ISBN 978-85-89082-23-5

Fenomenologia e a Formação Social: considerações acerca da proposta Assimilação Solidaria[1][2]

Maria Regina Gomes da Silva[3]

Resumo

Partindo de um "problema desencadeador" dado: 1- buscamos, concretamente, situações (FENÔMENOS) que explicitassem correlações com o problema referido, mais especificamente, com o conceito de taxa de variação (NÚMENO); 2- observamos que essas situações são transpostas da formação social para o aparelho escolar, uma vez que este efetua a sistematização, em termos matemáticos. Com isso, chegamos à contribuição da escola, como instituição, cujo funcionamento difunde e disciplina os conceitos matemáticos na formação social.

Palavras-chave: Número. Fenomenologia do número matemático. Assimilação solidária.

O objetivo deste artigo é relatar a vivencia da autoria, como aluna da disciplina de Ensino da Matemática no 3º grau, ministrado pelo Professor Roberto Ribeiro Baldino, no curso de pós-graduação em Educação Matemática, da UNESP - Rio Claro, no 1º semestre de 1989. Essa vivência teve três parâmetros determinantes: 1º) um "problema desencadeador" simples, sobre vazão; 2º) a pedagogia da Assimilação Solidaria adotada na disciplina; 3º) a fenomenologia didática segundo Freudenthal[6].

Dentre os "problemas desencadeadores", sugeridos pelo professor da disciplina, optamos pelo que se segue:

"Abre-se uma torneira, lentamente, de modo que a cada instante t (em minutos) dela estão saindo 2t litros de água por minuto. Qual o volume total da água que saiu da torneira desde que ela começou a ser aberta até 5 minutos após?"

O pequeno grupo que trabalhou com o problema, segundo a pedagogia da Assimilação Solidaria , mencionou a existência de uma solução imediata, a partir da utilização dos resultados encontrados nos livros e de cálculo. Na semana seguinte, essa

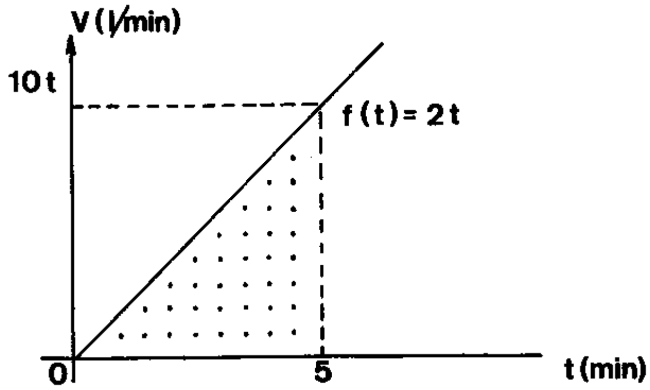
[1] Este trabalho teve início no curso Ensino da Matemática no 3º grau. Naquela época, houve a participação de outra aluna: Maria José Lourenção Briguenti.

[2] Digitalizado por Carolina Augusta Assumpção Gouveia e Thiago Pedro Pinto, alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro.

[3] Professora do Departamento de Matemática da UNESP/ Bauru. Aluna do Programa de Mestrado em Educação Matemática - UNESP - Rio Claro.

ISBN 978-85-89082-23-5

solução foi apresentada como segue, de forma sistematizada.



$$\text{vazão} = f(t) = 2t \ \frac{\text{litros}}{\text{minutos}}$$

volume= ? (volume de água que saiu em 5 min)

$$V=\int_0^V dV=\int_0^5 \frac{dv}{dt}\,dt=\int_0^5 \text{vazão}\,dt=\int_0^5 f(t).dt=\int_0^5 2t.dt = \left.\frac{2t^2}{2}\right]_0^5 = 25L$$

Da discussão dessa solução, em plenário formado pela turma, duas perguntas surgiram.

