ISBN 978-85-89082-23-5

Um ensaio metodológico sobre a congruência e não congruência de triângulos[1][2]

(Parte II)

Ruy Madsen Barbosa[3]
Claudemir Murari [4]

Introdução

Este texto (Parte II) da continuidade ao artigo publicado (Parte I) no BOLEMA n.8, 1992, pp.68-82, onde foi apresentada uma metodologia para a não congruência de triângulos.

O primeiro texto abordou os módulos de ensino números I, II e III. Para esta segunda parte do trabalho utilizamos o modulo de ensino numero IV cujos objetivos principais são: descobrir quantas **e** quais medidas e suficiente conhecer para ter um representante de uma classe de congruência de triângulos e os "casos" de congruências de triângulos.

A metodologia empregada tem apoio em construção gráfica.

Parte II

Modulo IV

A. Objetivos

01. Descobrir quantas e quais medidas é suficiente conhecer para ter um representante de uma classe de congruência de triângulos.

02. Descobrir os casos de congruências de triângulos.

[1] Digitalizado por Anderson Afonso da Silva e Washington Marques, alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro.
[2] Artigo recebido para publicação em março de 1990.
[3] Departamento de Matemática, IGCE, UNESP, Campus de Rio Claro (SP)
[4] Departamento de Matemática, IGCE, UNESP, Campus de Rio Claro (SP)

ISBN 978-85-89082-23-5

B. Material

01. Régua graduada, transferidor e compasso.

C. Atividades

C1. Do professor

1. Fazer uma revisão dos resultados dos módulos anteriores. (Parte I)
2. Propor o problema (devera ser anotado).

• Será que precisamos saber as 6 medidas, dos 3 lados e dos 3 ângulos para ter um representante de uma classe de congruência de triângulos?

• Quantas e quais medidas precisamos conhecer?

03. Lembrar aos alunos que, tendo um representante, sabemos as medidas de todos os outros triângulos de sua classe, pois são as mesmas. Então, conhecendo-se um representante, a classe ficara determinada.

C.2. Dos alunos

Primeira pesquisa (uma medida)

Duas possibilidades :

medida de um lado

medida de um ângulo

C.3. Primeira seqüência de atividades (figura 7)

01. Vamos supor que conhecemos a medida de um lado, seja 5 cm.

Anotem: medida do lado = 5 cm

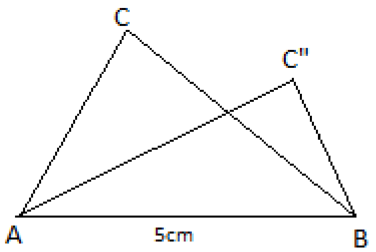


fig. 7

\

02. Desenhem com a régua um segmento de reta com essa medida.

Coloquem nome nos extremos: A e B.

03. Pronto? Marquem um ponto C não pertencente a reta de A e B.

04. Tracem os segmentos AC e BC.

05. Marquem um ponto C diferente de C, também não pertencente a reta dos pontos A e B.

06. Os triângulos ABC e ABC construídos possuem um lado com a medida dada?

Resp.: Sim.

07. Eles são congruentes?

Resp.: Não (em geral)

08. Esses triângulos pertencem a mesma classe de congruência?

Resp.: Não

09. Nos sabemos qual dos dois e o representante de nossa classe de congruência?

Resp.: Não

10. E suficiente conhecermos a medida de um lado para termos um representante de nossa classe de congruência?

Resp.: Não.

C.4. Segunda seqüência de atividades (figura 8)

01. Vamos supor que conhecemos a medida de um ângulo. Seja 30° .

Anotem: medida do ângulo = 30°

02. Desenhem com a régua duas semi-retas a partir de uma mesma origem, formando ângulo de 30° com a ajuda do transferidor. Coloquem nome no vértice do ângulo; A.

03. Pronto? Marquem um ponto B pertencente a uma das semi-retas e um ponto C na outra semi-reta.

04. Tracem o segmento BC.

ISBN 978-85-89082-23-5

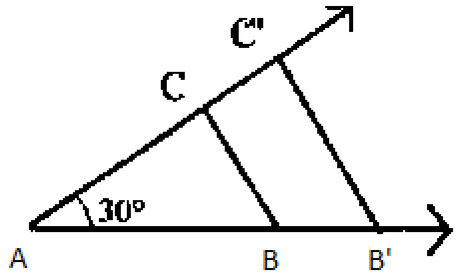


fig. 8

05.Terminaram? Marquem um ponto B' distinto de B na mesma semi-reta de B e um ponto C distinto de C na mesma semi-reta de C.

