ISBN 978-85-89082-23-5

De quantas maneiras é que se pode demonstrar o Teorema de Pitágoras?[1]

Paulus Gerdes[2]

No seu famoso livro "The Pythagorean Propositian" (O Teorema de Pitágoras), o Professor Elisha Scott Loomis conseguiu reunir nada menos do que 370 distintas demonstrações deste teorema, desafiando os seus leitores para encontrar ainda mais provas.

Onde é que podem obter idéias e sugestões novas para descobrir ainda mais demonstrações?

Quantas demonstrações serão possíveis? Mais do que mil? Mais do que 10^{10}?

Cestaria e a Descoberta do Teorema de Pitágoras

Aquando da minha pesquisa de aspectos matemáticos de Cestaria tradicional africana e Índia, encontrei um padrão de entrelaçamento, tanto divulgado como antigo (vide figura 1**),** que num determinado mas ainda desconhecido momento na história humana, podia ter servido de base para a descoberta do Teorema de Pitágoras,

[1] Digitalizado por Fabiane Mondini e Luciane Ferreira Mocrosky, alunas do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro.
[2] U.E.M – Faculdade de Educação – Maputo, 1986.

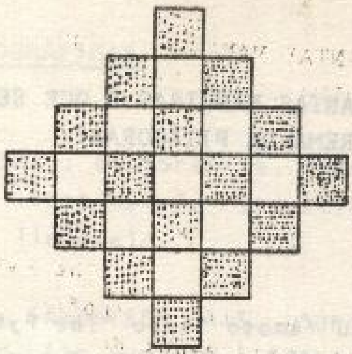


figura 1

em estreita ligação com a dos chamados triplos pitagóricos (a, b, c $\in$ N com $a^2 + b^2 = c^2$). Esta hipótese foi desenvolvida no meu livro "Zum erwachen den geometrischen Denken" (sobre o despertar do pensamento geométrico).

Olhando-se para o número de quadrinhos em cada figura (diagonal) do quadrado dentado (vide figura 2), observa-se facilmente que um quadrado dentado é igual (em área) à soma de dois quadrados "reais". Desenhando o quadrado e os dois quadrados reais numa mesma figura (vide figura 3), chegamos a um caso particular do Teorema de Pitágoras, uma vez que, sem nenhum problema, o quadrado dentado pode ser transformado num quadrado real da mesma área (vide figura 4) e por isso, I + II = IV (vide figura 5).

