ISBN 978-85-89082-23-5

Sobre Aritmética e Ornamentação Geométrica: análise de alguns cestos de índios do Brasil[1]

Paulus Gerdes

A fotografia 1 mostra quatro cestos ci1indricos com fundo quadrado. As tiras de planta entrelaçam-se de tal modo que façam ângulos de 45° tanto com os lados do fundo quadrado como com a abertura redonda do cesto. Este tipo de cesto pode ser visto em diversas regiões do mundo, tais como na Indonésia, em Moçambique e na Guiana. No parágrafo "Como se podem entrelaçar cestos com fundo achatado?" do meu livro "Sobre o despertar do pensamento geométrico" (1987, = 3.6.) analisei as considerações de natureza geométrica que, provavelmente, tivessem contribuído para a invenção do referido tipo de cesto. Prosseguindo o estudo anterior, pretendo, no trabalho que aqui se apresenta, debruçar-me sobre uma outra questão: Quais são as reflexões de índole matemática que podem desempenhar um papel na ornamentação de cestos cilíndricos de fundo quadrado? Tomo como ponto de partida os cestos representados na fotografia 1.

Os cestos A, B e C foram adquiridos em Abril de 1988 em Rio Claro (Estado de São Paulo). Conforme a vendedora me informou, eles provem de tribos índias do Norte do Brasil. O último cesto (D) foi-me oferecido em São Paulo e provém da aldeia Kamayurá dos Índios Wai-Wai.

Como o leitor certamente sabe, no caso de esteiras pode-se gerar 1indos padrões ao colorir as tiras de uma direção, enquanto que as da outra direção mantêm a sua cor natural (amarelada-branca). A fotografia 4 dá-nos o exemplo de uma esteira angolana. Nela as tiras horizontais foram enegrecidas.

A primeira vista pode parecer que os padrões preto-branco dos cestos A, B,C e D se obtiveram da mesma maneira, quer dizer, entrelaçando de forma cruzada um grupo de tiras pretas com um grupo de tiras brancas. Na rea1idade, não é assim que foram gerados. E mais. Se se entrelaçassem, do mesmo modo que a esteira representada, cestos cilíndricos de fundo quadrado, não se obteria, de forma nenhuma, meandros

[1] Digitalizado por Edson Pereira Barbosa e Sílvio César Otero Garcia.

(cesto A) ou outros atractivos ornamentos preto-brancos! Tiras pretas cruzar-se-iam com outras pretas; tiras brancas cruzar-se-iam com brancas. A explicação para esta impossibi1idade encontra-se numa particularidade deste tipo de cestos cilíndricos de fundo quadrado. Cada tira de planta sai do fundo em dois sítios. Como ilustra o esquema da figura 2, uma parte da tira sobe numa espiral para a esquerda, enquanto que a outra parte gira para cima numa espiral para a direita. Por esta razão, cada tira de planta cruza-se, na parede cilíndrica do cesto, consigo mesmo e com todas as tiras que, no fundo do cesto, lhe ainda eram paralelas.

Como então se obtiveram os padrões preto brancos dos cestos A, B, C e D?

Ao observar mais de perto os fundos dos nossos cestos brasileiros (vide fotografia 2 e figura 3), constata-se que todas as tiras são do mesmo gênero particular: exactamente metade de cada tira de planta foi enegrecida (vide figura 4). Cada fundo (com um padrão composto por vários 'quadrados' concêntricos) apresenta uma simetria rotacional de 90°, ou seja, de ordem 4: os quatro quadrantes são congruentes quanto a coloração (compare o fundo do cesto D na figura 3 com o quadrado entrelaçado na figura l). Por conseqüência, todas as aspirais que giram para a esquerda são pretas e todas as que giram para a direita são brancas (como no caso dos cestos A e B), ou vice versa, todas as aspirais que giram para a esquerda são brancas e todas as que giram para a direita são pretas (cestos C e D). Desta maneira, os artesãos índios resolveram criadoramente o problema: nas paredes laterais dos cestos as partes da tira enegrecidas cruzam-se sempre com partes de tira de cor natural. Esta solução trouxe-1hes, a possibilidade de transferir padrões planares de esteiras ou peneiras para os seus cestos-cilíndricos-de-fundo-quadrado.

Com a possibilidade assim adquirida de ornamentação das paredes ci1índricas deste tipo de cesto, surgiu ao mesmo tempo um problema completamente novo. Ao decorar esteiras planares podia-se entrelaçar, sempre e sem nenhuma dificuldade, um elemento rectangular do padrão ao lado dum elemento igual. A esteira era em princípio ilimitada. A parede cilíndrica de um cesto é, em contrapartida, limitada: nem sempre se torna possíve1 entrelaçar (horizontalmente) um elemento do padrão ao lado dum anterior. Isto só será possível, se ainda houver suficiente lugar para tal, quer dizer, se o número das partes da tira ainda ‘livres’ for igual ou maior que o número das tiras necessárias para o elemento do padrão. Para assegurar a continuidade da ornamentação em torno de todo o cesto cilíndrico, ou seja, para garantir que a ornamentação do cesto apresente uma simetria rotacional (isto pressupõe esta simetria como valor estético, e no processo sob consideração este valor enraíza-se ainda mais), o artesão vê-se obrigado a escolher o número (N) de tiras de tal modo que haja em cada nível horizontal do cesto espaço necessário e suficiente para que o mesmo elemento do padrão apareça exactamente P vezes (P deve ser um número natural). Não pode 'sobrar' nenhuma tira. Por outras palavras, deve-se verificar:

(1) $$N = P \times Q,$$

onde Q representa a 'largura' do elemento do padrão, quer dizer o número de tiras de planta que geram o elemento do padrão.