06. Tracem o segmento B'C'

07 a 10. As atividades são análogas as anteriores de 07 a 10.

11. Qual e a nossa conclusão?

Resp.: Conhecer a medida de um só ângulo não e suficiente para termos um representante de nossa classe de congruência de triângulos (ajude a organizarem a resposta completa **e** oriente-os para anotarem a conclusão).

Segunda pesquisa (duas medidas)

Quatro possibilidades:

- medidas de dois lados
- medida de um lado e medida de um ângulo adjacente
- medida de um lado e medida de um ângulo oposto
- medida de dois ângulos

C.5. Terceira seqüência de atividades (figura 9)

01. Vamos supor que conhecemos as seguintes medidas.

Anotem: medida de um lado = 7 cm, medida de outro lado = 5cm.

02. Desenhem com a régua um segmento de 7 cm. Coloquem nomes nos extremos: A e B.

03. Tracem uma semi-reta a partir de A em qualquer direção **e** marquem nela o ponto C tal que medida de AC = 5 cm.

ISBN 978-85-89082-23-5

04. Tracem o segmento BC.

05. Terminaram? Tracem uma outra semi-reta a partir de A em outra direção e marquem nela o ponto C tal que a medida de AC = 5 cm.

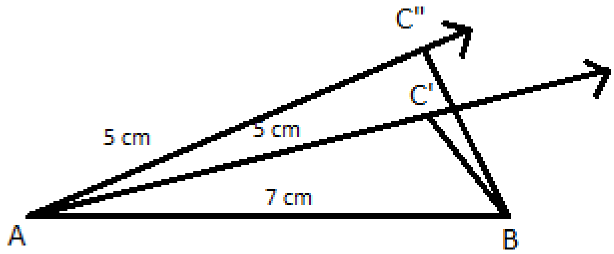


fig. 9

06. Tracem o segmento BC' .

07 a 10. Análogas as anteriores.

11. Qual e a nossa conclusão?

Resp.: Conhecer as medidas de dois lados não e suficiente para termos um representante de nossa classe de congruência de triângulos (ajude a organizarem a resposta completa e oriente-os para anotarem a conclusão).

C.6. Quarta seqüência de atividades (figura 10)

01. Vamos supor agora que conhecemos as seguintes medidas.

Anotem: medida de um lado 6 cm e medida de um ângulo adjacente igual a 38° .

02. Desenhem com a régua um segmento de 6 cm. Coloquem nomes nos extremos: A e B .

03. Tracem com ajuda do transferidor a semi-reta de origem A que forma ângulos de 38°, com o lado AB.

04. Marquem os pontos C e C na semi-reta.

05. Tracem os segmentos BC e BC. 06 a 09. Análogas as anteriores de 07 a 10. 10. Qual a nossa conclusão?

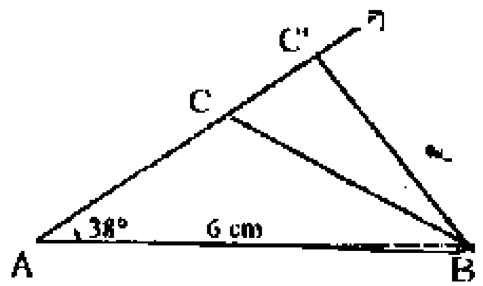


Fig. 10

Resp.: Conhecer a medida de um lado e a medida de um ângulo adjacente não e suficiente para termos um representante da nossa classe de congruência de triângulos (ajude e oriente-os para anotarem a conclusão).

C.7. Quinta seqüência de atividades (figura 11)

01. Vamos supor que conhecemos as seguintes medidas.

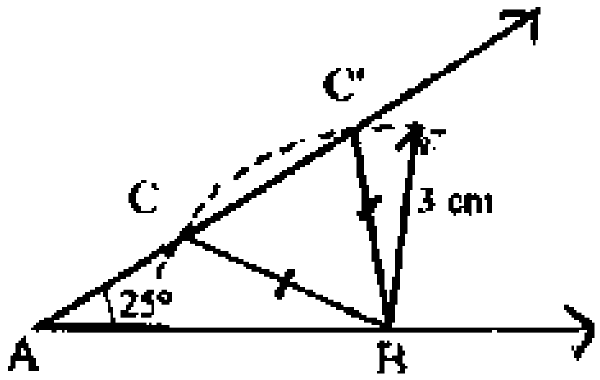
Anotem: medida de um lado igual a 3 cm e medida do ângulo oposto igual a 25°.

