ISBN 978-85-89082-23-5

Modelagem na Matemagicalândia[1]

Maria Salett Biembengut[2]
Rodney Carlos Bassanezi[3]

Modelagem Matemática, arte utilizada por grandes matemáticos na resolução ou compreensão de situações problemas do mundo real, pode ser utilizada como uma estratégia no Ensino-Aprendizagem de conteúdo matemático.

A escolha de problemas ou situações concretas funciona inicialmente como elemento motivador, levando o aluno a incorporar uma gama de conhecimentos, essenciais em sua atuação futura no meio social.

Como um exemplo desta proposta, mostramos aqui alguns modelos simples a partir da leitura de uma revista infantil, "Donald na Matemagicalândia".

A estória começa com o famoso Tio Patinhas procurando explorar seu sobrinho Donald. Este, desesperado pela dívida impagável oriunda de um empréstimo, é levado pelo "Espírito da Matemática" a conhecer o Mundo da Matemática. Donald, após tal viagem, convence-se da importância desta ciência como instrumento que rege o Universo e acaba descobrindo uma maneira de safar-se da tão "pesada" dívida.

Acompanhando as peripécias do desastrado personagem, selecionamos alguns temas para abordar neste trabalho.

Nosso objetivo é mostrar que é possível tornar o ensino de Matemática mais suave e até por que não dizer mais gostoso quando o aluno aprende brincando e motivado pelo interesse de resolver os problemas que ele próprio cria.

---

[1] Digitalizado por Carolina Augusta Assumpção Gouveia e Thiago Pedro Pinto, alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro.

[2] Profª. do Departamento de Matemática da Universidade Regional de Blumenau. Mestre pelo programa de Mestrado em Educação Matemática - UNESP - Rio Claro.

[3] Prof. do Programa de Mestrado em Educação Matemática - UNESP - Rio Claro.


QUARENTA MIL E SETENTA
E TRÊS CRUZEIROS!


MAS NÃO PODE SER!

ISBN 978-85-89082-23-5

Vamos dar uma ajuda ao Donald:

Dados: a) emprestou $30.000

b) Donald devia esta semana (considere hoje) $ 160.073, pois pagou $ 20.000 e ainda está devendo $ 140.073.

Os juros "exorbitantes" do Tio Patinhas são de 30% ao mês.

Vamos calcular inicialmente há quanto tempo estes $ 30.000 foram emprestados, supondo que ate agora o Donald não tivesse pago nada:

Seja t = 0 o instante (em mês) do empréstimo e C_o = 30.000 a dívida quando t = 0. Então

ISBN 978-85-89082-23-5

$C_1 = C_o + 0{,}30\ C_o = 1{,}3\ C_o$ = dívida no l^o mês.

$C_2 = 0{,}3C_1 + C_1 = 1{,}3\ C_1 = 1{,}3^2\ C_o$

$C_n = (l{,}3)^n\ C_o$ = dívida depois de n meses

Se Donald deve \$ 160.073, temos $160{:}073 = (1{,}3)^t \times 30.000$ ou

$(1{,}3)^t = 5{,}336$ logo $t \times \text{Log } 1{,}3 = 5{,}336$

$t = \frac{\log 5{,}336}{\log 1{,}3} = 6{,}382$ = 6 meses, 11 dias, 11 horas e 2,4 minutos.

Este é o tempo que passou depois do empréstimo.

Vamos supor agora que, a partir de hoje, Donald pague \$ 20.000 ao mês. Se em seu aniversário ainda estiver devendo \$ 370.092, quando será seu aniversário?

Seja $D_o = 160.073 - 20.000 = 140.073$ a dívida atual

$D_1 = 1{,}3\ D_0$ = dívida no mês que vem. Se pagar 20.000, fica devendo

$D_1 = 1{,}3\ D_0 - 20.000$

$D_2 = 1{,}3\ D_1 = (1{,}3)^2\ D_0 - 20.000 \times 1{,}3$ e

$D_2 = (1{,}3)^2 - 1{,}3 \times 20.000 - 20.000$

$D_3 = 1{,}3\ D_2 = (l{,}3)^3 D_0 - (1{,}3)^2 \times 20.000 - 1{,}3 \times 20.000$

$= (1{,}3)^3 D_0 - 20.000\ (1{,}3) + 1{,}3^2)$

$D3 = (l{,}3)^3 D_0 - 20.000\ (1 + 1{,}3 + 1{,}3^2)$ de uma maneira geral

$Dn = (l{,}3)^n D_0 - 20.000 \times 1{,}3\ (1 + 1{,}3 + 1{,}3^2 + ... + l{,}3^{n-2})$

soma de PG de razão 1,3

$$Dn = (l,3)^n D_0 - 20.000 \times \frac{1{,}3\ 1{,}3^{n-1} - 1}{1{,}3 - 1}$$

$= l{,}3^n\ (140.073 - 66.666{,}66) + 86.666{,}66 =$

$= l{,}3^n \times 73.406{,}34 + 86.666{,}66$

Se $D_0 = 370.092$ = calculamos n:

$370.092 = (l{,}3)^n \times 73.406{,}34 + 86.866{,}66$

$(l{,}3)^n = 3{,}861 \quad n = \frac{\log 3{,}861}{\log 1{,}3} = \frac{1{,}351}{0{,}2623} = 5{,}15$ meses

Logo, o aniversário do Donald será daqui a 5 meses, 4 dias e 12 horas!