Uma vez que cada fundo de cesto é construído por quatro quadrantes congruentes (compare figura 3) verifica-se que o número (N) de tiras de planta é sempre o quádruplo de um numero natural menor (n):

(2) $$N = 4n$$

Por outras palavras, cada quadrante gera um quarto da parede cilíndrica. Se pretender repetir p vezes um elemento do padrão em cada quarto da parede do cesto, deve-se garantir que:

(3) $$n = p \times q.$$

Isto implica:

(4) $$P = 4p,$$

ou seja, P é um número divisível por quatro. Nos casos concretos dos nossos cestos de índios, observam-se que P de facto é sempre um quádruplo:

(5) $$P(A) = 12,$$

(6) $$P(B) = 16,$$

(7) $$P(C) = 8,$$

(8) $$P(D) = 4,$$

A partir daqui pode-se concluir que os inventores destes tipos de cestos decorados estavam, muito provavelmente, conscientes da relação (simplificada):

(3) $$n = p \times Q.$$

Q depende da seleção do padrão. 0 numero p das repetições do elemento do padrão pode, em princípio, ser escolhido 1ivremente. Os valores de p e Q determinam o

ISBN 978-85-89082-23-5

número (n) das tiras de planta que são precisas (numa direcção) para um quadrante do fundo do cesto.

Análise do cesto A

A figura 5b mostra, que a largura de entrelaçamento[1] ou 'período' do padrão de meandro do cesto A é igual a 10:

(9) $$Q(a) = 10.$$

Atendendo a $P(A),$ deve-se verificar:

(10) $$n(A) = P(A) \times Q(A) = 3 \times 10.$$

Na figura 5a mostra-se um quadrante do fundo do cesto A. O número n(A) de tiras de planta numa direcção (por exemplo, o número das partes de tiras brancas) pode ser contado em grupos de quatro; no fim sobram duas tiras:

(11) $$n(A) = 7 \times 4 + 2.$$

Isto leva-nos à conjectura de que o inventor (ou os inventores) deste tipo A sabia, que:

(12) $$7 \times 4 + 2 = 3 \times 10.$$

Fica ainda aberta a questão de como e em que forma este conhecimento tinha sido adquirido. Talvez através da justa- ou sobreposição de esteiras decoradas com os dois padrões preto-brancos envolvidos? Observando o cesto A com mais cuidado, constata-se que nem todos os meandros tem a largura de 10 tiras :

fila superior	10	9	11	11	10	10	10	9	10	11	10	9
fila inferior	10	9	9	10	10	9	10	11	13	11	9	9

Alguns têm a largura de 9, outros de 11 ou 13; apenas a largura média é igual a 10. Trata-se de um cesto 'descuidadoso' ou ' des1eixadamente' entrelaçado, provavelmente uma imitação apressadamente produzida de um cesto mais antigo. Embora o fundo tenha sido bem limitado, o cesteiro não se preocupou muito com a precisão (isto é, todos os meandros com a mesma largura) da ornamentação da parede. Se, em contrapartida, o inventor não tivesse pretendido uma precisão, ele poder-se-ia ter contentado com, por exemplo, 7 x 4 tiras por quadrante em vez de 7 x 4 + 2. Isto reforça a nossa conjectura de que a escolha de 7 x 4 + 2 tiras por quadrante não foi de maneira nenhuma causal, e sim o resultado do cálculo: 3x10=7x4+2. O cálculo podia, como já disse anteriormente, ter sido de natureza geométrica. Por outro lado é bem possível que o imitador/copiador não estivesse consciente, neste contexto, da relação

(12) $$7 \times 4 + 2 = 3 \times 10.$$

Apenas aprendera de uma forma ou de outra, que para este modelo são necessários 7 x 4 + 2 tiras por quadrante.

A nossa análise do primeiro cesto (A) levanta imediatamente a questão de como, nos casos dos cestos B, C e D, se relacionam o possível original e a provável imitação.

Análise do cesto B

A fotografia 3 mostra os ‘versos’ dos cestos B, C e D. Além dos 16 quadrados entrelaçados $P(B) = 16,$ aparece, no caso do cesto B, em ambas as filas de quadrados entrelaçados ainda um rectângulo com uma largura de entrelaçamento de 8 tiras de planta (vide figura 6). Este rectângulo 'abole' a continuidade e a simetria da ornamentação no seu todo. Será que o artista pretendeu criar um rectângulo? Ou o rectângulo foi talvez antes de mais nada uma falha ou um erro?

Partamos primeiramente da hipótese que o rectângulo não foi pretendido. Como podemos então explicar o seu aparecimento?

A figura 7b mostra que o período do quadrado entrelaçado é igual a 6:

(13) $$Q(B) = 6$$

Atendendo a $P(B) = 16$, temos p(B) - 4 e deve-se verificar para o número n(B) das tiras de planta quadrante (3):

(14) $$n(b) = p(B) \text{ x } Q(b) = 4x6$$

A figura 7a representa um quadrante do fundo do cesto B. As tiras de planta podem ser contadas em grupos de 5 e 4:

(15) $$n(B) = 2 \text{ x } 5+4 \text{ x } 4.$$

Na base do <u>nosso</u> conhecimento matemático podemos constatar imediatamente que esta quantidade 2x5+4x4 é igual a 26 e, por conseguinte, duas unidades maior que a quantidade necessária 4×6 , ou seja 24. Por haver em cada quadrante duas tiras de planta a mais, são ao todo 8 mais do que o desejado. Somente no momento em que o cesteiro conclui a sua fila de quadrados e tenta entrelaçar um último quadrado é que ele observa que isto não é possível. Tem tiras de planta a mais e obtém um rectângulo não quadrado; (com uma largura de entre1açamento de 8 tiras). Agora já é demasiado tarde para ele poder corrigir o seu erro. Para tal devia começar de novo.

Conseguimos explicar o aparecimento do rectângulo não-quadrado na decoração do cesto B. Falta-nos mostrar onde a falha/erro se deu.Vimos que as tiras de planta de um quadrante do fundo deste cesto podem ser contadas em grupos de 5 e 4:

(15) *n(B) =2x5+4x4.*

Porque grupos de larguras distintas? O que acontecerá se todos os grupos tiverem a mesma largura? Quando os grupos de centro do fundo tiverem uma largura de quatro em vez de cinco tiras de planta (como na figura 8a), então haverá ao todo 6 grupos de 4 tiras de planta. Por outras palavras, verificar-se-á:

(16) *n(B) =6x4*

Na base do <u>nosso</u> conhecimento aritmético vemos instantaneamente que este número 6 x 4 é, de facto, igual à quantidade necessária 6 x 4 (vide 14).