02. Desenhem com a régua e ajuda do transferidor duas semi-retas a partir de uma mesma origem, formando um ângulo de 25° Coloquem nome no vértice : A.

03. Marquem um ponto B próximo de A aproximadamente 5 cm numa das semi-retas.

04. Com auxilio da régua abra o seu compasso na medida 3 cm.

05. Com centro em B trace com o compasso um arco que cruzara a outra semi-reta em dois pontos.



06. Coloque nomes nesses pontos: *C e C*

07. Tracem os segmentos BC e BC.

08 a 11. Análogas as atividades correspondentes anteriores que tem como objetivo mostrar que os triângulos ABC e ABC tem as duas medidas dadas e não são congruentes, e, portanto, o representante não fica determinado. 12. Qual e a nossa conclusão?

Resp.: Conhecer a medida de um lado e a medida do ângulo oposto não e suficiente para termos um representante de nossa classe de congruência (ajude e oriente-os para anotarem a conclusão)

ISBN 978-85-89082-23-5

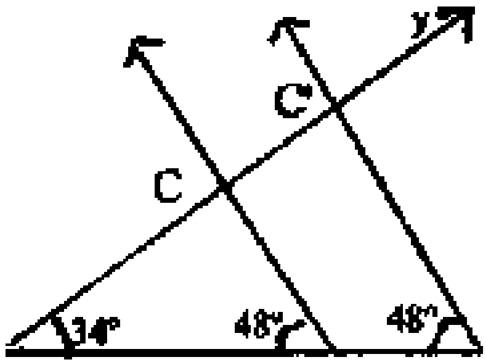
C.8. Sexta sequência de atividades (figura 12)

01. Vamos supor que conhecemos as medidas de dois ângulos.

Anotem: medidas: 34° e 48°.

02. Qual a soma das medidas dos 3 ângulos internos e um triângulo?

Resp.: 180°.



03. Então, na verdade, vocês sabem a medida do outro ângulo. Qual e? Resp.: 98°.

04. Desenhem com a régua e ajuda do transferidor duas semi-retas x e y a partir de uma mesma origem, formando um ângulo de 34°. Coloquem nome no vértice do ângulo: A.

05. Marquem dois pontos BeB[1] distintos na semi-reta x.

06. Tracem com a régua e auxilio do transferidor duas semi-retas, uma a
partir de B e outra a partir de B', formando ângulos de 48° com a semi-reta oposta a x.

07. Coloquem nomes nos cruzamentos com a semi-reta y: C e C”

08 a 11. Análogas as anteriores sobre os triângulos ABC e AB'C, descobrindo que ambos tem as duas medidas dadas, mas não são congruentes.

12. Qual e a nossa conclusão?

Resp.: Conhecer as medidas de dois ângulos (ou dos três) não e suficiente para termos um representante de nossa classe de congruência de triângulos.

Terceira pesquisa (3 medidas)

Seis possibilidades: medida dos três ângulos (já estudado)
medida de dois lados e um ângulo — duas
situações: LAL e ALL.
medida de um lado e dois ângulos — duas

situações: ALA e LAA

medida dos três lados — LLL

C.9. Sétima sequência de atividades (figura 13)

01. Vamos supor que conhecemos a medida de um ângulo e as medidas de dois lados que formam o ângulo.

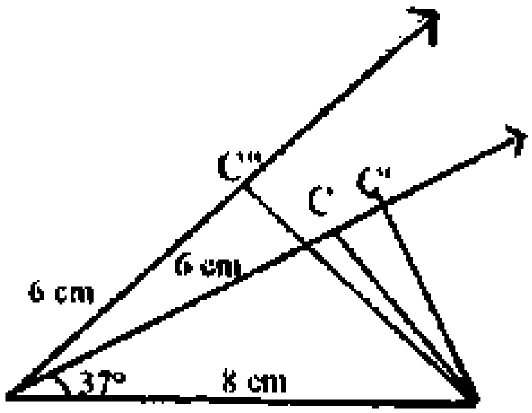
Anotem: medidas dos lados: 6 cm e 8 cm

medida do ângulo formado: 37°

02. Desenhem com a régua um segmento com a medida de um dos lados, por exemplo, com 8 cm. Coloquem nomes nas extremidades: AeB.