ISBN 978-85-89082-23-5

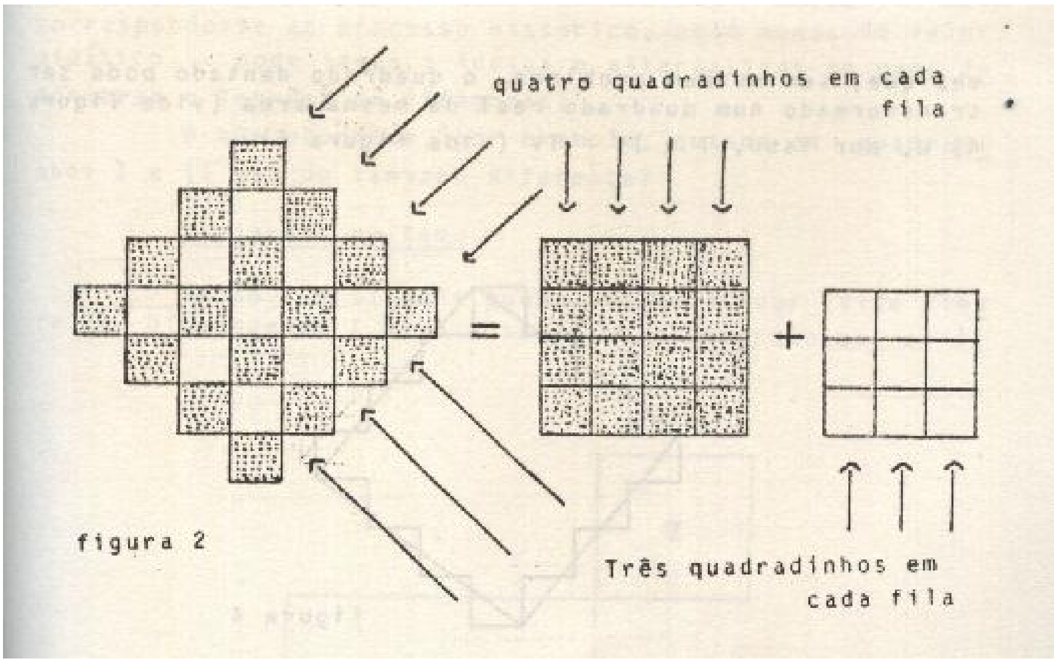


figura 2

ISBN 978-85-89082-23-5

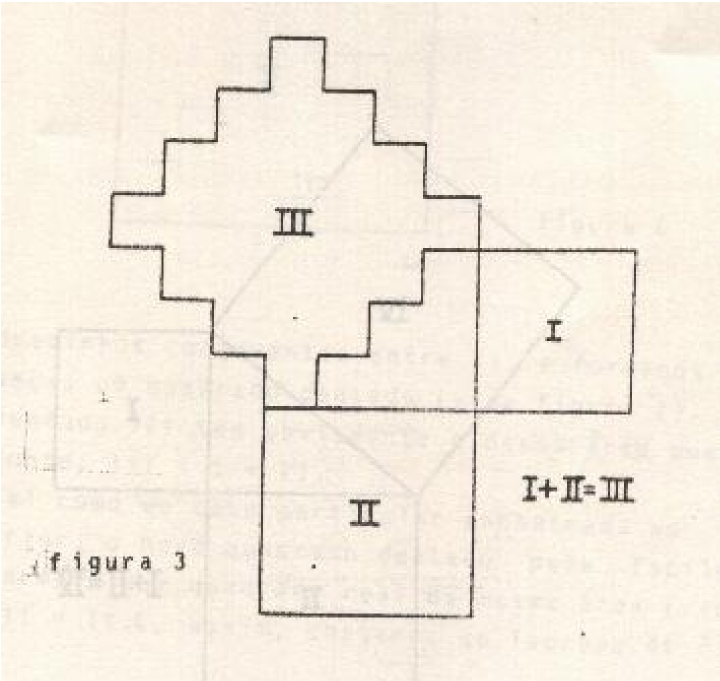


figura 3

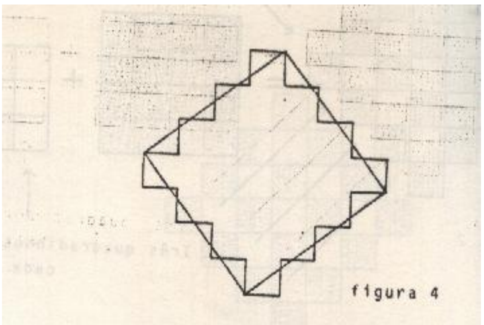


figura 4

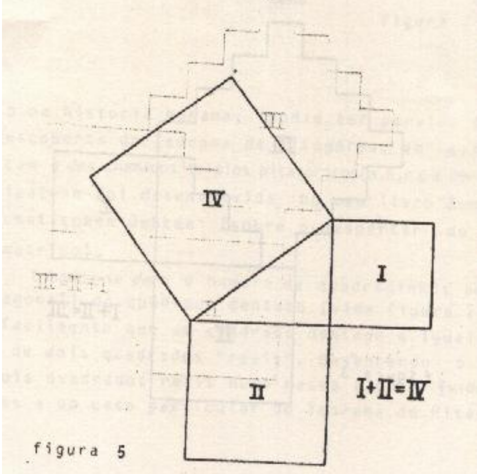


figura 5

ISBN 978-85-89082-23-5

Ora, este processo de descoberta - mesmo se não correspondesse ao processo histórico, pelo menos de valor didático - pode levar a idéias e alternativas de como demonstrar o Teorema de Pitágoras?

O que acontece, por exemplo, quando os quadradinhos I e II são de tamanho diferente?