O erro torna-se evidente: os dois grupos de 5 tiras deviam ter sido grupos de 4. <u>Muito provavelmente</u> trate-se de um erro ou falha na <u>reprodução</u> ou <u>imitação</u> de um cesto mais antigo. O inventor deste cesto ornamentado está consciente de que para gerar quatro vezes um quadrado entrelaçado de largura 6 tiras, seis grupos de quatro tiras satisfaziam (vide figura 7c). 0 inventor <u>sabia</u> de uma ou de outra forma, que

(17) *6x4=4x6*

(nota-se uma conexão entre simetria rotacional do cesto e a ‘simetria aritmética’).

Como foi adquirido este conhecimento? Em que medida foi generalizado (<u>comutatividade da multiplicação</u>)?

Ao analisar o cesto B, supusemos que o aparecimento de um rectângulo não-quadrado nas duas filas de quadrados da ornamentação lateral <u>não</u> tinha sido pretendido. Se tivesse sido pretendido, apenas poderíamos dizer que o objectivo de facto foi alcançado.

Ainda existe uma outra possibi1idade. Pode ser que o cesteiro soubesse que precisava de 6 grupos de 4 tiras por quadrante do fundo do cesto para garantir o aparecimento de exactamente 4 quadrados entrelaçados em cada quarto duma fila na parede cilíndrica do cesto, mas que, ao mesmo tempo, ele devia conci1iar este saber com outros objectivos. Um possível objectivo podia ser garantir um determinado volume (compare com a repetição de determinado padrões de entrelaçamento na cestaria makonde do norte de Moçambique para obter cestos de volume estandartizado.

Vide # 3.7 'Sobre a formação de alguns padrões de entrelaçamento e de uma medida antiga de volume', (Gerdes, 1987).

Análise do cesto C

Para além das 8 'janelas' quadradas entrelaçadas (P (C) = 8), encontra-se em cada uma das três filas horizontais da parede do cesto C uma janela rectângular (vide fotografia 3c) que tem uma largura-de-entrelaçamento de 12 tiras de planta (vide figura 8).

Tal como no caso anterior, levanta-se agora também a pergunta se este rectângulo de 'dois olhos' (que elimina a continuidade da ornamentação na sua globalidade) tinha sido pretendido ou não pelo artesão-artista. Tenho a impressão de que se trata aqui de novo de um erro, cujo aparecimento pode ser explicado da seguinte maneira.

A figura 9a (lado direito) mostra que o período da janela entrelaçada e" igual a 9:

(18) $$q\ (C) = 9.$$

Atendendo a P(C) = 8, por conseguinte p(C) = 2 deve verificar-se para o número n(C) de tiras de planta por quadrante (3):

(19) $$n(C) = p(C) \times Q(C) = 2x9.$$

Uma vez que um quadrante do fundo do cesto C tem na realidade 7x3 tiras em cada direcção (vide figura 9a) e se verifica:

(20) $$7x3=2x9+3$$

(o que também pode ser constatado geometricamente, como mostra a figura 9a), há ao todo 4 x 3, ou seja, 12 tiras de planta a mais. Ao entrelaçar os dois grupos (sinistrogiros e dextrogiros) de 12 tiras a mais, o artesão obteve a 'janela de dois olhos': ele tentou, tanto a partir da direita como da esquerda, entrelaçar uma janela normal e quadrada de um só olho, o que se mostrou ser impossível: as duas ‘janelas de um olho’ fundiram-se necessariamente numa linda ‘janela de dois olhos’. Que daqui tivesse resultado um ornamento bonito foi mera sorte. A este respeito, o produtor de cesto D teve, como veremos em breve, menos sorte. O erro do fabricante do cesto C tornou-se claro. O cesteiro tem em cada quadrante um grupo de três tiras a mais: 7 vezes 3 tiras em vez de 6 vezes 3 tiras. Por uma ou outra razão enganou-se na contagem. Mais uma vez trata-se aqui também muito provave1mente de um erro de reprodução. O inventor da ornamentação original, na qual se baseia o cesto C, estava consciente de que para gerar duas vezes uma janela de 1argura-de-entre1açamento de 9 tiras, precisava de seis grupos de três tiras. Por outras palavras, o inventor sabia de uma ou de outra forma, que

(21) $$6x3 = 2x9$$

A figura 9b mostra como devia ter sido o quadrante original e como este gera exactamente duas vezes o elemento de padrão, quer dizer a ‘janela de um olho’.

Análise do cesto D

Para além de quatro vezes o lindo padrão de ‘macaco’ vê-se no cesto D ainda uma quinta figura menor. A última figura tem uma 1argura-de-entrelaçamento de 16 tiras de planta, como mostra a figura 11. Em contrapartida, o ‘macaco’, como os seus dois eixos de simetria perpendiculares entre si apresenta uma 1argura-de-entrelaçamento de 24 tiras (vide figura 10c, Q (D) = 24).

Atendendo a P(D) = 4 e, por conseguinte p(D) = 1, deve-se verificar para o número n(D) de tiras por quadrante (3):

(22) $$n(D) = p(D) \times Q(D) = 1 \times M.$$

Na figura 10a representa-se um quadrante do fundo cesto D. As tiras de planta em cada direcção podem ser contadas em grupos d e4e3.