1. Por que, logo de saída, optamos por recorrer ao conceito integral como forma "adequada" de "resolver" o problema? Que torneira é essa que se "abre lentamente"? Em que consiste este "problema" que logo pede uma solução sobre a qual parece não haver duvidas?
2. Como se formou em nós esse conceito de integral? Que outros problemas ele pode resolver?

O método adotado para responder a essas perguntas foi dado pela própria pedagogia da Assimilação Solidaria[3]: trabalho em pequenos grupos, orientados pelo professor, durante as aulas e discussões nas plenárias da turma.

Nas plenárias da turma, manteve-se sempre presente que a disciplina em questão integra o currículo de um curso de pós-graduação, numa universidade, que é uma, entre muitas instituições, na formação social em que vivem os alunos. Por aí, foi possível entender a passagem do "problema" à "solução", respondendo-se as questões da pergunta 1.

ISBN 978-85-89082-23-5

O referencial teórico adotado para responder as questões da pergunta 2, por sugestão do professor, foi a fenomenologia, segundo Freudenthal[6].

Para Freudenthal[6], o número funciona para organizar e descrever o fenômeno; a fenomenologia de um conceito matemático deve descrever o número, em sua relação com o fenômeno do qual ele é o meio de organizar.

Optamos, pois, por trabalhar com o conceito de taxa de variação, como conceito fundamental que tínhamos usado, sob a forma de vazão, para resolver o problema em questão.

Para descobrir por que esse uso tinha sido espontâneo, automático e nos conduzira a uma solução que pensamos como definitiva, formulamos a seguinte pergunta: em que situações emerge o conceito de taxa de variação, na formação social onde vivemos?

Tivemos a preocupação de não nos deixar levar pelo romantismo, a ponto de acreditar que o conceito de taxa de variação poderia surgir aqui, ali acolá, já verbalizado pelas pessoas, sem que jamais pudesse ser dimensionado (visão empirista cf. 2).

Partindo da pergunta o que é taxa de variação, verificamos que, no "problema desencadeador", taxa de variação aparece como vazão, assim conceituada.

VAZÃO é a razão entre a variação do volume pela variação do tempo, em função do tempo.

Antes de tudo, o que existe é a formação social em que vivemos. Complementamos, pois, a pergunta: o que é taxa de variação, na formação social? Antes de mais nada, será necessário identificar as ocorrências de taxa de variação nessa formação social.

Descobrimos, assim, que a taxa de variação emerge nas situações de consumo (nas práticas econômicas), de velocidade e aceleração (na física), de índice de mortalidade (na saúde), de evasão escolar (na educação), de pesquisas de opinião pública por estatística (nas comunicações), etc. Reconhecemos que são um tanto imprecisas as delimitações dessas situações, mas não é necessário catalogá-las exaustivamente, para poder pensar sua modalidade. Esse é o primeiro passo para reproduzir o conceito de taxa de variação, que pode ser observado nos dados colhidos e explicitados a seguir.

Saímos, atentos, à procura de situações que envolvessem o conceito de taxa de variação.

Ao atravessarmos a rua, fomos despertados pela existência do conceito referido na variação da nossa posição, em função da variação do tempo em que o sinaleiro permaneceu aberto. Observamos, também, que uma pessoa resolveu atravessar a rua, quando o sinal estava vermelho; imediatamente, para certificar-se que não seria atropelada comparou sua velocidade com a do carro que se aproximava e correu: variação da velocidade em relação à variação do tempo.

Seguindo em direção ao supermercado, embora previsto, o aumento de preços nos assustou mais uma vez. Bastou comparar os preços com os do dia anterior.

Não foi difícil encontrar no supermercado pessoas que reclamassem, a viva voz, da inflação galopante que assola o país. Mais uma vez, era efetuada nova comparação: a variação da inflação e a variação da própria taxa, de um mês para outro.

