ISBN 978-85-89082-23-5

Modelagem Matemática - Experiências no Cálculo[1]

Rodney Carlos Bassanezi [2]

"NÃO MANDE OS ALUNOS PLANTAREM BATATAS, ENSINE-OS A PLANTAR BATATAS".

Como ocorre em todas as Universidades, o Instituto de Matemática supre a necessidade de outros institutos, oferecendo disciplinas nos cursos de graduação e de pós-graduação. São raras as vezes em que não ocorrem problemas entre os professores de Matemática e alunos dos cursos que não possuem ligação direta com a Matemática, tais como os de áreas Humanas e de áreas Biológicas. Estes problemas, algumas vezes, tornam-se graves e isto ocorre principalmente quando os professores insistem em TRABALHAR a Matemática de modo que não haja nenhuma ligação com o curso dos alunos. Isto contribui para um desgaste TOTAL tanto para os alunos, que geralmente não gostam de Matemática e passam a detestá-la ainda mais, quanto para os professores que, após a experiência, vêem tais disciplinas como castigo e fazem de tudo para não assumi-las novamente.

Com vistas a isto, passaremos a relatar uma experiência interessante realizada de Cálculo Diferencial e Integral para os alunos do curso de Engenharia de Alimentos da UNICAMP. Muitos problemas já haviam sido criados pelos alunos desta disciplina, pois, ao tomarem contato com um curso tradicional de Cálculo I, não viam qualquer razão para estudarem tal matéria, que não tinha nada a ver com sua futura formação, e eles, de antemão, já começaram o ano predispostos, e, só por curiosidade, vários alunos vestiam camisetas onde destacava-se a frase "DETESTO CÁLCULO".

Preocupado em trabalhar a Matemática de modo a envolver os alunos, propusemos que trouxessem temas ligados à Engenharia de Alimentos para

[1] Digitalizado por Analucia Castro Pimenta de Souza, Célia Barros Nunes, Fernanda Menino e Tatiane da Cunha Putti, alunas do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro.
[2] Professor do Departamento de Matemática da UNICAMP, e Professor do Mestrado em Educação Matemática de Rio Claro.

ISBN 978-85-89082-23-5

verificarmos se tais temas tinham pontos de ligação com a Matemática, para que pudéssemos desenvolvê-los. Vários temas surgiram, mas um deles chamou mais atenção. Este tema foi proposto por um aluno cujo pai trabalha com o plantio de batatas, e sua dúvida era a seguinte: O PLANTIO DE BATATAS é efetuado usando-se uma distância de aproximadamente 30 cm entre dois “pés” em uma mesma “rua”. Por que esta distância?

Em cima desta questão, nos interessamos e fomos procurar outras informações, que são as seguintes:

1. Os órgãos governamentais financiam uma plantação de batatas desde que a produção mínima seja de 800 sacos por alqueire.
2. Cada saco de batatas pesa 60 Kg.
3. A metragem de um alqueire (paulista) é 24.200 m^2.
4. O plantio de batatas se dá em “ruas” espaçadas de 80 cm.

Outros dados experimentais foram obtidos no Instituto Agronômico de Campinas:

5. 8 batatas pesam em média 0, 639 gramas.
6.

Distância entre duas Plantas Consecutivas na Mesma Rua	Produção de Batatas por Planta (média)
25 cm	4,5
30 cm	6,5
35 cm	7,5
40 cm	8,0
45 cm	8,25

Com distância superior a 40 cm, o acréscimo de produção é desprezível.