(23) $$4 + 8x3$$

Tendo em conta

(24) $$8 \times 3 = 1 \times 24.$$

Os oito grupos de três tiras eram suficientes para gerar o padrão de macacos. No entanto no centro do fundo há ainda quatro vezes quatro, ou seja, 16 tiras a mais, o que obrigou a uma figura extra. O cesteiro tentou ainda produzir um quinto macaco (compare as partes inferiores das figuras 10 c e 11), mas não o conseguiu. Muito provavelmente encontremo-nos também no caso do cesto D perante um erro de reprodução. O inventor do cesto com o motivo de macaco sabia que para gerar o elemento de padrão precisava de oito grupos de 3 tiras:

(25) $$8 \times 3 = 24$$

A figura 10 b mostra como o quadrante original devia ter sido. Talvez o cesteiro tenha trocado a estrutura do fundo necessária com a de um outro tipo de cesto. Ao atender a

(26) $$4 + 8 \times 3 = 28 = 7 \times 4 = 4 \times 7 = 2 \times 14,$$

Sabemos que o outro tipo de cesto tem um elemento de padrão de período ou largura de 4, 7 ou 14 tiras.

Retrospectiva

Tendo em conta que os cestos A, B, C e D foram adquiridos por preços relativamente baixos (entre dois e três dólares estado-unidenses) e que os cesteiros provavelmente tenham recebido ainda muito menos pelo seu trabalho, fica reforçada a impressão de que se trata de cestos apressadamente produzidos. Os artesãos não se preocupavam demasiadamente com a precisão, porque uma maior precisão não seria nem observada nem valorizada pelos compradores. A ‘falta de preocupação’ pode explicar os erros de entrelaçamento analisados. No entanto, isto não implica que os artesãos não são capazes de alcançar esta precisão. Implica apenas que para poderem sobreviver não lhes vale a pena fazer os cálculos necessários para garantir a continuidade na ornamentação das paredes dos seus cestos-ci1índricos-de-fundo-quadrado. Nem lhes vale a pena tentar copiar cuidadosamente cestos mais antigos e mais preciosos.

Pelo menos os inventores dos motivos de ornamentação geométrica analisados possuíram um conhecimento exacto das interconexões geométrico-aritméticas entre os padrões do fundo quadrado e da parede cilíndrica dos cestos. Parece-me interessante e importante aprofundar a análise feita e prosseguir o estudo. Para tal é imprescindível fazer um trabalho de campo nas diversas comunidades de índios e estudar os cestos que

ISBN 978-85-89082-23-5

se encontram em museus. Na base desse estudo, é necessário reflectir sobre as possíveis influências dos conhecimentos dos cesteiros-artistas sobre o desenvolvimento no passado da matemática dos povos índios em geral e das civilizações antigas de Peru e México em particular.

Além da importância histórica, o prosseguimento do estudo pode ser útil também no campo educacional: valorizar o passado e o presente das culturas dos povos índios, incorporando elementos dos seus conhecimentos científicos, inclusive matemáticos, no ensino.

Referências

GERDES. P. **Sobre o despertar do pensamento geométrico.** UEM, Maputo, Moçambique, 1987.