Continuando nossa busca de situações que envolvessem o conceito de taxa de variação, pensamos em registrar depoimentos sobre os altos índices de evasão escolar, principalmente nas primeiras series do 1º grau. Entramos numa escola e fomos procurar a diretora. Ao passarmos por uma das salas de aula, ouvimos uma professora que falava sobre o rio Amazonas - a vazão é um bilhão de litros por minuto - Mnemonicamente houve uma sintonia: éramos fruto dessa escola. Rememoramos as repetidas vezes que professores nos passavam situações sistematizadas, e nós, simplesmente, devolvíamos tais situações sem qualquer reflexão, quer dizer, sem qualquer correlação com o dia-a-dia, e, por isso, sem qualquer interpretação.

Por ora, efetuamos uma tentativa de percorrer o seguinte trajeto: partimos do "problema desencadeador" dado, buscamos, concretamente, situações (fenômenos) que explicitassem correlatos com o problema referido, mais especificamente, com o conceito de taxa de variação (número). Observamos que essas situações são transpostas da formação social para o aparelho escolar, uma vez que este efetua a sistematização, em termos matemáticos. Com isso, chegamos à contribuição da escola, como instituição cujo, funcionamento difunde e disciplina os conceitos matemáticos na formação social.

Ao longo do período escolar, o aluno vai deparando, gradativamente, com os conceitos matemáticos organizadores de situações.

Os primeiros contatos do aluno com o conceito de taxa de variação ocorrem no 1º grau, ao estudar proporção, função, etc. Já no 2º grau, o aluno contacta com conceitos físicos, etc. É certo que, com a simplificação e padronização dos conceitos, vai havendo, simultaneamente, uma certa especialização crescente: o fenômeno vai deixando de ser a realidade que o número deve organizar, para passar a ser apenas o álibi da apresentação do número. Paralelamente, o sistema de seleção escolar vai promovendo os que melhor aceitam a desvalorização do fenômeno, diante do número. Isto quer dizer que, na universidade quando o aluno defronta com conceitos, de forma mais elaborada, tais como limite, derivada, integral, etc, ele já esta pronto para aceitar uma correspondente abstração sobre o fenômeno - como ocorreu quando demos a primeira solução ao "problema desencadeador" proposto - Como bem selecionados pelo sistema escolar, não nos preocupamos, inicialmente, com a qualidade dessa "torneira que se abre lentamente" e, logo, chegamos a uma "solução", academicamente adequada. Seqüencialmente, se o aluno chegar a um curso de pós-graduação deverá dedicar-se a pesquisa. Será esse, então, o lugar de voltar-se para outro fenômeno: o de sua própria formação, como fizemos aqui.

Para Freudenthal[6], a fenomenologia do número matemático consiste em descrevê-lo em relação ao fenômeno que ele organiza. Mostramos anteriormente que esse fenômeno é bem mais amplo que o sugerido pelo "problema desencadeador"; notamos que ele inclui variáveis sociais, bastante humanas. Falta descrever o próprio número diante do fenômeno.

Tínhamos optado por começar investigando em quais situações emergia o conceito de taxa de variação, na formação social em que vivíamos, ou seja, tínhamos planejado buscar o fenômeno a partir do número. Nessa busca deparamos com a situação da sala de aula que nos mostrou o trajeto que vai em sentido inverso, do fenômeno ao número. Simultaneamente essa sala de aula abriu-se para um novo fenômeno: nossa própria formação.

Retornemos, então, a explicitação sistematizada que envolve o conceito de taxa de variação, na observação das situações já arroladas. Vejamos como o número organiza o fenômeno.

Na verdade, o conceito matemático de taxa de variação está implícito em todas as situações observadas. Explicamos: matematicamente, a taxa de variação é a razão entre as variações de duas grandezas, das quais a primeira é pensada como dependente da segunda. Com isso, recuperando-se as situações apresentadas, tem-se, em todas elas, essa razão entre as variações de duas grandezas, onde a primeira depende da segunda.