03. Com auxilio do transferidor e da régua construam a semi-reta de origem A, formando o ângulo de 37° com o lado AB.

04. Marquem com a régua o ponto C na semi-reta de tal forma que medida de AC=6 cm.



A **fig. 13** **B**

05. Tracem com a régua o segmento BC.

06. O triângulo ABC tem as 3 medidas dadas? Resp.: Sim

07. Essas medidas estão na disposição dada? Resp.: Sim.

08. Por que ?

Resp.: Porque o ângulo de 37° e formado pelos lados que medem 8cm e 6cm.

09 Será que o triângulo ABC e representante de nossa classe de congruência de triângulos? Resp.: Sim, parece, etc.

10. Vamos verificar! Marquem um outro ponto C distinto de C na semi-reta e tracem BC.

11.0 triângulo ABC tem as 3 medidas dadas? Resp.: Não.

12. Porque?

Resp.: O lado AC não tem 6 cm.

13. Em qualquer lugar em que esteja C?

Resp.: Sim, exceto se estiver em C.

14. Tracem outra semi-reta por A e marquem C" tal que medida de AC"=6cm.

Tracem o segmento BC". E, agora, o triângulo ABC" tem as 3medidas dadas? Resp.: Não.

16. Por que ?

Resp.: Agora e o ângulo formado pelos lados que não tem 37°.

17. Então conseguimos construir um representante da classe. Atenção! Qual e a nossa conclusão?

Resp.: Conhecer as medidas de dois lados e a medida do ângulo formado e suficiente para determinarmos um representante da classe de congruência (ajude). Anote a conclusão,

18. Anotem as 3 letras: L A L. Essas 3 letras nessa ordem são para lembrar: **lado — ângulo — lado.** E importante observar a posição da letra A, ela esta encostada nas duas letras L, e para lembrarmos que o ângulo e adjacente aos dois lados. Não esqueçam a sigla: LAL.

19. Encontre, com a régua e o transferidor, as outras medidas desse triângulo.

Resp.: Med.BC = 4,8; Med. B = 48° e Med.C =95°

20. Quais as medidas dos outros triângulos dessa classe?

Resp.: As mesmas.

C1O. Oitava sequência de atividades (figura 14)

01.Vamos supor que conhecemos essas medidas, mas em outra disposição.

Anotem: medida do ângulo = 37°; medida do lado adjacente = 8 cm; medida do lado oposto ao ângulo = 6cm.

02. Qual será a sigla para essas medidas se der certo?

Resp.: ALL.

Comentário: Isso mesmo, assim, a letra A fica encostada só num L, pois o outro lado e oposto ao ângulo.

03. Desenhem com a régua um segmento de 8 cm. Coloquem nomes nos extremos: A e B,

04. Com auxilio do transferidor e da régua desenhem a semi-reta de origem A, formando ângulo de 37° com o lado AB.

05. Com auxilio da régua abram o compasso na medida 6 cm.

06. Façam centro com o compasso em B e tracem um arco de circunferência que vai interseccionar a semi-reta.

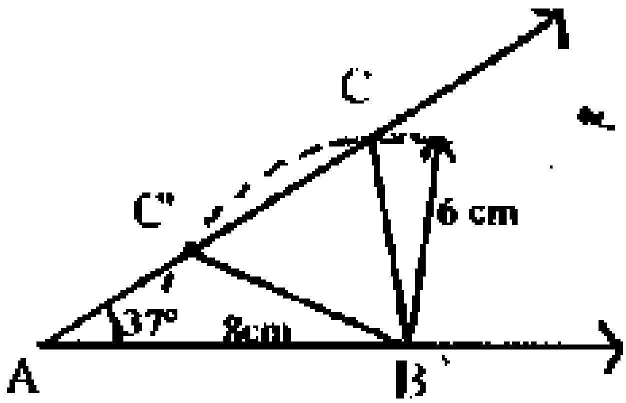
07. Fizeram? Em quantos pontos cruzara?

Resp.: 2

08. Certo. Quem não cortou em dois pontos

complete o arco que cortara em dois Dêem nomes a esses pontos: C’ e C”

09. Tracem com a régua os segmentos BC e BC.



10. Os triângulos ABC e ABC tem as medidas dadas e na disposição dada?

Resp.: Sim.