SOLUÇÃO

a) Considere uma região quadrada de 1 alqueire e, portanto, cada lado vale:

1 alqueire = 24.200 m²

1 - 155, 56 m

Número de ruas = $\frac{155}{0{,}8}$ - 194 ruas

b) Função Produção: $P\ (d,b)$

d = Distância entre duas plantas consecutivas na mesma rua

b = Produção de batatas por planta

$$P\ (d,b) = \underbrace{\left(\frac{0{,}639}{8}\cdot h\right)}_{\text{peso da batata produzida}}\underbrace{\left(\frac{155}{d}\cdot 194\right)}_{\text{quantidade de plantas}}\cdot\frac{1}{60} = \text{quantidade de sacos}$$

observação: A produção em sacos:

$P = \frac{q\cdot Q}{60}$ onde $Q = 194\ .\ \frac{155}{d}$ (quantidade de plantas)

$q = \frac{0{,}639}{8}\cdot b$ (quantidade de batatas)

Logo $P\ (b,d) = \frac{0{,}639}{8}h\cdot\frac{155}{d}\cdot 194\cdot\frac{1}{60} = 40\frac{b}{d}$

ISBN 978-85-89082-23-5

(erro de 3%)

Vamos procurar uma relação entre *b* e *d*, isto é, $f(d) = b$

Seja	$d_1 = 0{,}25$	Então	$b_1 = F(d_1) = 4{,}5$
	$d_2 = 0{,}30$		$b_2 = F(d_2) = 6{,}5$
	$d_3 = 0{,}35$		$b_3 = F(d_3) = 7{,}5$
	$d_4 = 0{,}40$		$b_4 = F(d_4) = 8{,}7$
	$d_5 = 0{,}45$		$b_5 = F(d_5) = 8{,}85$

Então:

$$F(d_2) = F(d_1) = 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$F(d_3) = F(d_2) = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{0}$$

$$F(d_4) = F(d_3) = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$$

$$\mathrm{F}(d_5) = \mathrm{F}(d_4) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

Supondo agora que a sequência das diferenças fosse continuada, teríamos para todo n

$$F(d_{n+3}) - F(d_{n+2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \qquad n = -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

De onde podemos concluir que

$$F(d_{n+3}) - F(d_1) = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

As parcelas desta soma são termos de uma P.G onde

a_1 = *2* e a razão $q = \frac{1}{2}$

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = \frac{1}{2^{n-2}}$

e $S_n = F\left(d_1\right) = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$

$$\frac{2 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 4 - 2^{2-n}$$

Logo

$F\left(d_{n+3}\right) = F\left(d_1\right) + 4 - 2^{2-n} = 4{,}5 + 4 - 2^{2-n} =$

$= 8{,}5 - 2^{2-n}$

Em correspondência a cada n temos

n = 1 $\quad d_1 = 0{,}25$

n = 2 $\quad d_2 = 0{,}30$

n = 3 $\quad d_3 = 0{,}35$, etc.

Portanto, temos que

$$\boxed{n = 20d - a}$$

Passando para uma distância <u>d</u> contínua, chamamos *n* de *x* $(x \in \Re)$ obtemos:

Equação da reta (na Forma contínua)

$$\frac{1-0}{0{,}3-0{,}25}(d-0{,}3) - x - 1$$

$$\frac{1}{0{,}25} \quad (d-0{,}3) - x - 1$$

$d - 0{,}3 = 0{,}05\,x - 0{,}05$

$d = 0{,}05\,x + 0{,}25$

$\boxed{x = 20d - 5}$

Substituindo esta expressão em *F(d),* obtemos

$b = F(d) = 8{,}5 - 2^{\,2-(20d-5)} = 8{,}5 - 2^{\,7-20d}$ (Função Potência)

F

A Função Produção então pode ser escrita com uma única variável:

$$P\,(b,d) = P\,(d) = 40\,\frac{8{,}5-2^{7-20d}}{d}$$

c) Pontos de Máximo para *P (d)*

- Derivada 1ª

$$P'(d) = 40\,\frac{d\,20\ln 2\cdot 2^{7-20d} - 8{,}5 + 2^{7-20d}}{d^2}$$

$$= \frac{40\cdot 2^{7-20d}(20d\,1n\,2+1) - 40\cdot 8{,}5}{d^2}$$

Agora temos que encontrar *d* tal que $P'(d) = 0$, isto é,

ISBN 978-85-89082-23-5

$2^{7-20d}\, 20d \ 1n\ 2+1 - 8{,}5 = 0 \qquad 2^{7-20d}\, 20d\ 1n\ 2+1 = 0$

Temos que:

$P'(0{,}25) = 640 \ (13{,}868 - 4{,}5) > 0$

$P'(0{,}30) = 444{,}44 \ (8{,}31 - 6{,}5) > 0$

$P'(0{,}35) = 326{,}5 \ (4{,}85 - 7{,}5) < 0$

Como a função derivada é contínua para $d \neq 0$ e, portanto, no intervalo $[0{,}30;0{,}35]$ muda de sinal, temos que existe um ponto d^* $(0{,}30;0{,}35)$ onde $P'(d^*)=0$ (Teorema do Valor Médio).

Usamos agora o <u>método da bissecção</u> para determinar o valor de d^* aproximadamente

$$d_1^* = \frac{0{,}35 + 0{,}3}{2} = 0{,}325 \Rightarrow P'(0{,}325) = 378{,}69 \ (6{,}371 - 7{,}085) < 0$$

$$d_2^* = \frac{0{,}325 + 0{,}3}{2} = 0{,}3112 \Rightarrow P'(0{,}3112) = 409{,}6 \ (7{,}57 - 6{,}81) > 0$$

$$d_3^* = \frac{0{,}3112 + 0{,}325}{2} = 0{,}3181 \Rightarrow 0{,}318 = d^*$$

Podemos usar este valor (com erro de 6×10^{-2}) como raiz, ou continuar o processo se quisermos maior aproximação.

Agora, com d^*= 0,318 a produção será de 875, 2 sacos, que é a <u>produção máxima</u> pois

$$P(d) = \frac{40}{d}\left(8{,}5 - 2^{7-20d}\right) \quad \text{e}$$

$$P'(d) = \frac{-40}{d^2}\left(8{,}5 - 2^{7-20d}\right) + \frac{40}{d}\left(20\ln 2 \cdot 2^{7-20d}\right)$$

Temos $P''(d) = \frac{2 \cdot 40}{d^3}\left(8{,}5 - 2^{7-20d}\right) - \frac{40}{d^2}\left(2^{7-20d}\, 20\, 1n2\right) -$

$$\frac{40}{d^2}\left(2^{7-20d}\, 20\, 1n2\right) - \frac{40}{d}\left[\left(20\, 1n2\right)^2 \cdot 2^{7-20d}\right]$$

$$= -\frac{P'(d)}{d} - \frac{40}{d} \cdot 2^{7-20d} \cdot 20\left(1n2\right)^2$$

Como $P'\left(d^*\right) = 0$, segue-se que $P''\left(d^*\right) < 0$ e, portanto, d^* é um ponto de máximo para $P(d)$.

Portanto, teremos para *d = 0, 318* cm uma produção máxima, o que justifica a prática do Pai do Aluno.

Com isso,verifica-se que foram trabalhados quase todos os tópicos de um curso de Cálculo I, e, o mais importante, houve envolvimento dos alunos.

Agora, ficam como desafio alguns exercícios:

1. Como o financiamento é possível se a produção mínima for de 800 sacos/alqueire, determine o intervalo $\left[x_1, x_2\right]$ onde se podem tomar valores para a distância *d*, de modo que a produção de um alqueire seja no mínimo de 800 sacos.

2. Se o terreno for na forma retangular, a produção será modificada se usarmos a mesma distância d^* encontrada no problema resolvido?

3. Quais as dimensões de um terreno retangular plano de *1* alqueire pra que se tenha ruas paralelas (retas) e uma produção máxima?

4. Se o terreno de *1* alqueire for circular e as ruas também circulares (círculos concêntricos), se mantivermos a distância de *80* cm entre as ruas, a produção será maior ou menor que um terreno quadrado?

ISBN 978-85-89082-23-5

5. Procure melhorar o modelo estudado considerando que, se o terreno é cercado, cada planta deve ficar a uma distância de, pelo menos, 80 cm da cerca.