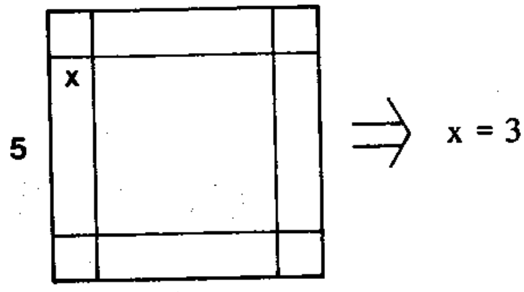
ISBN 978-85-89082-23-5

Donald: não houve um inventor da Matemática... o homem, na busca de respostas às suas necessidades práticas ou às suas inquietações existenciais, conduziu suas faculdades criadoras mesmo além da imaginação e da intuição, dando à Matemática um sabor de ciência e arte...

Os Egípcios encontravam raízes das equações do 1º grau há mais de 4000 anos. Sabiam que a solução de uma equação do tipo $ax + b = 0$ é $x = \frac{-b}{a}$

AL-JABR era o título do livro do matemático hindu Al-Khowarizmi (morreu antes de 850). Em seu livro assinalava que a primeira coisa necessária para os estudantes dessa ciência (Álgebra) era entender raízes, quadrados e números.

Uma equação algébrica como $x^2 + 10x = 39$ Al-Khowarizmi resolvia geometricamente usando uma figura:



Somente no século XVI, os italianos resolveram as equações de 3º e 4º graus - enquanto as equações do 5º grau resistiram bravamente até o início do século XIX, quando Ruffini e Abel mostraram que estas não podem ser resolvidas por meio de radicais.

Pois é, Donald, este desenho que Al-Khowarizmi usou para demonstrar tal equação se parece com o desenho de um tanque onde criam rãs. Não sei se você sabe, as rãs são ótimas para o alimento do homem e, portanto, há no Brasil vários ranários.

E, para ter uma boa produção, o ranicultor coleta os ovos fecundados e transporta-os até a incubadora para eclosão. Após a eclosão, os girinos ficam retidos de 8 a 10 dias.

Os tanques que recebem os girinos têm as seguintes dimensões: 2 m de largura por 10 m de comprimento e subdivididos em vários compartimentos.

ISBN 978-85-89082-23-5

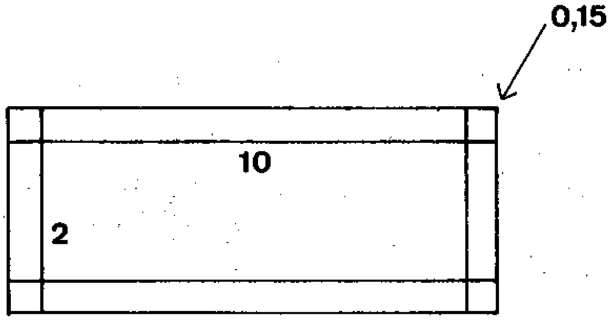
Tomando as dimensões internas da base do tanque (2m x 10m) e a espessura de parede (15 cm), podemos calcular a área ocupada pelo tanque no ranário.

A área útil ocupada pelo tanque é:

(i) área interna:

2m x 10m = 20 m^2

(ii) área das paredes +



2 paredes de 10m x 0,15m => $2x(l,5^2) = 3m^2$

2 paredes de 2m x 0,15m => 2 x $(0,30m^2) = 0,60m^2$

4 cantos de 15cm x 0,15m => 4 x $(0,0225m^2) = 0,09m^2$

O espaço para construção do tanque deve levar em consideração a área ocupada também pelas paredes:

Área total = área interna + 2 (área da parede maior) + 2 (área da parede menor) + 4 (área do canto).

$A_t = 20\ m^2 + 3m^2 + 0,60m^2 + 0,09m^2 = 23,69m^2$,

ou considerando a área do retângulo ABCD:

$A_t = [2m + 2(0,15m)] \times [10m + 2(0,15)] = 23,69m^2$.

Neste ranário temos as dimensões fixadas, mas existem outros objetos ou construções com esta mesma forma (paredes de uma casa, caixas de madeira.,.).