1 1. Eles são triângulos congruentes entre si?

Resp.: Não.

12. Por que?

Resp.: As medidas dos lados AC e AC são diferentes.

13. Eles pertencem a mesma classe? Resp.: Não.

14. O representante ficou determinado?

Resp.: Não.

15. Qual e a conclusão?

Resp.: Saber a medida de um ângulo, de um lado adjacente e do lado oposto ao ângulo, não e suficiente para determinarmos a classe de congruência (ajude). Anotem. 16

Pronto? A sigla **ALL** deve ser memorizada como não servindo.

Nota 1:

Se um aluno perguntar: "pode o arco feito com o compasso dar um são ponto C, se ele encostar (tangenciar)?"

Isto e muito difícil acontecer. Só acontece se os triângulos da classe são triângulos retângulos, mas então nos estávamos usando 4 medidas (mais uma do ângulo reto) sem percebermos.

Nota 2:

Se um aluno perguntar: "pode o arco não interseccionar a semi-reta?"

Não pode acontecer, as medidas estariam erradas, não existiria classe de triângulos com essas medidas.

C.ll. Nona seqüência de atividades (figura 15)

01. Desta vez vamos imaginar que conhecemos as seguintes medidas.

Anotem: medida de um lado = 6 cm.

medidas dos dois ângulos adjacentes 30° e 40°

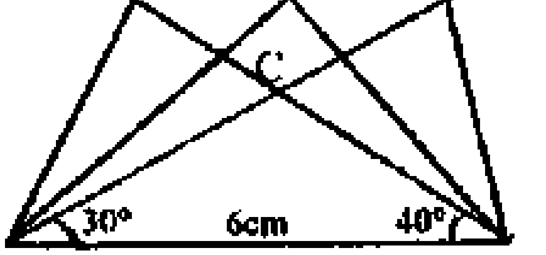
02. Qual será a sigla se der certo?

Resp.: ALA

03. Certo! Colocando a letra L no meio, ela fica encostada nos dois AA,

lembrando que o lado e adjacente aos dois ângulos.

04. Desenhem com a régua um segmento com a medida do lado. Coloquem nomes nos extremos: A e B.



A **fig. 15** **B**

05. Com auxilio do transferidor e da régua construam duas semi-retas, uma com origem em A e outra com origem em B, formando com o lado AB os ângulos de 30° e 40°, respectivamente.

06. Coloquem nome no cruzamento: C.

07. O triângulo ABC tem as 3 medidas dadas e na disposição dada?

Resp.: Sim.

08. Será que ele e representante da nossa classe de triângulos congruentes? Deu um só...

Resp." Deve ser, Sim. Parece. Etc.

09. Vamos verificar. Marquem um outro ponto C na semi-reta de A **e** C,**e** tracem o segmento BC.

10. O triângulo ABC tem as medidas dadas?

Resp.: Não.

11. Porque?

Resp.: Porque o ângulo em B não mede 40°

Porque o outro ângulo agora e menor (ou maior).

12. Marquem um outro ponto C" na outra semi-reta (de B **e** C) **e** tracem o segmento BC". 13.0 triângulo ABC" tem as medidas dadas?

Resp.: Não.

14. Por que?

Resp.: Porque o ângulo em A não tem 30 °.

Porque o outro ângulo agora e menor (ou maior).

15. Marquem um outro ponto C" não pertencente as semi-retas e tracem os segmentos AC" e BC". v

16. O triângulo ABC" tem as medidas dadas?

Resp.: Não,

17. Por que?

Resp.; Agora piorou, os dois ângulos adjacentes não medem 30° e 40°-

18. Então conseguimos um representante da classe com essas 3

medidas.

Atenção! Qual e a nossa conclusão ?

Resp.: Saber as medidas de um lado e dos dois ângulos adjacentes e suficiente para determinarmos a classe de congruência de triângulos (ajude). Anotem.

19. Escrevam a sigla.

Resp.: ALA

20. Certo. Essas 3 letras nessa ordem lembram ângulo—lado—ângulo.

21. Por que e preciso o L ficar no meio?

Resp.: Para lembrar que o lado e adjacente aos dois ângulos.

