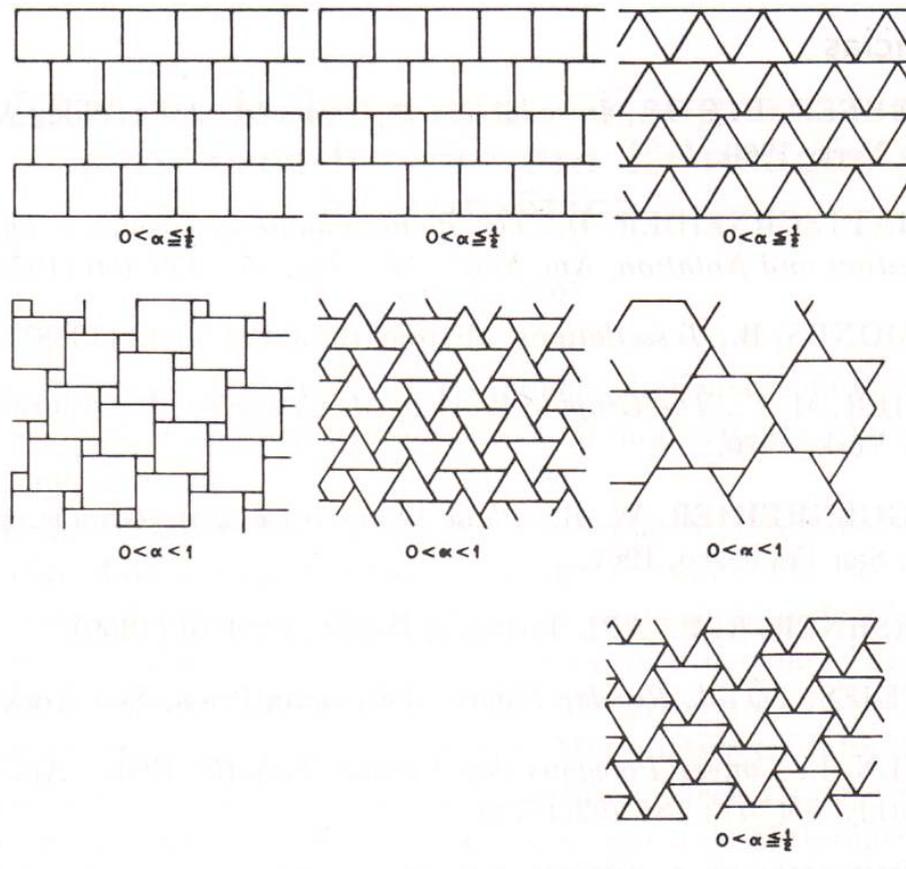


**Fig. 5.** Exemplos de vértices de pavimentações regulares 3 e 4-uniformes.

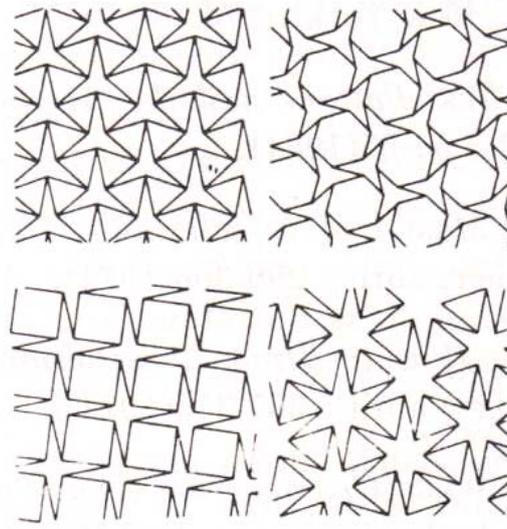
O conceito de  $k$ -uniformidade para polígonos regulares, no sentido acima empregado, se estende a casos de pavimentações não lado-a-lado e de pavimentação por polígonos estrelados. (Coxeter (1969) introduz a noção de polígono estrelado de forma elegante, a partir dos conceitos de densidade e de grupo diedral de um polígono regular).

No primeiro caso o grupo de simetria de pavimentação deve ser atuar transitivamente sobre seu conjunto de nós (os vértices dos polígonos), sendo possível provar por exemplo que as pavimentações 1-uniformes não lado-a-lado por polígonos regulares se classificam em 7 famílias a 1-parâmetro real, distintas entre si. No caso de polígonos estrelados, com adaptações necessárias para a ação do grupo de simetria, também são conhecidas todas as classes de pavimentação 1-uniforme, que se subdividem em 4 famílias distintas a 1-parâmetro real.

Para encerrarmos, lembramos que outras extensões interessantes ainda surgem junto ao problema de pavimentação do plano euclidiano. Como por exemplo as pavimentações uniformes com polígonos não regulares, as pavimentações lado-transitivas, as pavimentações topologicamente uniformes ou ainda as pavimentações em espaços não-euclidianos. São tópicos que dão margem a um campo de investigação desafiador e cujas idéias freqüentemente aparecem em resultados profundos da Matemática e das ciências naturais.



**Fig. 6.** Exemplos da geometria dos vértices das 7 famílias distintas, a 1-parâmetro real  $\alpha$ , de pavimentações não lado-a-lado 1-uniformes, por polígonos regulares.



**Fig. 7.** Exemplos da geometria dos vértices das 4 famílias distintas, a 1-parâmetro real, de pavimentações 1-uniformes, por polígonos estrelados.

## Referências

- COXETER, H. S. M. **Introduction to Geometry**. New York: John Wiley & Sons, 1969.
- SCHATTSCHEIDER, D. The Plane Symmetry Groups: their recognition and notation. **Am. Math.**, Monthly, 85, p. 439-450, 1978.
- EDMONDS, B. Tessellations. **Micromath**, 3(4), p. 40-42, 1988.
- ESCHER, M. C. **The Graphic Work of M. C. Escher**. New York: Hawthorn Books, 1970.
- GUGGENHEIMER, W. H. **Plane Geometry and its Groups**. San Francisco: Holden-Day, 1967.
- KERSHNER, R. B. APL, **Technical Digest**, 8, p. 4-10, 1969.
- FEJES, T. L. **Regular Figures**. New York: Pergamon Press, 1964.
- NIVEN, I. Convex Polygons that Cannot Tile the Plane, **Am. Math.**, Monthly, 85(10), p. 785-792, 1978.
- GRÜNBAUM, B. & SHEPHARD, G. C. Tiling by Regular Polygons, **Mathematics Magazine**, 50(5), p. 227-247, 1977.
- SHUBNIKOV, A. V. & KOPTSIK, V. A. **Symmetry in Science and Art**. New York: Plenum Press, 1974.
- ZURSTADT, B. Tessellations and the Art of M. C. Escher, **Arithmetic Teacher**, 31, p. 54-55, 1984.
- RANUCCI, E. R. Master of Tessellations: M. C. Escher – 1898-1972, **Mathematics Teacher**, April, p. 299-306, 1974.
- TEETERS, J. L. How to Draw Tessellations of the Escher Type, **Mathematics Teacher**, April, p. 307-310, 1974.
- SILVA, E. A. **O Desenho Geométrico e a Pavimentação do Plano como Motivação ao Estudo dos Polígonos**. S. J. Rio Preto/SP: IBILICE/UNESP, 1985. (mimeografado).