Nestes casos, embora com formas semelhantes, as dimensões variam. Então, para facilitarmos, podemos tratar o problema da forma algébrica:

10 = b; 2= ae0,15= c e aí teremos:

At = [2m + 2(0,15)] x [10m + 2(0,15m)] = (a + 2c) x (b + 2c)

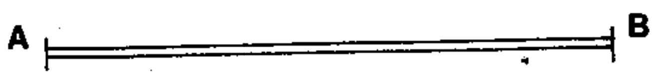
= ab + 2bc + 2ac + $4c^2$

Se a = b, obtemos: (a + 2c) x (a + 2c) = (a + 2c)2 = $a^2 + 4ac + c^2$.

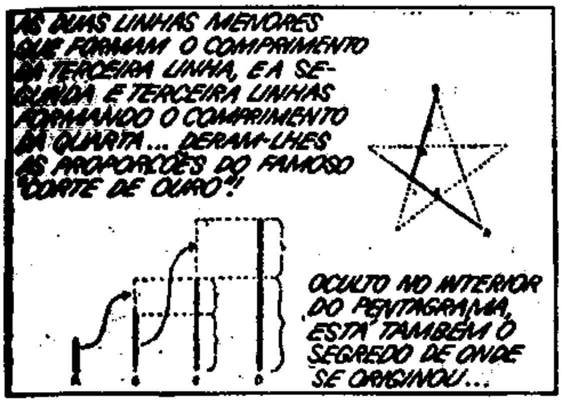
Esta expressão e denominada PRODUTO NOTÁVEL.

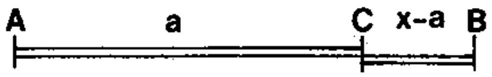
Existem outros produtos notáveis importantes, por exemplo: calculando o volume interno de uma caixa d'água cúbica, dada a medida externa do lado a e a espessura da parede b, obtemos um deles. (Verifique!)

Para que você possa entender melhor estas proporções "matemáticas", vamos iniciar um estudo: Tomemos um segmento AB.

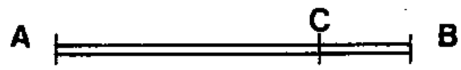


ISBN 978-85-89082-23-5





Com um ponto C podemos dividir este segmento em duas partes.



O ponto C pode ocupar infinitas posições, mas existe uma única posição - posição de ouro - onde este ponto C divide o segmento de tal forma que

$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$, ou seja,

$$\frac{segmento\ todo}{parte\ maior} = \frac{parte\ maior}{parte\ menor}$$

Vamos supor que: med (AB) = x; med (AC) = a; e med (CB) = x-a

Então podemos escrever $\frac{x}{a} = \frac{a}{x-a}$.

Utilizando a propriedade fundamental da proporção, vem x^2 - xa – a^2 ; resolvendo, obtemos$x = \frac{a(1\pm\sqrt{5})}{1}$ o número $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ ou 1,6180339... é chamado "número de ouro" e é representado pela letra grega ϕ (f)

ϕ = 1,6180339..., que é um numero irracional.

O número ϕ é considerado um número especial por ter propriedades interessantes: a) somando 1 ao numero ϕ obtemos o quadrado de ϕ :

1 + 1,618...= 1,168... x 1.618... = 2,618...

1 + Ø= Ø^2 ⇔ Ø^2- Ø-1=0.

b) quando subtraímos 1 de Ø , obtemos o inverso de Ø:

$$\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$$

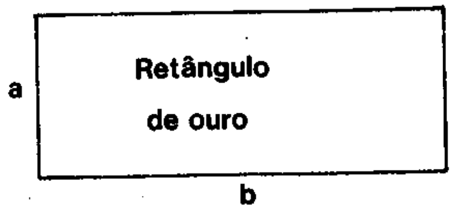
$$1{,}618\ldots - 1 = \frac{1}{1{,}618\ldots} = 0{,}618\ldots$$

$\frac{1}{\phi} = 0{,}618\ldots$ é chamado de “secção áurea”.

