ISBN 978-85-89082-23-5

Sobre a Origem Histórica do Conceito de Número[1]

Paulus Gerdes

Resumo

A origem do conceito de número é histórica. Na base de dados de arqueologia, 1inguística e etnografia, apresentam-se respostas às seguintes perguntas: Como se foi desenvolvendo a noção de número natural? Como nasceram, historicamente, as relações entre os números e as operações com eles? Porque é que os resultados da aritmética são tão convincentes e encontram tantas explicações?

Conclui-se que a origem e o desenvolvimento do conceito de número retiram qualquer base para uma visão idealista de que a matemática é a priori, um produto do pensamento puro, ou duma intuição inata.

1. O título deste ensaio "Sobre a origem histórica do conceito de número" já marca uma determinada tomada de posição, no sentido de esta origem ser <u>histórica</u>.

Leopold Kroceck (1823-1891) afirmou em 1886, falando na Conferência Berlina de Cientistas de Natureza: "Os números inteiros são criados pelo Senhor Deus, tudo o resto e trabalho dos homens"[2]).

Para o filosofo Immanuel Kant (1724-1804) as afirmações matemáticas eram 'a priori', no sentido de que elas não dependem da experiência, mas são apenas produtos do pensamento puro. Segundo a Escola dos Pitagóricos (6°, 5° séc. a.n.e.) as re1ações quantitativas constituem a essência das coisas. Para os Tsongas, do sul de Moçambique, havia um tabu quanto à contagem dos homens: "Que? Tu estás a contar-nos? Quem desejas tu ver desaparecer"[3]),

Assim estamos a ver que na história do pensamento humano, na história da filosofia, o conceito de "número" deu motivo a especulações diversas e freqüentes, onde a sua origem era suposta fora da história, numa imaginada força sobrenatural ou apenas nas potências inatas do homem.

Na seqüência da tomada de posição acima mencionada, para a qual apresentarei

[1] Digitalizado por Edson Pereira Barbosa e Sílvio César Otero Garcia.
[2] Citado por Wssing, H. ; Arnold, W. **Biographien be deutender Mathematiker**, Berlim, 1975, p. 437.
[3] Vide Junod, H., **Usos e costumes dos Bantos**, 1974, vol. 2, p. 152.

ISBN 978-85-89082-23-5

argumentos neste meu ensaio, queria afirmar que a origem destas especulações está na própria história, tal como na conexão da Escola dos Pitagóricos com a aristocracia escravagista nas condições do então sul da Europa.

2. Agora pode-se pensar em “um”, “dois”, “três” ... isto é tão fácil, o homem sempre soube contar! Mas no fim do século passado descobriu-se a que e que se chama “descobrir”? - no deserto de Calahari, algumas etnias que, na sua língua, apenas podiam exprimir “um”, “dois” e “vários”. Faltavam-1hes palavras para “quatro”, “cinco”, etc... Como é possível? Uma explicação tribalista podia ser: “esta tribo é tão estúpida mas...”. Porém, uma tal explicação não tem consistência, uma vez confrontada com as línguas Bantu. Na maioria das línguas Bantu, os três primeiros numerais (um numeral e o nome dum número) são adjetivos, conjugados conforme a classe do substantivo correspondente, enquanto que os numerais seguintes são substantivos. Por exemplo, temos na língua Changana:

munhu munwe (‘pessoa uma’, uma pessoa)	sinhá hunwe (uma árvore)
vanhu vambir (duas pessoas)	misinha mimbir (duas árvores)
vanhu vanharh (três pessoas)	misinha minharh (três árvores)
muns wa vanhu (‘um quarteto de pessoas, quatro pessoas)	mune wa misinha (quatro árvores)

Esta diferença lingüística sugere uma origem diferente. Por outras palavras, num passado remoto os antepassados dos actuais povos Bantu só tinham igualmente os números: “um”, “dois’, ... Ainda se pode refugiar numa explicação racista, suspirando: “... mas o homem civilizado sempre soube contar”. Que orgulho tinha o colonizador da sua pretendida civilização! No entanto, também esta explicação desaparece como neve perante o sol da lingüística. No português, as palavras “um” e “dois” conhecem também uma forma feminina, a saber “uma’ e “duas”, enquanto que os outros numerais não a conhecem, e, ainda por cima, a palavra “três” está relacionada com a palavra francesa “três” (muito) e com a palavra latina “trama” (= para além), isto quer dizer que, de igual modo, os antepassados dos povos europeus somente sabiam contar um pouco.