C.12. Décima seqüência de atividades

01. Vamos agora supor que conhecemos essas mesmas medidas em outra disposição.

Anotem:
medida do lado = 6 cm
medida do ângulo adjacente = 30°
medida do ângulo oposto ao lado = 40°

02. Qual e a soma das medidas desses dois ângulos?

Resp.: 70°

03. Quanto mede o outro ângulo adjacente ao lado?

Resp.: 180° -70°= 110°

04. Esquecendo o ângulo oposto, qual e a sigla do que conhecemos agora?

Resp.: ALA

05. Conhecer A L A e ou não suficiente para determinarmos a classe de congruência de triângulos? Resp.: E suficiente.

06. Por quê?

Resp.: É a sigla da experiência anterior, que deu certo. Etc.

07. Então, conhecendo as 3 medidas dadas, é suficiente?

Resp.: Sim

08. Qual é a nossa conclusão?

Resp.: Conhecer a medida de um lado, de um ângulo adjacente e do ângulo oposto ao lado, é suficiente para termos o representante, para determinarmos a classe (ajude). Anotem.

9. Qual é a nova sigla que dá certo? Resp.:L A A
10. Leiam a sigla.
    Resp.: Lado – ângulo - ângulo
11. O primeiro A está perto do L, então o que ele indica?
    Resp.: Ângulo adjacente.
12. O segundo A esta longe do L, então o que indica?
    Resp.: Ângulo oposto.

Essa sigla é ótima, mas há muitos livros que usam **A L A °**. Reparem na bolinha "o" no segundo A, é para indicar ângulo oposto, e é lido: ângulo – lado - ângulo-oposto. Qual que vocês preferem.

Resp.: ?

C.13. Décima primeira seqüência de atividades (figura 16)

01. Vamos ver agora o caso que vocês estavam esperando. Conhecemos as medidas dos 3 lados. Anotem: 8 cm, 6 cm e 7 cm.

02. Desenhem com a régua um segmento de 8 cm. Coloquem nomes nos extremos: A e B.

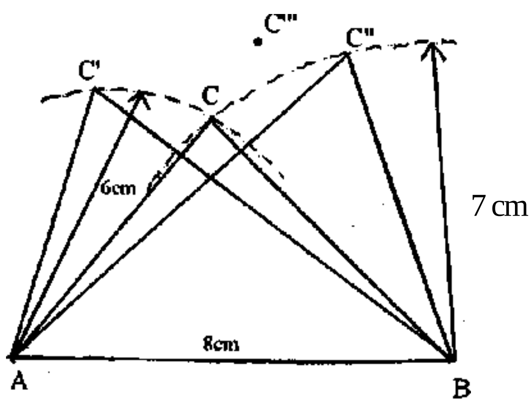


fig- 16

3. Com auxílio da régua abram o compasso na medida 6 cm. Façam um arco de circunferência com centro em A.
4. Com auxílio da régua abram o compasso na medida 7 cm. Façam centro em B **e** tracem o arco de circunferência, cruzando o outro arco.
5. Marquem no cruzamento o nome do ponto: C.

6. Tracem AC e BC.
7. O triângulo ABC tem as medidas dadas?
   Resp.: Sim,
8. Nós construímos só um triângulo, será que ele é representante da classe?
   Resp.: Sim, parece, etc.
9. Vamos verificar. Marquem um ponto C no primeiro arco, mas distintos de C.
10. Tracem AC' e BC'.
11. O triângulo ABC' tem as medidas dadas?
    Resp.: Não.
12. Por quê?
    Resp.: O lado BC" não mede 7 cm.
13. E, se marcarmos um ponto C" no outro arco, como será o triângulo ABC"?
    Resp.: Agora a medida que não esta certa é da AC".
14. E se marcarmos um ponto C'" em qualquer lugar não pertencente aos arcos? Como vai ser o triângulo ABC'"?
    Resp.: Vai piorar porque os lados AC'" e BC'" ficam com medidas diferentes de 6 cm e de 7 cm .
15. Então só o ponto C forneceu triângulo com medidas certas. Qual é a nossa conclusão?
    Resp.: Conhecer as medidas dos 3 lados é suficiente para termos um representante (ou para determinarmos a classe de triângulos congruentes) (ajude). Anotem.
16. Qual é a sigla?
    Resp.: LLL
    Leiam: lado - lado - lado.

Nota: Se um aluno perguntar: "Mas, se eu desenhar os arcos para o lado debaixo de AB (semiplano oposto), eles vão se cruzar num outro ponto C' e teremos outro triângulo. Qual é o representante, o de cima ou o debaixo?