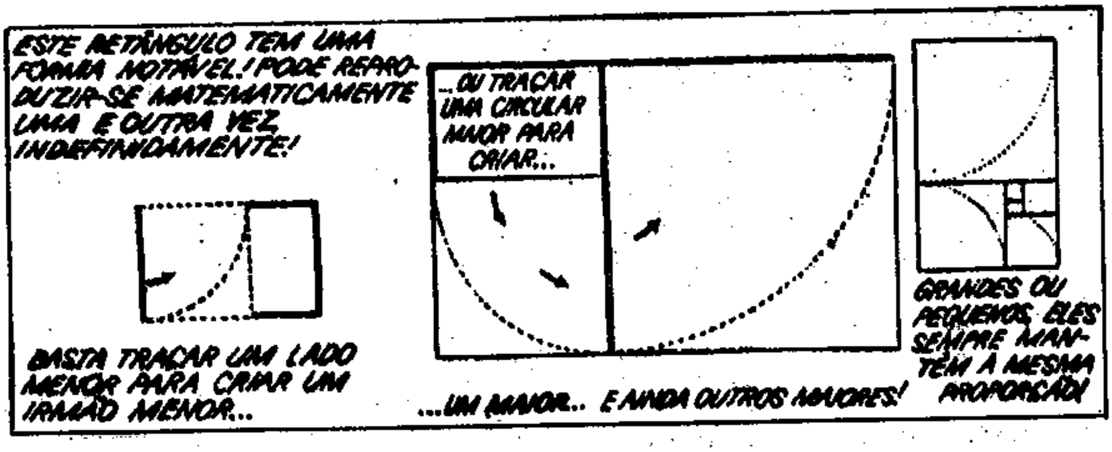
Por ser um número irracional (0,61803399...) e, portanto, difícil de ser medido, os arquitetos fizeram uma aproximação dele, considerando $\frac{1}{\phi} \cong \frac{5}{8} = 0{,}625$.

ISBN 978-85-89082-23-5

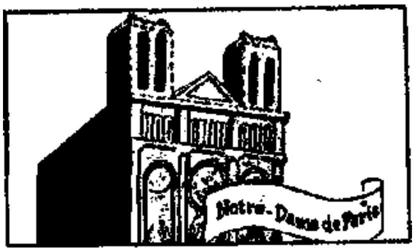
Um retângulo é de ouro, se seus lados guardam a divina proporção $a = \frac{1}{\phi} b$. Se b=5 cm => a= 5 x 0,618... = 3,05... cm.



... que os gregos admiravam pela beleza de suas proporções e suas qualidades mágicas...



DURANTE SÉCULOS, O RETÂNGULO DE OUTRO DOMINOU O IDEAL DE BELEZA NO MUNDO OCIDENTAL! NA ARQUITETURA...



Começando de um segmento $b_1 = 5$, obtemos uma seqüência de segmentos áureos, formando sucessivamente retângulos de ouro:

ISBN 978-85-89082-23-5

$b_2 = 5\text{x}\frac{1}{\phi} = b_1\text{x}\frac{1}{\phi}$

$b_3 = 5\text{x}b_2 = b_1\text{x}\left(\frac{1}{\phi}\right)^2$

....

$b_n = 5\text{xb}_\text{n} = b_1\text{x}\left(\frac{1}{\phi}\right)^{n-1}$

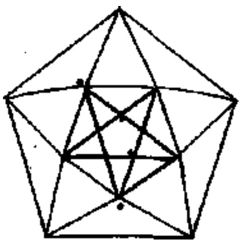
A seqüência $(b_n)_n E^N$ é uma progressão geométrica decrescente de razão $\frac{1}{\phi}$.

A seqüência áurea é uma PG de razão $\frac{1}{\phi}: 1; \frac{1}{\phi}; \frac{1}{\phi^2}; \dots . \frac{1}{\phi^n}; \dots$

De uma seqüência áurea podemos formar uma serie áurea convergente:

$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\phi^n}$ é a soma de cada lado dos retângulos áureos formados, começando com o segmento de lado 1.

$S_n = 1 + \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} + \cdots \frac{1}{\phi^n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\phi}\right)^i$ é e a reduzida de ordem n. Então $S_n = \left(\frac{1-\left(\frac{1}{0}\right)^n}{1\frac{1}{\phi}}\right)$, como $\phi > 1 \rightarrow 0 < \frac{1}{\phi} < 1$. Portanto, $\frac{1}{\phi^{n\rightarrow 0}}$, quando n cresce. Logo $S = \frac{1}{\frac{\phi-1}{\phi}}$



E como $\phi - 1 = \frac{1}{\phi} \rightarrow S = \frac{\phi}{\frac{1}{\phi}} = \phi^2$

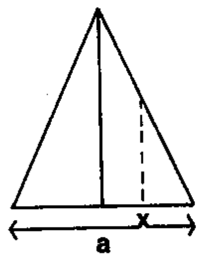
Portanto, Donald, o homem, ao buscar respostas aos seus questionamentos em relação à harmonia do Universo chegou à Lei de Ouro, ao número de ouro, a secção áurea, ao segmento áureo, etc..., todos relacionados à "divina proporção".

Agora volte ao pentagrama e descubra suas maravilhas áureas.

O triângulo de ouro ou sublime é o triângulo isósceles, cuja base tem o valor do segmento áureo do lado.