Variações no tema

Sejam I e II dois quadrados quaisquer (vide figura 6). Dissequemos I em 9 quadradinhos congruentes, e II em 16 quadradinhos congruentes entre si, e formamos com estas 25 peças um quadrado dentado (vide figura 7). Este quadrado dentado III tem obviamente a mesma área que I e II em conjunto: III = I + II.

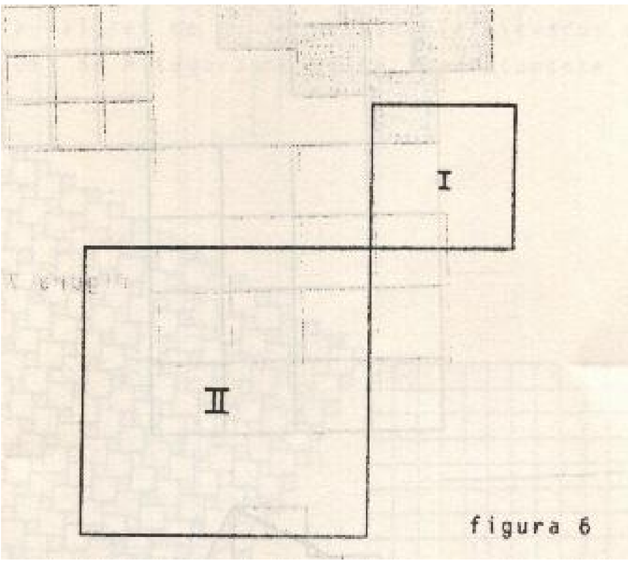


figura 6

Tal como no caso particular encontrado no parágrafo anterior, o novo quadrado dentado pode facilmente ser transformado num quadrado real da mesma área (vide figura 8): III = IV.E, assim, chegamos ao Teorema de Pitágoras na sua generalidade:IV = I + II.