Julgamos que a resposta poderá ser simplesmente que o triângulo ABC' debaixo é congruente ao de cima, e, portanto, qualquer um é representante; ou vamos construir, e você descobrirá que são congruentes. Na verdade este possível triângulo simétrico é usado num tratamento teórico para se provar o caso LLL, quando se admite como postulado único o caso LAL.

Resumo

Após as atividades, seria conveniente que os alunos fizessem um resumo de todas as pesquisas experimentais realizadas, anotando as condições suficientes e as não suficientes, dando ênfase as siglas e seu entendimento.

Primeira Pesquisa:

Uma só medida: ou L ou A (não suficientes).

Segunda Pesquisa:

Duas medidas: LLLA – AL - AA (não suficientes)

Terceira Pesquisa:

Três medidas: LAL - ALA - LAA - LLL (suficiente)

ALL - AAA (não suficiente)

Sugerimos ao professor só nesta fase chamar essas condições suficientes de "Os 4 casos de congruência de triângulos"

l° caso: Uma classe de congruência de triângulos está determinada, se sabemos as 3 medidas nessa ordem: LAL.

2°caso: Uma classe de congruência de triângulos está determinada, se sabemos as 3 medidas nessa ordem: A L A .

3°caso: Uma classe de congruência de triângulos está determinada, se sabemos as 3 medidas nessa ordem: L A A .

4°caso: Uma classe de congruência de triângulos está determinada, se sabemos as 3 medidas: LLL.

Transferência das formas

Na prática para se testar a congruência de dois triângulos se faz necessária a transferência da forma anterior para a forma tradicional: "dois triângulos são congruentes se e só se possuem... respectivamente congruentes", o que pode ser feito explicitamente ou não.

Assim, por exemplo, no 1° caso (LAL): Dispõe-se de dois triângulos dos quais sabemos que possuem as medidas de um ângulo e dos lados que formam esse ângulo respectivamente iguais. Basta observar que a classe do primeiro triângulo é a mesma do segundo triângulo. Ambos são representantes da mesma classe. Segue-se que são congruentes.

Nota 1: Não desenvolveremos mais este item em face do trabalho posterior da terceira parte da pesquisa.

Nota 2: Para as seqüências de atividades do modulo IV pode ser adotada uma forma alternativa de trabalho. Assim, na primeira por exemplo, após a atividade 4 mandar-se-ia cortar o triângulo ABC construído, e os alunos iriam comparar com os dos colegas (por superposição), verificando que não são congruentes, portanto com a medida dada podem ser construídos muitos (uma infinidade de) triângulos, e a conclusão é a mesma. No entanto para as situações de suficiência verificariam que todos obtiveram triângulos congruentes, cada um construiu um representante, a classe ficou determinada

Referências bibliográficas

ALLEN, F.B. et al. (1960). **Geometry student's text** (Part I). S.M.S.G., Yale Univ.

ALLEN, F.B. et at. (1960). **Geometry** (Teacher's Comentary Part I). S.M.S.G., Yale Univ.

ANDERSON, R. (1960). **Concepts of informal geometry**. S.M.S.G., Yale Univ.

BARBOSA, J.L.M (1985). **Geometria Euclidiana plana.** Rio de Janeiro: SBM.

BARBOSA, Rui Madsen (1992). Números de Fibonacci e triângulos não congruentes com cinco pares de elementos respectivamente congruentes. Blumenau. **Boletim Departamento de Matemática**, FURB, n.27, pp. 1-10.

BOUWSMA, W.D. (1972). **Geometry for teachers** NY.; MacMillan.

BUNDT, L.N.H. (1963). **Introdução ao curso de Geometria Plana**, Rio de Janeiro: Fundo de Cultura.

FORDER, J.H (1958). **The foundations of Euclidian Geometry** NY: Dover.

HAAG, Eardgrove and Hill. (1970). **Elementary geometry.** Massachussets: Addison Wesley.

JACOBS, H.R. (1974). **Geometry.** NY: Freeman.

MOISE, Downs. (1975). **Geometria moderna**. Sao Paulo: Blucher.

MURARI, Claudemir & BARBOSA, Rui Madsen. (1990). **Divagações sobre um problema curioso. Revista do professor de Matemática** (SBM).v.16, pp. 13-18.

MURARI, Claudemir & BARBOSA, Rui Madsen. (1992). Um ensaio metodológico sobre a congruência e não congruência de triângulos (Parte I). **Bolema, n.8,** pp.68-82.