$\frac{1}{a-x} = \frac{a-x}{x}$ (divisão áurea)

$\rightarrow x = (a-x)^2 = a^2 - 2ax + x^2$



$\rightarrow x^2 - x = 2ax = a^2 = a(2x-1)$

Tem-se a equação áurea quando

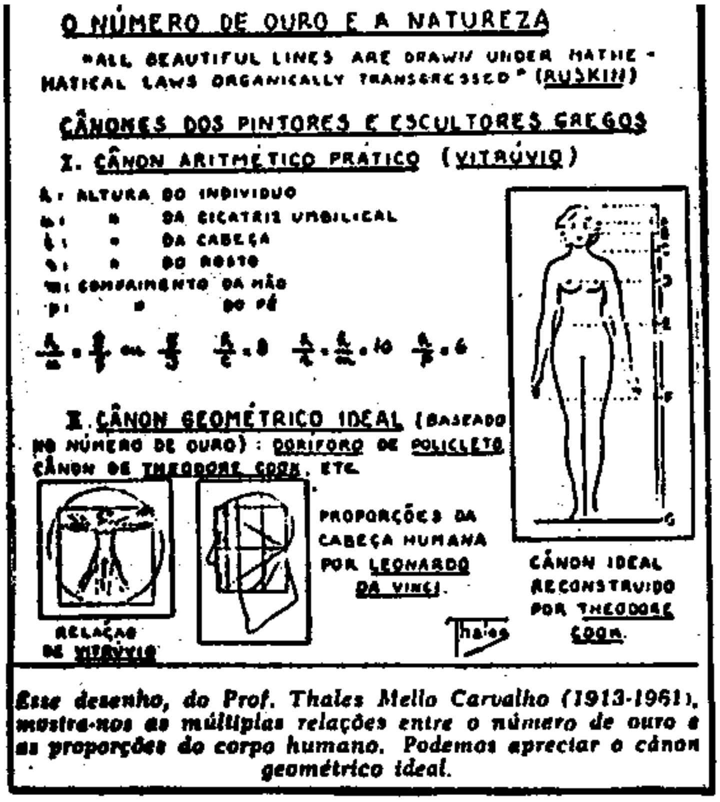
$a(2x-1) = 1 \rightarrow 2x - 1 = \frac{1}{a}$ tomando

$a = \frac{1}{\phi} \rightarrow x = \frac{\phi+1}{2} = \frac{\phi}{2}$.

Retrato famoso de Isabelle d`Este, por Leonardo da Vince. Convém notar que alinha dos olhos divide, em média e extrema razão, a distância do alto da testa à extremidade do queixo. O mesmo ocorre com a linha da boca em relação à distância da base do nariz à extremidade do queixo. Na mulher matemáticamente bela verifica-se a predominância do número ϕ (1,618)

Também a distância que vai do queixo até a testa em relação à distância dos olhos até o mesmo ponto é igual a ϕ .

ISBN 978-85-89082-23-5



Esse desenho, do Prof. Thales Mello Carvalho (1913-1961), mostra-nos as múltiplas relações entre o número de ouro e as proporções do corpo humano. Podemos apreciar o cânon geométrico ideal.

As relações áureas também estão presentes quando analisamos a configuração de alguns animais e plantas.

A cabeça do zebu, quando vista de perfil, esta inscrita num retângulo de ouro.

Seqüência de Fibonacci - Leonardo de Pisa (1180-1250) - Fibonacci é considerado o matemático mais original e criativo do mundo cristão medieval. Em seu livro Liber Abaci (Livro de Ábaco), de 1202, encontra-se o problema que deu origem à sua famosa seqüência:

"Quantos coelhos teremos num ano, começando com um só casal, se em cada mês cada casal adulto gera um novo casal, o qual se torna produtivo em dois meses?"

ISBN 978-85-89082-23-5

- a razão de crescimento de termos sucessivos forma uma nova seqüência $bn = \frac{an+1}{an}$ que converge para $b = \frac{1+5}{2} = 1{,}618$ ... (número de ouro).

São 4 os tipos de simetria:

a) <u>Translação</u> - Dados dois pontos A e A', translação e a simetria que manda um ponto genérico B do plano, no ponto B' = T(B) tal que o quadrilátero ABB'A seja um paralelogramo.

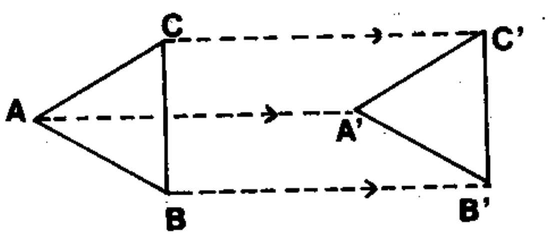
Translação T: R →R

$\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$ = amplitude de translação.

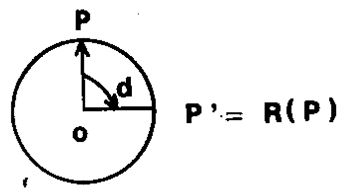
O Δ ABC é "paralelo" ao triângulo A'B'C'.