Fotos e Figuras

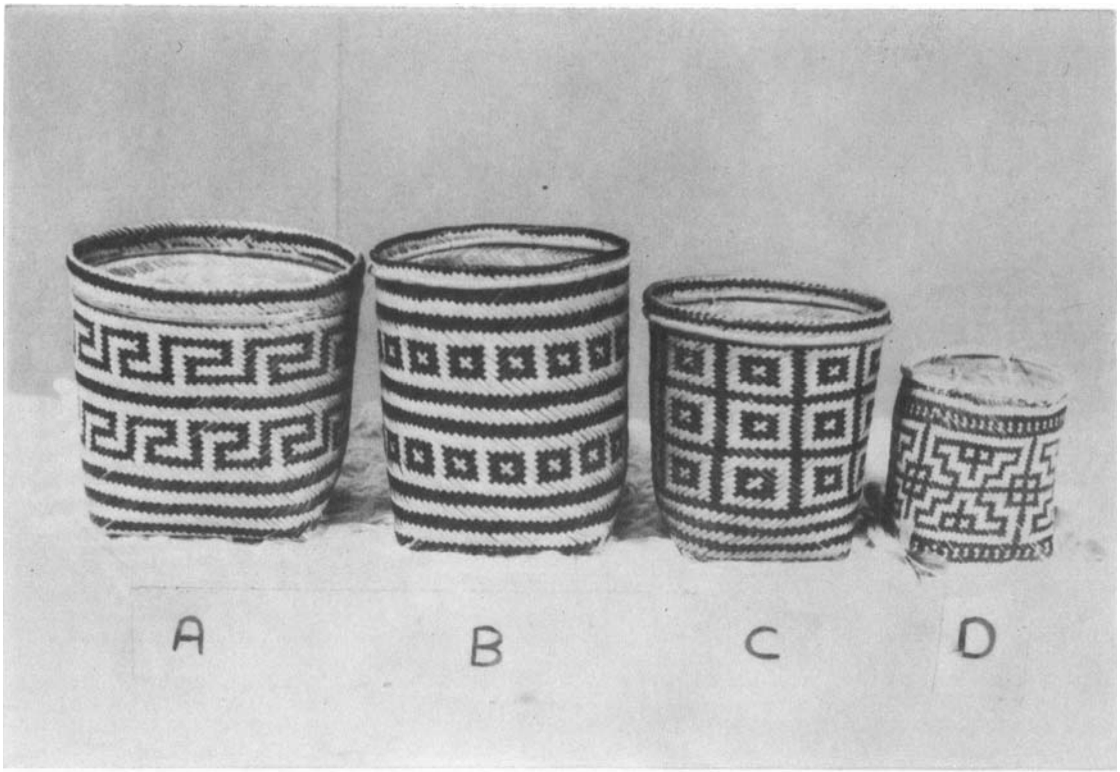


Foto 1

ISBN 978-85-89082-23-5

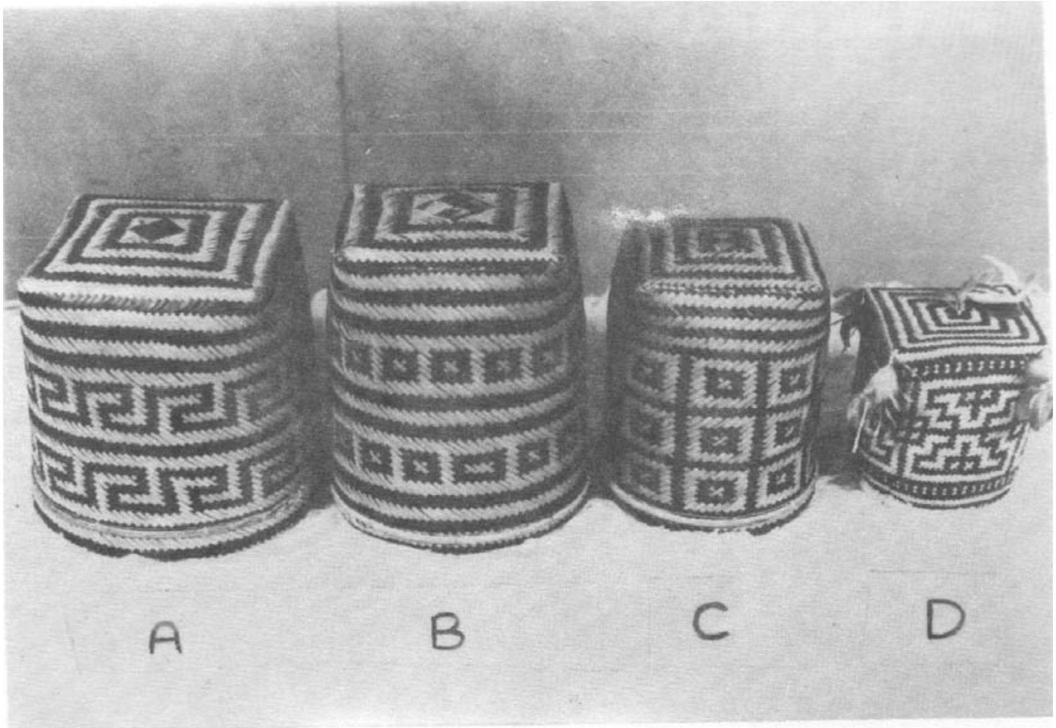


Foto 2

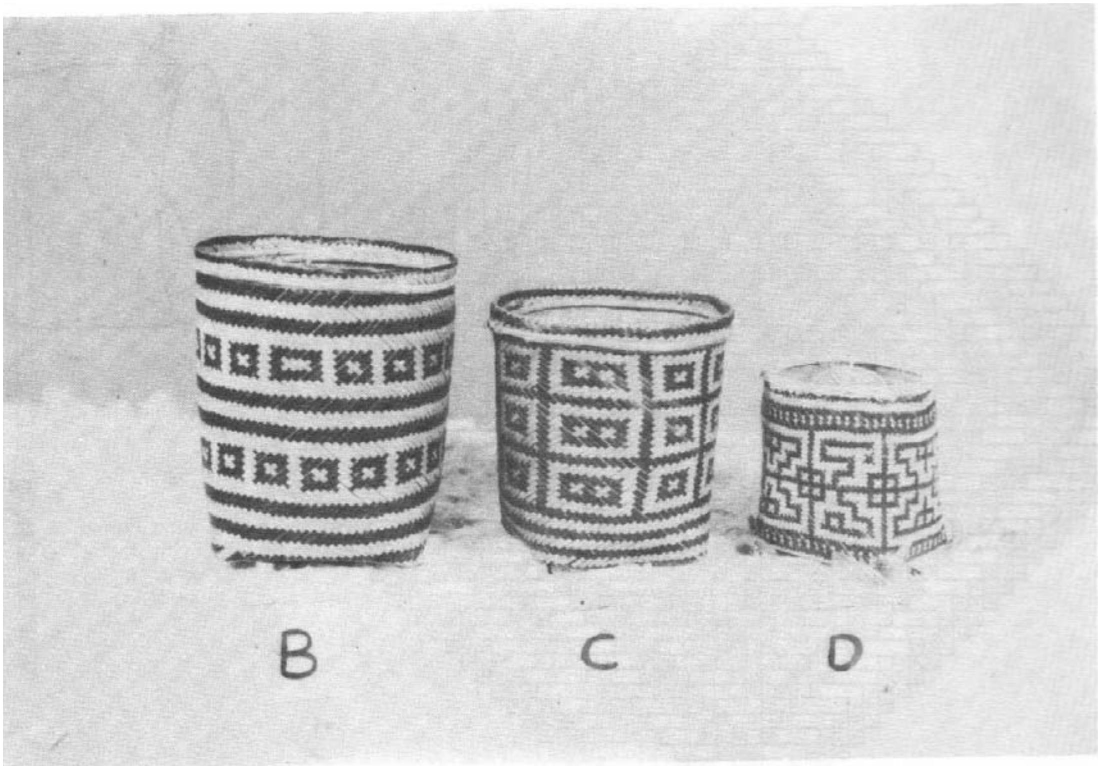


Foto 3

