ISBN 978-85-89082-23-5

Exame de Ingresso – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática[1]

Irineu Bicudo[2]

O Regimento Geral de Pós-Graduação da Universidade estabelece o exame de ingresso obrigatoriamente em uma disciplina – línguas – em caráter eliminatório.

Durante algum tempo, nosso Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática contentou-se com um exame escrito exclusivamente nessa disciplina, suplementado por uma análise do *Curriculum Vitae* do candidato e por uma entrevista com o mesmo. Foram feitas assim as primeiras seleções. Mas a dificuldade com que alguns ingressantes enfrentavam conceitos básicos da Matemática e a falta de clareza com que se expressavam levaram o Conselho de Área a acrescentar duas outras provas ao Exame de Ingresso: uma prova de Matemática e uma dissertação sobre um tema escolhido de Educação Matemática.

A prova de Matemática, é nosso entendimento, deve abranger as noções fundamentais dessa ciência que são, em geral, ensinadas no Cálculo, na Álgebra e na Geometria dos dois primeiros anos dos nossos Cursos de Graduação. O objetivo, claramente, é ter alunos familiarizados com tais noções.

No caso da dissertação, o que se tem em mente são a clareza do raciocínio e a facilidade de expressão, levando-se também em conta, em menor escala, os aspectos formais da correção gramatical.

Assim, atualmente, o candidato ao ingresso no nosso Programa submete-se às seguintes provas: (i) línguas – inglês, francês ou alemão – eliminatória (o candidato reprovado nessa prova, mas com bom desempenho nas demais, pode ser, eventualmente aceito, devendo submeter-se, depois de um ano, a um novo exame na língua escolhida,

---

[1] Digitalizado por Adailton Alves da Silva e Marcos Lübeck, alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro.

[2] Professor Titular do Departamento de Matemática do IGCE – UNESP – Rio Claro. Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática do IGCE – UNESP – Rio Claro, no período de 15/02/93 a 31/12/93.

aí, então, em caráter absolutamente eliminatório); (ii) Matemática; (iii) dissertação; (iv) entrevista (com análise do *Curriculum Vitae).*

Para exemplificarmos, juntamos a prova de Matemática da última seleção.

Atenção. Essa prova contém mais material do que você possivelmente poderá completar no tempo dado. Assim, escolha o que sabe melhor e não espere poder terminá-la toda. Por favor, não diga que ela é “muito longa”.

1ª Questão

João: Você se lembra de como se calcula a área sob o gráfico de uma função?

Maria: Sim, é por integral.

João: Integral de Riemann ou de Lebesgue?

Maria: Acho que é de Riemann. Eu nunca ouvi falar dessa outra.

João: E que coisa é essa, integral de Riemann?

Maria: É aquela história do somatório. Você quer calcular a área debaixo do gráfico da função *f*, definida num intervalo [*a, b*]. Suponha que a função é bem bonitinha, contínua, positiva, pra não complicar. Você faz uma partição desse intervalo

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$$

escolhe um ponto t_i em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, faz um somatório, chamado soma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

e passa ao limite quando o máximo dos $x_i - x_{i-1}$ tende a zero. Esse limite é a integral de Riemann da função *f*. Ele é anotado

$$\int_a^b f(x)dx\,.$$

João: Sim, mas o que tem isso a ver com a área sob o gráfico de *f*?

Maria: Ora, essa integral é a tal área.

João: Por que essa integral **é** a **tal** área? Tem algum teorema que garanta isso?

Maria: Não sei. Me ensinaram assim ...

João: Então calcule a área sob o gráfico de $f(x) = x^2$ no intervalo [0, 1].

Maria: Ah! Essa é fácil: $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$. Isso é conhecido desde os gregos.

João: Brilhante! Mas você nem falou em somatório. O que esse número $\frac{1}{3}$ tem a ver com as somas de Riemann de que você falou?

Maria: Xi!

João: E essa função aqui: *f(x)* vale zero se *x* é irracional e *f(x)* vale 1 se *x* é racional. Qual é integral dela em [0, 1]? Tem uma área sob o gráfico?

Maria: Não sei.

Se você estivesse no lugar de Maria, que resposta daria?

2ª Questão

O teorema fundamental do cálculo, TFC, diz que a derivada da integral é a própria função:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (1)$$

A continuidade de *f* é suficiente para provar esse resultado que também pode ser enunciado, dizendo que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é uma primitiva de *f*. Fica então bem estabelecido que toda função contínua tem uma primitiva. É isso que o TFC diz, é isso que ele **significa.**

Em particular, a função $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ que é contínua em IR, tem uma primitiva, a saber:

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt \qquad (2)$$

Imaginemos que, entusiasmado com essa certeza, Daniel escreve $\int \sqrt{1+x^4}\,dx$, = ... e se põe a “calcular a integral” pelas estratégias de substituição, integração por partes, etc. Notando que ele está a ponto de se frustrar diante do insucesso, Bibi o adverte:

- *Essa integral não existe.*
- *Existe, sim,* garante Daniel, *acabei de provar, pelo TFC.*
- *É? Então, calcule-a*, desafia a amiga.

ISBN 978-85-89082-23-5

- *Ora*, retruca ele, *não saber calculá-la não prova que ela não existe. Aliás, nenhum livro de cálculo que eu conheça diz que ela não existe*, acrescenta Daniel, debruçando-se de novo sobre seu caderno e disfarçando o orgulho de conhecer os bons livros de cálculo. Porém Bibi vai buscar um livro tido como não tão bom, já amarelado, desprezado pelos sábios ocidentais, escrito por um certo Piskunov. Ela lhe mostra a página 411 do volume I:

Se nenhum dos números $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n}+p$, *for inteiro, a integral* $\int x^m (ax+bx^n)^p\,dx$ *não pode ser expressa por funções elementares.*

Daniel faz $m = 0$, $n = 4$ e $p = 1/2$ e fica perplexo. Então a integral não existe?