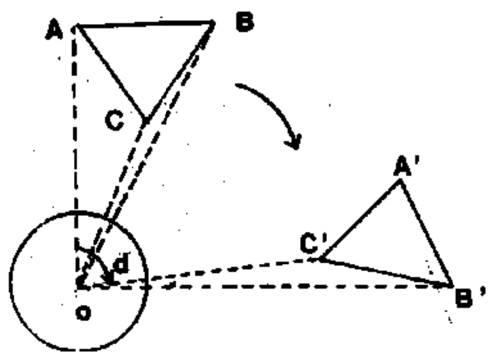
b) <u>Rotação</u> - A figura do piano gira em ponto fixo.

Rotação R: R - R, de centro O e ângulo a é um movimento rígido (transformação) tal que, para todo ponto P do plano, R(P) é obtido sobre uma circunferência de centro O e raio OP, deslocado de um angulo a.

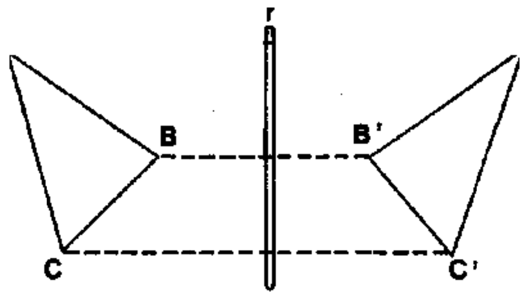


ISBN 978-85-89082-23-5



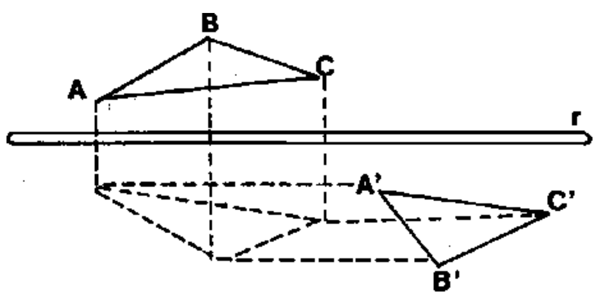


c) <u>Reflexão</u> - Quando uma figura exibe suas partes opostas a um eixo r "refletidas" como num espelho. Reflexão é um movimento rígido S: R→R tal que S(A) = A está sobre a reta perpendicular a uma reta fixa r (eixo de simetria) e que dista de r o mesmo que A dista de r.



d) <u>Glissorreflexão</u> - Quando se combinam 2 movimentos: reflexão R, com eixo r, e translação T paralela ao eixo r.

Glissorreflexão de eixo r



G: R → R

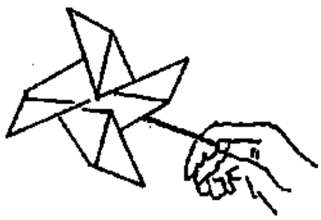
G(A) = R(T(A))=T(R(A)).

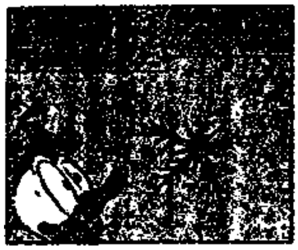
ISBN 978-85-89082-23-5

As simetrias são verificadas nos mais diversos elementos da natureza, como: nas flores, nas borboletas, nos cascos das tartarugas, nas peles de cobras, nos favos de mel, etc. O equilíbrio da natureza encontra-se na harmonia e beleza da simetria de seus elementos.

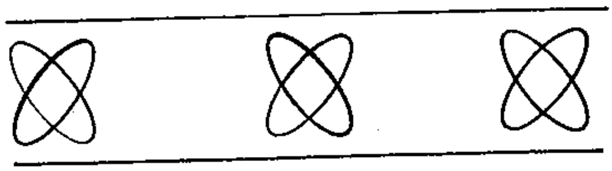
O homem, combinando estes "movimentos", constrói seus ornamentos: pinturas, edificações, etc. Existem 3 tipos de ornamentos:

a) Roseta - São os ornamentos limitados:





b) Faixas - São ornamentos ilimitados, contidos entre duas retas paralelas.