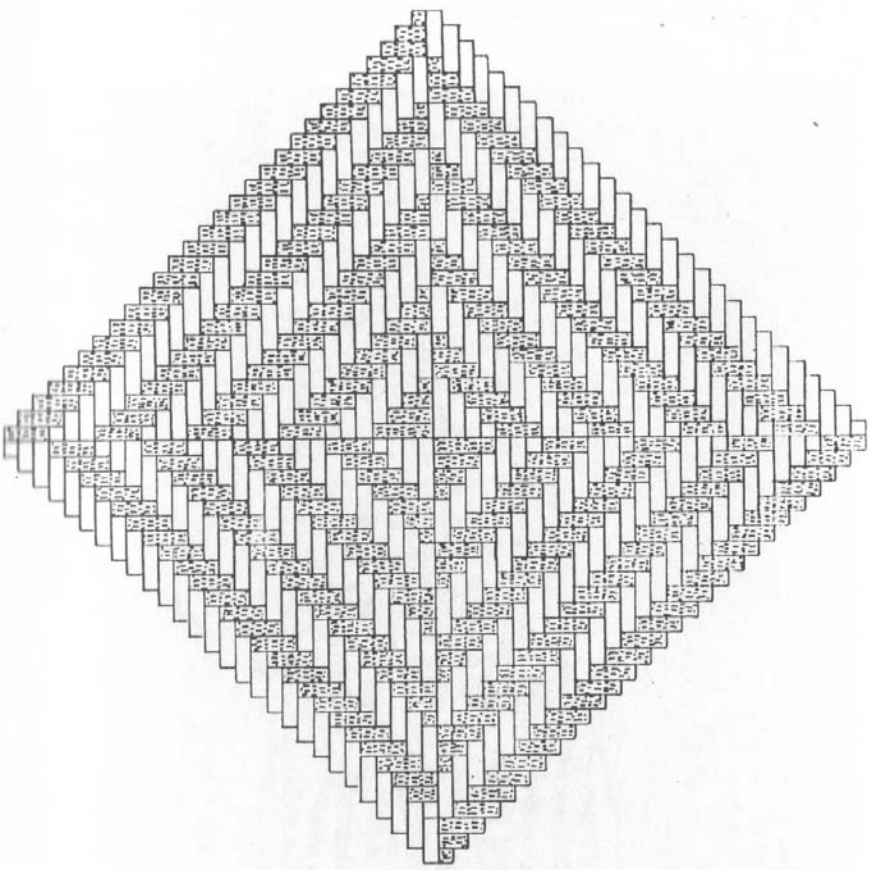
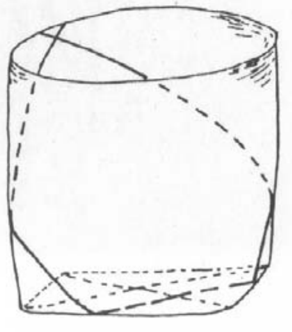


Fig. 1

Fig. 2



ISBN 978-85-89082-23-5

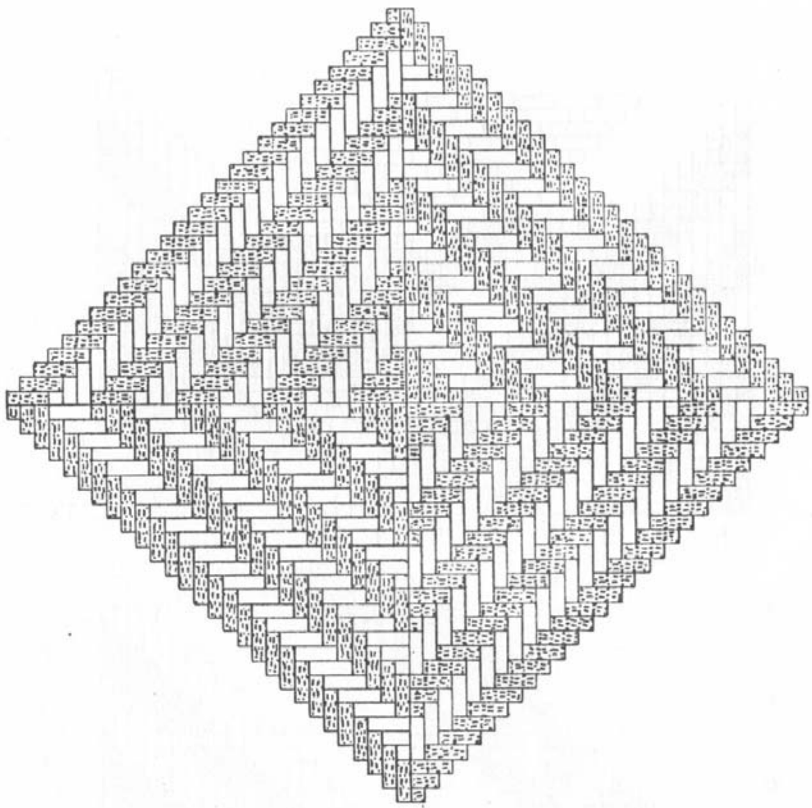
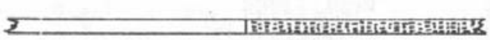