Quem tem razão? Daniel ou Bibi? O TFC ou o livro amarelado?

3ª Questão

Se você investir 10 mil cruzeiros (reais?!) a 7% ao mês, como você gostaria que fosse calculado o capital em t meses, por **A)** ou por **B)**? Qual das maneiras é a correta? Alguém que pensou sobre esse problema fez a conta **C)**. O que quis mostrar com essa conta?

A)

$t = 0$	*inicial*	$P(0) = 10$
$t = 1$	1 *mês*	$P(1) = 10 + 7\%10 = 10(1+0{,}07)$
$t = 2$	2 *meses*	$P(2) = 10(1 + 0{,}07) + 7\%10(1 + 0{,}07) = 10(1 + 0{,}07)^2$
$t = 3$	3 *meses*	$P(3) = 10(1 + 0{,}07)^3$
...	...	...
em t	*meses*	$P(t) = 10(1 + 0{,}07)^t$

B)

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = 0{,}07 \\ P(0) = 10 \end{cases}$$

$$\frac{dP}{P} = 0{,}07t$$

$$\ln|P| = 0{,}07t + C$$

$$|P(t)| = e^{0,07t+C} \qquad P(t) = Ke^{0,07t}$$

$$P(0) = 10 \Rightarrow K = 10 \Rightarrow P(t) = 10e^{0,07t}$$

C)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0,07}{n}\right)^{nt} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{0,07}{n}\right)^{\frac{n}{0,07}}\right]^{0,07t}$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0,07}{n}\right)^{\frac{n}{0,07}}\right]^{0,07t}$$

$$= e^{0,07t}$$

4ª Questão

Da janela esquerda do ônibus em movimento você avista ao longe uma árvore, um moinho e uma igreja como na primeira figura. Pouco depois você vê esses objetos como na segunda figura. Qual deles está mais perto de você? E se a janela fosse do lado direito? Isso faria diferença?

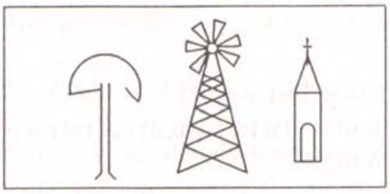


Figura 1

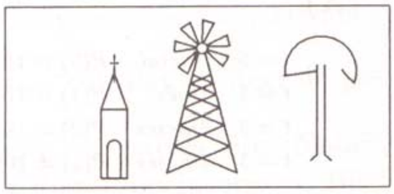


Figura 2

5ª Questão

Emanuel: O que é a derivada?

Joaquim: (**Quase dormindo**) É a tangente, ora.

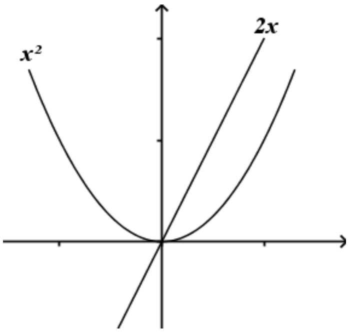
Emanuel: E qual é a derivada de x^2?

Joaquim: É $2x$.

Emanuel: (**Desenhando**) Não está parecendo tangente ....

Explique.

ISBN 978-85-89082-23-5



6ª Questão

Enuncie os principais teoremas e as definições de um dos seguintes tópicos. Se achar que vale a pena, demonstre um resultado interessante.

- Números reais e a completetude.
- Circunferências, tangentes e secantes.
- Grupos e corpos em $\mathbf{Z}$ – módulo – *n*.
- Espaços vetoriais, bases e dimensão.
- Semelhança de triângulos.
- Progressões geométricas; soma de termos.
- Polinômios, raízes e divisibilidade.
- Domínio de integridade e máximo divisor comum.
- Interseção de retas e circunferências na geometria analítica.
- Espaços vetoriais e subespaços.

7ª Questão

A álgebra linear é um assunto didaticamente importante porque reúne o aspecto numérico (operações com matrizes), algébrico (sistemas de equações lineares) e geométrico (vetores). Mostre esses três aspectos em um único exemplo.

8ª Questão

Aluno do professor Geraldo, com a prova na mão, indignado: Professor, por que o senhor deu *errado* nessa minha questão?

Os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são linearmente independentes se para escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tem-se $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$ com $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são linearmente dependentes se para escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$

ISBN 978-85-89082-23-5

todos não nulos tem-se $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$.

Professor Geraldo: É que aqui, em vez de *com* é **então** e aqui, em vez de *todos não,* é **não todos**. Além disso você não usou **qualquer** nem **existe**.

Aluno: Ué! Agora o senhor vai querer corrigir o Português? E até o estilo?

Quem tem razão, o aluno ou o Professor? Por quê?

9ª Questão

Em perspectiva cavaleira esboce a interseção do cilindro com o plano:

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad x + y + z = 9$$

10ª Questão

Um tanque tem 200 litros de água limpa. Deixa-se entrar água salgada com concentração de 50 gramas por litro, à vazão de 3 litros por minuto. A solução escoa pelo ladrão também a 3 litros por minuto. Determine a quantidade de sal no tanque em função do tempo.

11ª Questão

Se o perímetro de um retângulo tende ao infinito, pode-se afirmar que a área: a) fica constante? b) tende a zero? c) tende ao infinito? **Justifique**.

12ª Questão

A partir dos gráficos de *f* e *g*, esboce o gráfico da função composta $f \circ g$ e da função inversa g^{-1}.