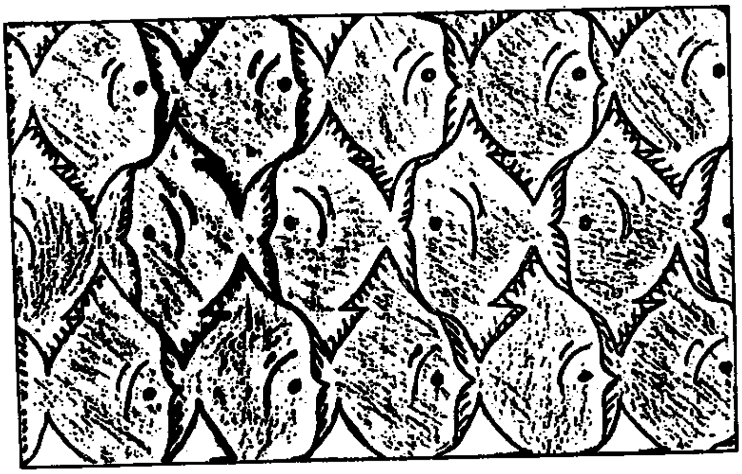
c) Mosaicos - São ornamentos ilimitados, cobrindo o plano todo.

As abelhas constroem seus favos usando a simetria do hexágono regular e ...

Para fabricarem 1 kg de mel, as abelhas de uma colônia de Ápis Melífera têm que voar nada menos que 40 mil km, ou seja, a distância aproximada de uma volta ao redor da Terra, isso numa área que não ultrapassa 707 hectares – num raio de 1,5 km ao redor da colméia. No vaivém dessas viagens elas

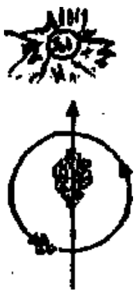
ISBN 978-85-89082-23-5

coletam o néctar, o suco adocicado das flores que dá origem ao mel.



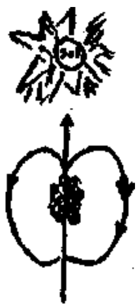
Para coletar uma única carga de néctar, capaz de encher o estômago, uma abelha chega a visitar entre 50 a 1000 flores. Quando descobre uma região com uma boa florada, a abelha campeira retorna à colméia paia comunicar. A comunicação se da através de uma complexa dança.

Quando as flores estão a menos de 100 m de distância da colméia, a dança é circular, (fig. 1). Se o alimento está a mais de 100 m, a abelha corre para a frente por uma pequena distância, retornando ao ponto inicial por um semicírculo corre novamente em linha reta e volta descrevendo um outro semicírculo na direção oposta, (fig. 2). Na parte reta ela agita rapidamente a parte que consiste do abdômen à cauda. Um caminho vertical (para cima) significa que o alimento está na direção do sol. Se a dança e feita a 30º à direita da vertical, significa que o alimento esta a 30º à direita do sol, (fig. 3).



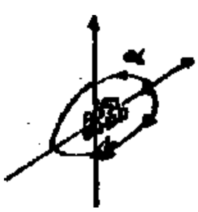
Florada a menos de 100m da colméia.

(fig.1)



Florada a mais de 100m em direção leste ou oeste.

(fig.2)



Florada a mais de 100m e num ângulo de inclinação α em direção ao norte sul.

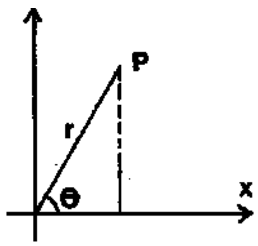
(fig.3)

As abelhas não usam coordenadas retangulares para comunicar a posição da fonte de alimentos. Em comportamento animal, principalmente na orientação de aves e peixes, as coordenadas polares têm um papel importante.

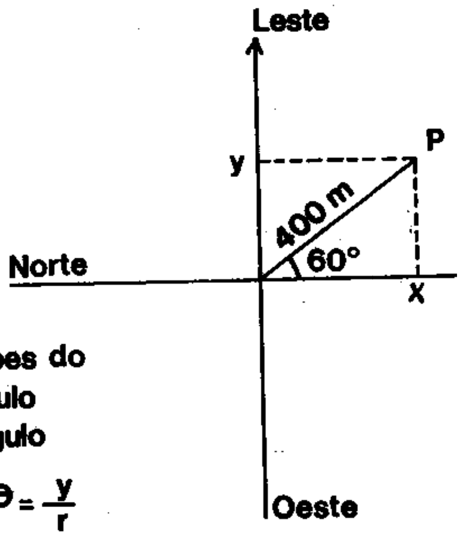
P: (x, y) – coordenadas retangulares

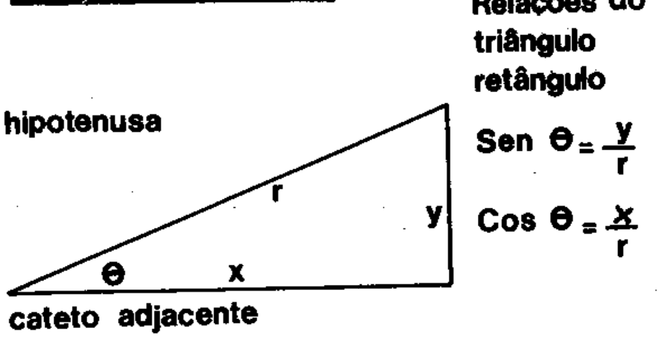
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (distância polar) e