ISBN 978-85-89082-23-5

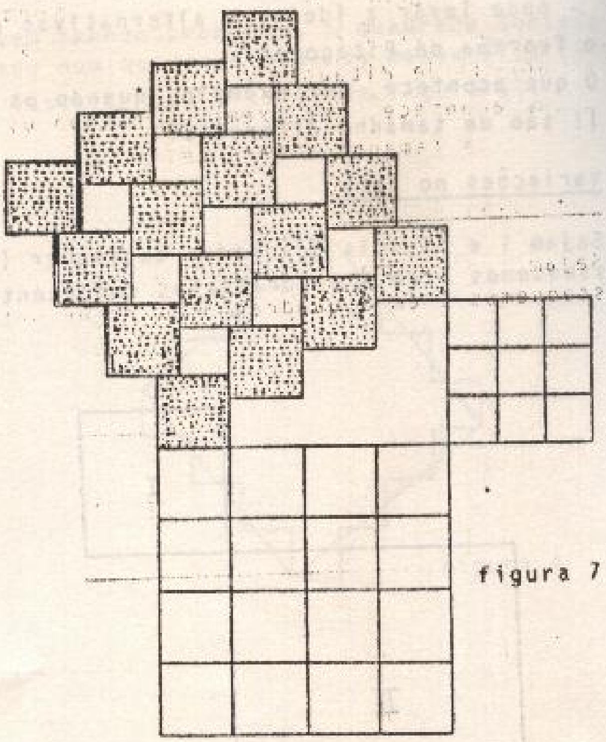


figura 7

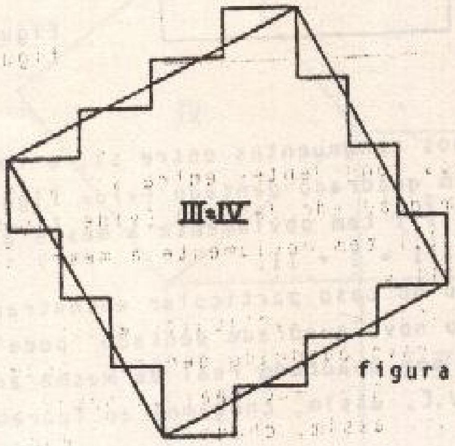


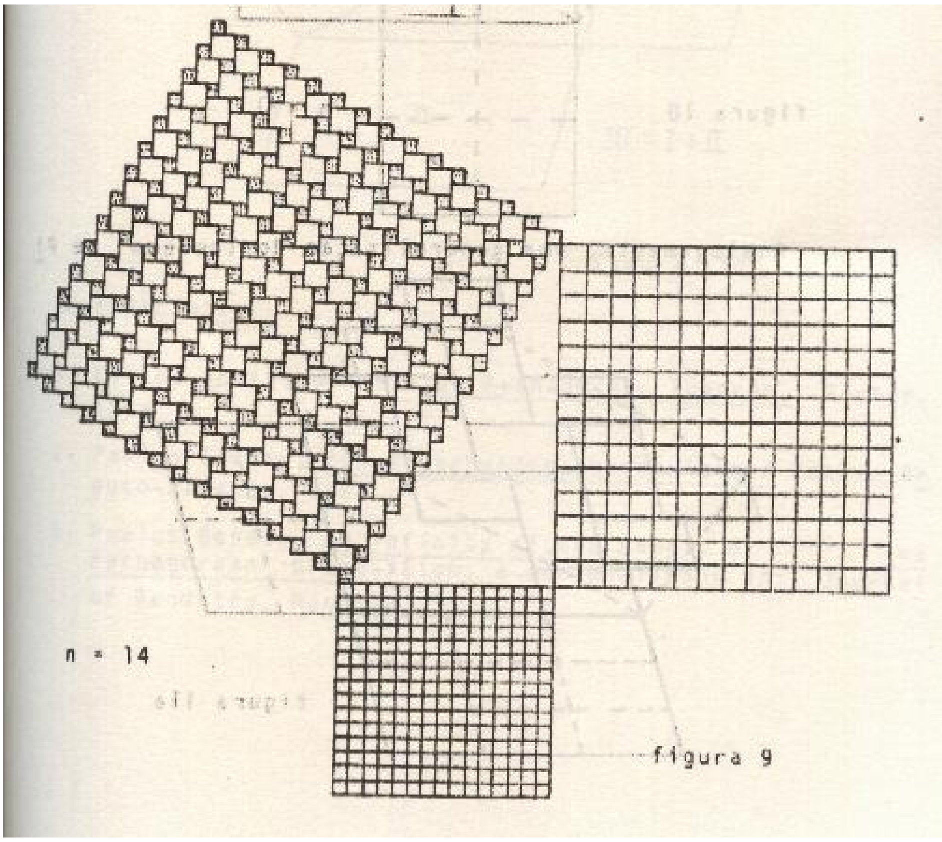
figura 8

Em vez de dissecarmos I e I I em 9 e 16 subquadrados respectivamente, podemos dissecá-los em n^2 e $(n + 1)^2$ subquadrados respectivamente, onde n é um número natural qualquer. A figura 9 ilustra o caso n=14.

A cada valor de n corresponde a uma demonstração, do Teorema de Pitágoras. Por outras palavras, existe, pelo menos, uma infinidade enumerável de demonstrações deste Teorema.