É importante notar o seguinte: 1º) a taxa de variação é uma relação entre variações de grandezas e não entre as próprias grandezas, por exemplo V é $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ e não $\frac{S}{t}$ 2º) a taxa de variação é uma razão externa, isto é, não se comparam espaços com espaços e tempos com tempos ("áreas iguais em tempos iguais" como na lei de Kepler), mas dá-se sentido à razão externa, obtida pela fusão de grandezas heterogêneas, por exemplo: $V = \frac{\Delta S}{\Delta t}$; 3º) a taxa de variação pode variar com as grandezas, dando origem a taxas de variação de taxas de variação, por exemplo: como a taxa de inflação, que é a razão entre a variação do preço pela variação do tempo, é ela própria função do tempo, I=f(t), fala-se em "aceleração" da taxa de inflação, que é a razão da variação da inflação pela variação do tempo. $A_I \frac{\Delta I}{\Delta t}$.

- Mortalidade (taxa entre mortos e nascidos) infantil em função do tempo, M - f(t).

Controle de saúde é a razão entre a variação da mortalidade infantil pela variação do tempo. $C_S \frac{\Delta m}{\Delta t}$ (taxa da taxa)

- Evasão escolar em função. E=f(t).

Índice do aumento da evasão escolar é a razão entre a variação da evasão escolar pela variação do tempo. $I_E \frac{\Delta E}{\Delta t}$.

Partimos, então, para sistematizar, da definição da vazão do Novo Dicionário de Ferreira[5], por onde chegamos a um estágio intermediário de sistematização do número.

VAZÃO: "Volume dum fluido que, numa unidade de tempo, se escoa através de determinada seção transversal de um conduto ou curso de água, ou ainda, porção de líquido ou de gás fornecida por uma corrente fluida, na unidade de tempo".

Se entendermos a "unidade de tempo" como um minuto, vejamos a que chegaremos.

Expressando, matematicamente, que "o volume de água que sai da torneira está em função do tempo" temos:

V= f (t) ; no nosso caso particular,

V = 2t 1/min

No instante t_0 a vazão é nula, pois não há variação de volume, porque a torneira está fechada (t_0 = 0 min.)

Num instante t_1 a vazão é igual a 2 t_1 1/min

Se t_1= 1 min, então V_1 = 2 1/min

Num instante t2 a vazão é igual a 2 t_2 1/min

Se t_2 = 2 min, então V_2 = 4 1/min

Num instante t_3 a vazão é igual a 2 t_3 1/min

Se t_3= 3 min, então V_3 = 6 1/min

Se t_4= 4 min, então V_4 = 8 1/min

Se t_5= 5 min, então V_5 = 10 1/min

Após 5 minutos o volume é igual à soma dos volumes que saíram da torneira nos 5 intervalos, o que nos leva a representar este volume pela soma das áreas dos retângulos obtidos na fig. 1.