$\theta = arctg\frac{y}{x}$ (ângulo polar) => P:(x,y) =P(r,θ)



A fonte de alimento é comunicada pela abelha campeira às demais abelhas, por uma dança, que toma como referência a nascente do sol, o leste. Por exemplo: se a fonte de alimentos P estiver a 400 m da colméia e formando um ângulo de 60º no sentido horário em relação à direção do sol nascente (leste), pode-se saber, através das coordenadas polares, sua posição exata:





As relações trigonométricas transformam coordenadas polares em retangulares, Em coordenadas, podemos afirmar que a fonte de alimento esta a 200 m para leste e 346 m para o sul, em relação à colméia.

Se agora a dívida é \$ 150.000, quanto tempo Donald passou na Matemagicalândia? Volte ao início e use

$C(t)=(1,3)^t$ x 140.073 (tempo em meses)

$150.000 = (1,3)t \text{ x } 140.073 \Rightarrow t = \frac{ln\frac{150.000}{140.073}}{ln 1,3} \Rightarrow t = \frac{0,06847158}{0,26236426} = 0,261\text{mês} \cong 7,83$ dias $\cong 1$ semana.

Vejamos, se o Tio Patinhas colocar 1 centavo na 1ª casa, 2 centavos na 2ª casa, 4 centavos na 3ª casa e assim sucessivamente, ..., ou seja,

$a_1 = 1 = 2^0$

$a_2 = 2 = 2^1$

$a_3 = 4 = 2^2$

$a_4 = 8 = 2^3$

....

$a_{64} = 2^{63}$

O total de moedas será dado por $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63}$ (soma de uma PG de razão 2) $S = \frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615 \cong 1{,}8\text{x}10^{19}$ centavos. Se cada moeda pesasse 1 grama, Donald, você deveria receber $1{,}8 \times 10^{19} \times 10^{-6}$ toneladas = $1{,}8 \times 10^{13}$ toneladas.

Agora, se cada dólar valesse 5 cruzeiros, teria 3,6 x 10^{15} dólares. Como nossa dívida externa é 120 bilhões de dólares, será equivalente a 30 dívidas externas brasileiras. Poxa!

Comentário Final

A Matemática pode ser "encontrada" nos mais simples objetos (quando se analisa sua geometria) ou nos mais complicados fenômenos da Natureza (quando se pretende interpretá-los).

Neste trabalho procuramos dar exemplos simples de utilização da Matemática que é sugerida nas diversas situações propostas na revistinha do Pato Donald. A modelagem efetuada foi somente um exemplo do que se pode fazer, como motivação,

ISBN 978-85-89082-23-5

para se ensinar Matemática em cursos regulares de 1º e 2º graus.

Cada um dos temas apresentados pode ser retomado numa análise mais aprofundada (seria um bom exercício para os professores). Por exemplo, experimente pesquisar mais sobre o comportamento das abelhas, sobre os segmentos áureos, sobre a criação das rãs, sobre jogos, sobre a história da Matemática, etc.

O objetivo é mostrar que cada um é capaz de desenvolver seu próprio texto usando a mesma revistinha - tente!

Não quisemos dar uma "receita" de modelagem, mas simplesmente despertar o interesse em aplicar este método para ensinar e, mais que isto, ensinar - aprendendo. "Haverá um dia - talvez este já seja uma realidade - em que as crianças aprenderão muito mais, e muito mais rapidamente, em contato com o mundo exterior do que no recinto da escola" (MCLUHAN).

Faça como o Pato Donald, vá em frente, a "Matemagicalândia" o espera, afinal como dizia LOBACHEVSKY: "Não existe nenhum ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia ser aplicado a algum fenômeno do mundo real".

Coragem!

ISBN 978-85-89082-23-5

Bibliografia

BASSANEZI, Rodney C. & BIEMBENGUT, Maria Salett. **A gramática dos ornamentos.** São Paulo: UNICAMP, 1987. (Relatório Técnico)

BASSANEZI, Rodney C. **Modelagem como metodologia de ensino de matemática.** São Paulo: IMECC - UNICAMP, 1988

BATSCHELAT, Edward. **Introdução à matemática para biocientistas.** São Paulo: USP, 1978. Tradução: Vera M. A. P. da Silva e Junia M. P. A. Quitete.

MALBA, Tahan. **As maravilhas da matemática.** Rio de Janeiro: Bloch, 1985.

MANUAIS PRÁTICOS DE VIDA - Rãs. São Paulo: Três, 1985.

TROTA, Fernando et alii. **Matemática aplicada –** 1ª série do 2º grau. São Paulo: Moderna, 1979.