Fig. 3

Fig. 4



ISBN 978-85-89082-23-5

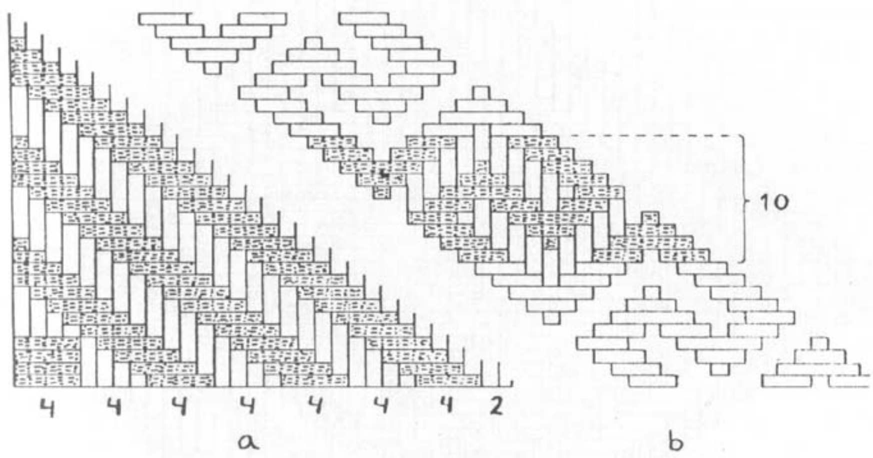


Fig. 5

Fig. 6

ISBN 978-85-89082-23-5

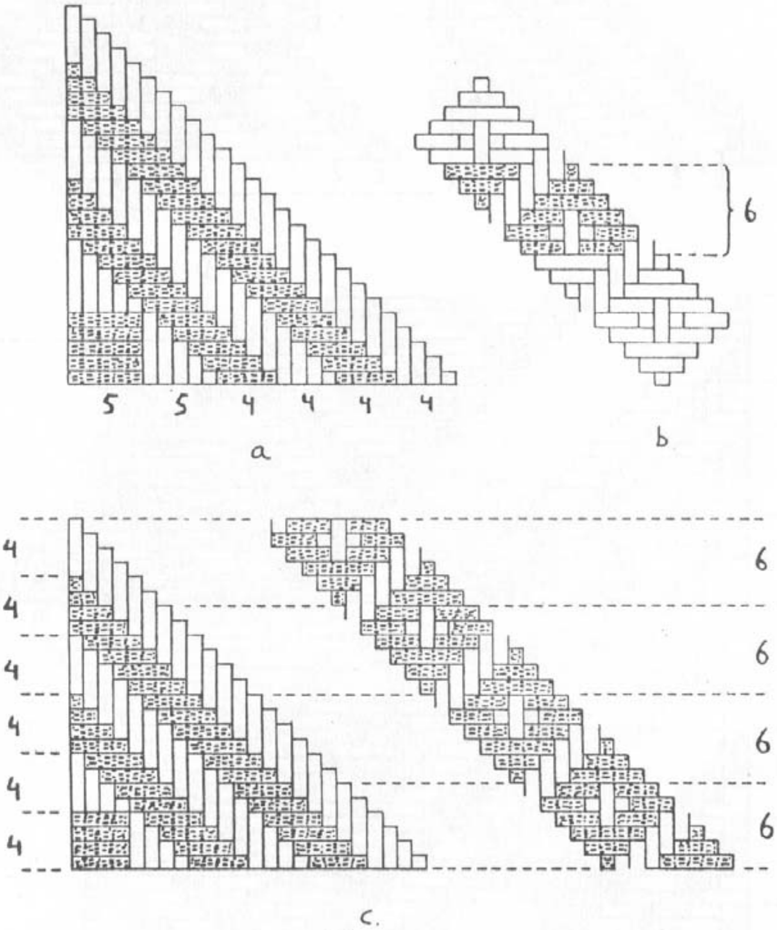


Fig. 7

ISBN 978-85-89082-23-5

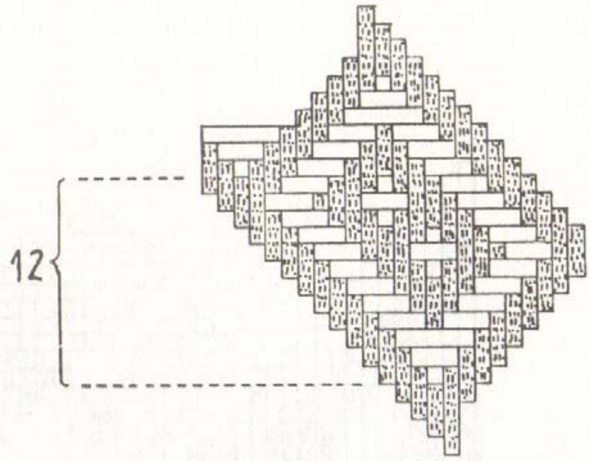
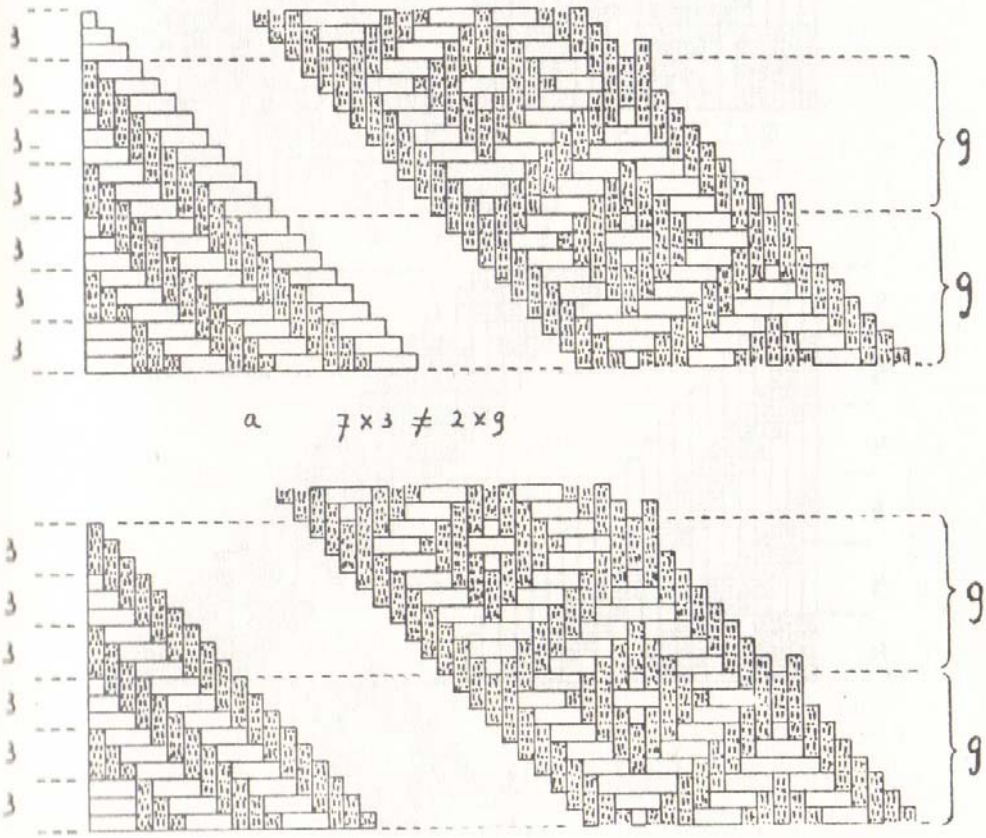