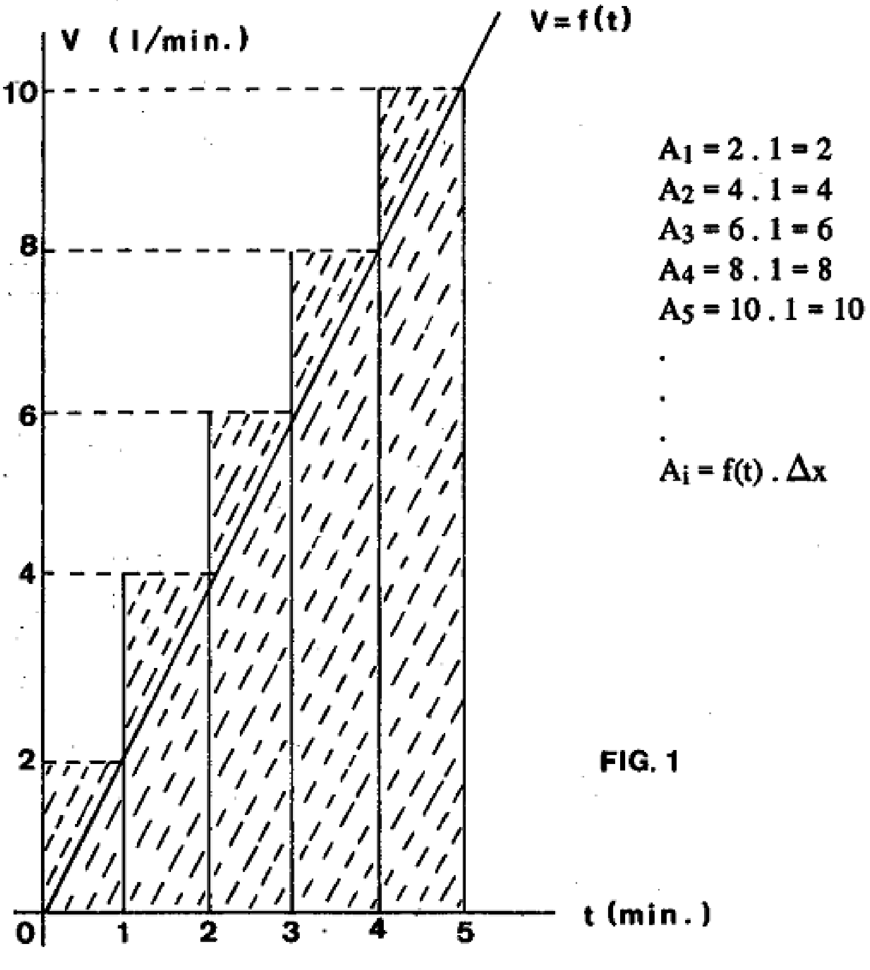


FIG. 1

Onde o intervalo de 5 minutos foi dividido em 5 partes iguais a 1 minuto cada qual, dando: $x = \frac{5-0}{5} = 1$ min

Logo, a área total:

$$\sum_{i=1}^{5} A_i = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

$$\therefore V \cong 30\ Litros$$

O erro (V = 30 l e não 25 l como na solução pela via da integração) vem do fato de que a definição de Ferreira[5] é, na verdade, a de vazão média, que só coincide com a de vazão instantânea, se a vazão for supostamente constante, o que não é o caso.

Supor que a vazão entre $t_0 = 0$ e $t_1 = 1$ é constante, igual a 2 1/min, como fizemos, contradiz o fato de que ela é zero quando t = 0 e que a torneira "abre lentamente".

Essa idéia de determinar o volume real através de valores aproximados (sugeridos pela definição de Ferreira) é denominada processo discreto (caminha-se em saltos).

Agora é possível observar que, à medida que Δx diminui, a área em excesso tende a ser cada vez menor; portanto, a soma das áreas tende a se aproximar cada vez mais do volume real.

Vamos, então, estudar a função V_{ap} (volume aproximado), em função de $\Delta x > 0$.

Pondo $\Delta x = 5/n$, onde n é o numero de subintervalos em que dividimos o intervalo [0 , 5], temos : fig. 2.