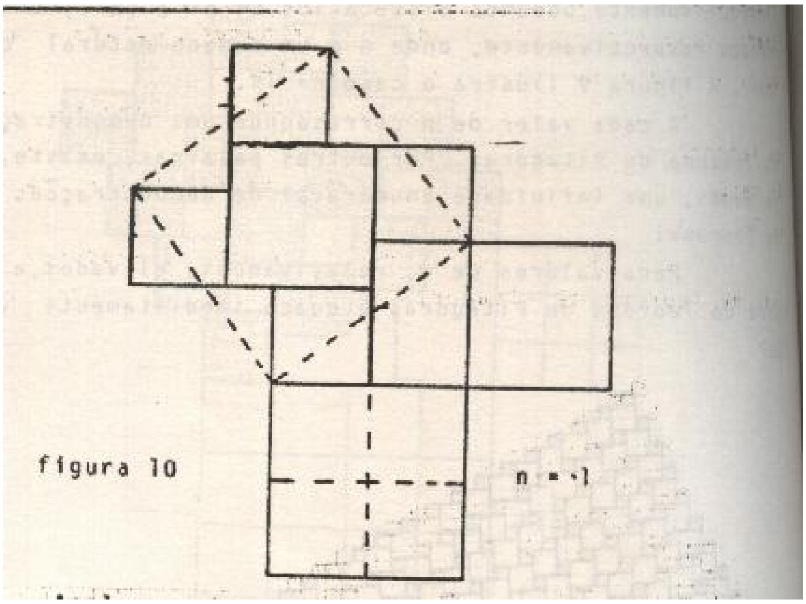
ISBN 978-85-89082-23-5

Para valores de n, relativamente elevados, a verdade do Teorema de Pitágoras é quase imediatamente visível.

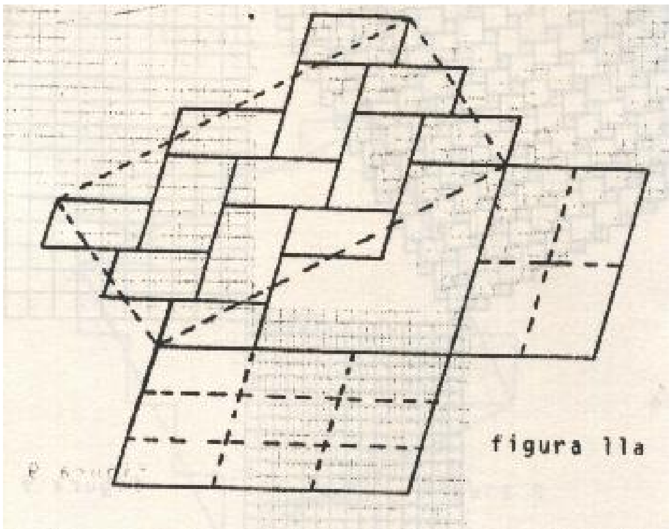


Para n=1, obtém-se uma demonstração de utilidade práticas (vide figura 10), que, num processo de ensino-aprendizagem bem estruturado, pode ser descoberta e compreendida pela maioria dos alunos.

ISBN 978-85-89082-23-5



Analogamente, uma generalização do teorema de Pitágoras para paralelogramos pode ser descoberta com facilidade e igualmente pode ser demonstrada de infinitas maneiras (vide figura 11).



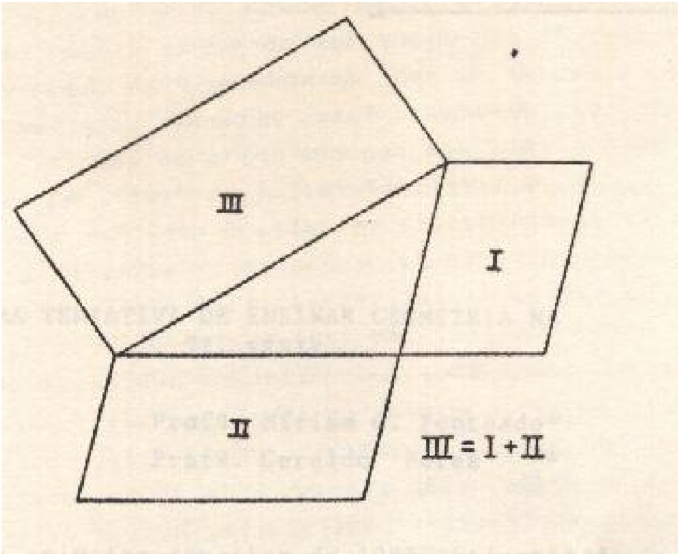


figura 11b

Referências

LOOMIS, E. S. **The Pythagoreen Theorem**, Reston, 1972.

GERDES, P. **Zum erwachenden geometrischen**. Denken, .Maputo- Dresden, 1985.

GERDES, P. **An infinity of new proofs of the Pytagorean proposition**, a ser publicado in: Journal of Geometry. Munchen.