Fig. 8



a $7 \times 3 \neq 2 \times 9$

b $6 \times 3 = 2 \times 9$

Fig. 9

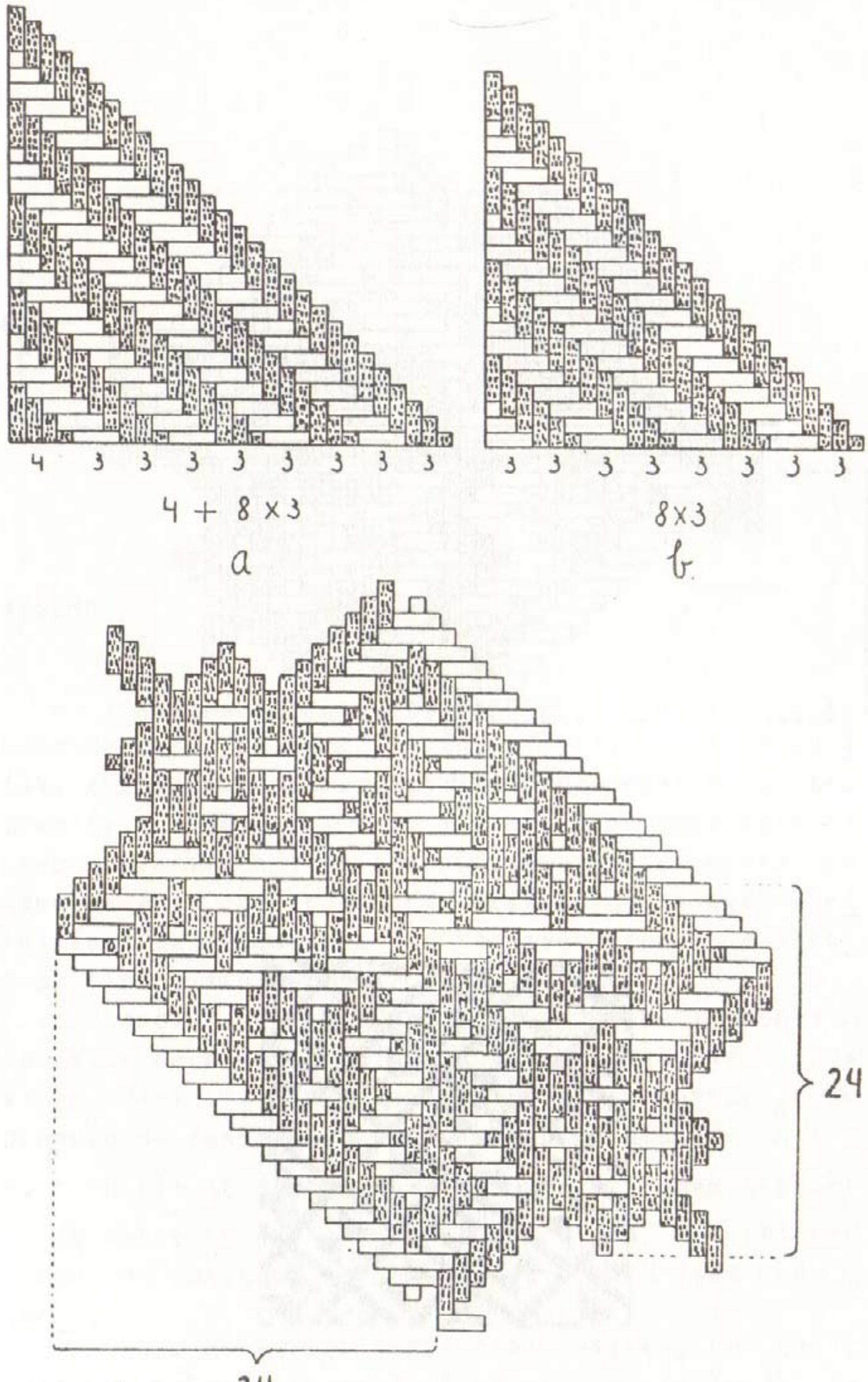


Fig. 10

ISBN 978-85-89082-23-5

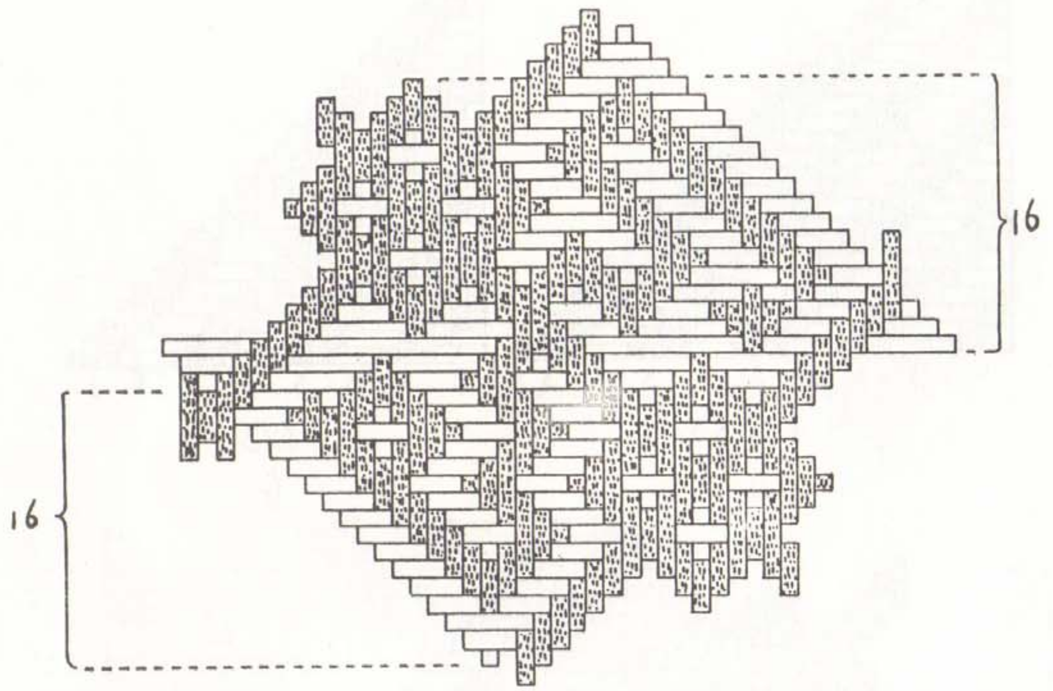


Fig. 11

Foto 4