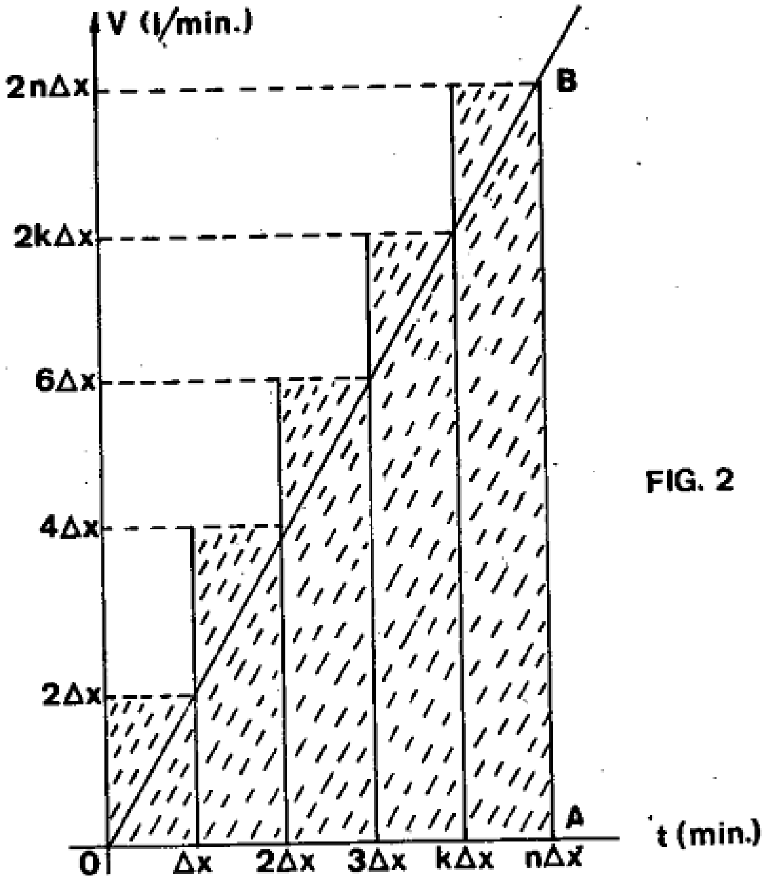


FIG. 2

$A_K = \Delta x \,.\, K \,.\, \Delta x = K(\Delta x)^2$

Onde k = 1,2,..., n.

Considerando que o volume aproximado é a soma dessas áreas, temos:

$$\begin{aligned} V_{ap} &= (2 + 4 + 6 + \ldots + 2K + \ldots + 2n) \cdot (\Delta x)^2 = \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + K + \ldots + n) \cdot (\Delta x)^2 = \\ &= 2 \cdot \frac{n \cdot (1+n)}{2} \cdot (\Delta x)^2 = (n+1) \cdot n \, (\Delta x)^2, \text{ mas} \end{aligned}$$

$$n = \frac{5}{\Delta x}, \text{ então,}$$

$$\begin{aligned} V_{ap} &= \left(\frac{5}{\Delta x} + 1\right) \cdot \frac{5}{\Delta x} \cdot (\Delta x)^2 = \\ &= \left(\frac{5}{\Delta x} + 1\right) \cdot 5\Delta x = 25 + 5\Delta x \end{aligned}$$

Notamos que o volume procurado corresponde à área do triângulo 0 A B da fig. 2.

Observamos que, no gráfico do volume 1 em função do Δx (min), temos que a condição de "melhor ajustar-se" à situação especial ocorre quando n tende a ∞ e, portanto, Δx tende a zero, ou seja, a descrição do número diante do fenômeno nos leva a desvelar a passagem do discreto ao contínuo, o que abre toda a problemática da noção de limite:

$$V_{real} = \lim_{\Delta x \to 0} V_{ap}(\Delta x)$$

que se oculta por trás da integral que, inicialmente, usamos para "resolver o problema".

Assim, a fenomenologia do número matemático, segundo a concepção de Freudenthal[6], nos leva a evidenciar um fenômeno mais amplo, que envolve tanto os sujeitos que usam o número, como a formação social onde esse uso ocorre como fenômeno. Será esse o "fenômeno acadêmico": parte-se de um problema, numa sala de aula, e descobre-se essa sala de aula noutro problema como no quadro de Esher[4].

Referências

ÁVILA, G. S. S. **Cálculo I**. São Paulo/Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, s.d.

BALDINO, R. R. **O objeto da matemática; especificidade e materialidade**. Apostila xerocopiada. Rio de Janeiro, IMUFRJ, nov, 80.

BALDINO, R. R. **Normas da assimilação solidaria.** Apostila xerocopiada. Rio Claro, UNESP, 1989.

ERNST, B. **The magic mirror of M. C. Escher.** Balllantine Books, New York, Print Gallery, Lithograph, 1956, p.32.

FERREIRA, A. B. H. **Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa.** 2.ed., Rio de Janeiro, Nova

Fronteira S/A. pl757.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomonology of mathematical structures.** Dodrecht, Boston, Lancaster. D. Riedel, Publishing, co, 1983.

LEITHOLD. **O cálculo com geometria analítica.** 2.ed. São Paulo, Harbra, s.d.