ISBN 978-85-89082-23-5

Com isto podemos considerar a historicidade do conceito de número como demonstrada.

3. Vejamos agora como foi se desenvolvendo a noção de número. Neste ensaio limitamo-nos às primeiras fases do desenvolvimento do conceito natural (1, 2, 3, 4, ...)

Para poder responder a nossa pergunta "como?" apoiar-nos-emos em resultados da arqueologia, lingüística e etnografia, ciências estas que ainda são relativamente muito jovens. Por exemplo, na África, no sul do Sahara, tiveram lugar muito poucas investigações arqueológicas. Por isso apenas podemos indicar algumas linhas gerais de desenvolvimento do conceito de número.

3.1. As primeiras sociedades humanas foram as de caçadores e recolectores, e abrangem um período de 500.000 a 1 milhão de anos. Inicialmente os homens ainda não dispunham duma noção explícita de número, mas já aprendiam a tirar determinadas conclusões importantes para a reprodução da sua vida, conclusões as quais, actualmente, se chamam quantitativas.

Assim, por exemplo, foram aprendendo a estimar quantidades de comida: para hoje já capturamos suficientes animais ou não; para hoje já colhemos frutos suficientes ou não. Este processo de aprender a estimar foi possível na base de, por um lado, a constituição biológica do homem, e, por outro, a experiência acumulada ao comparar os resultados do trabalho dum dia com os dos dias anteriores.

3.2. Dois caçadores vão em direções diferentes, à descoberta. Ambos encontram, por exemplo, alguns 'mamutes', e voltam à tribo para buscar os outros. Mas como decidir em que direção é que se deve ir à caça? Comparando, um caçador exprime: "Vi tantos mamutes como um pássaro tem asas", enquanto que o outro diz: "Vi tantos mamutes como a minha mão 'conta' dedos".

Este exemplo hipotético ilustra o seguinte: em resposta a determinadas necessidades surgidas – tais como comunicar e tomar decisões em particular no que se refere à reprodução da vida – começou-se a comparar colecções de objectos, de tal modo que a quantidades de uma coleção se torna clara da comparação com a quantidade de uma outra colecção: "tantos mamutes como uma ave tem asas", "tantos cabritos como uma mão tem dedos" ...

ISBN 978-85-89082-23-5

Ao comparar, deste modo, duas quantidades chama-se, na matemática actual, pôr numa correspondência biunívoca os dois conjuntos: a cada elementos do primeiro conjunto faz-se corresponder, duma maneira biunívoca, um elemento do outro (por exemplo: a cada asa corresponde um mamute).

Desta fase de desenvolvimento encontramos ainda vestígios em muitas línguas actuais. Assim, para "cinco" os numerais hlanu, nthlanu e tano em Zulu, Changana e Swahill respectivamente (duma origem comum) significam originalmente "mão", como também acontece, por exemplo, o grego ou no russo. Na língua Banda da África Central, o numeral para vinte, significa à letra 'homem completo' referindo-se ao total de vinte dedos de um homem. Um exemplo interessante verifica-se na língua Mandigo falada no Mali. A palavra para "nove", a saber kononto, significa "aquele lá na barriga", dizendo respeito aos nove meses da duração dum gravidez[4].

Estes vestígios nas línguas actuais, já indicam a transição de comparações individualmente inventadas, que possivelmente não são compreendidas por toda a gente, para comparações mais correntes, geralmente aceites (dentro de uma determinada cultura). Foram desenvolvendo numerais como abreviatura de comparações que eram claras para cada um. Estes primeiros numerais reflectem uma propriedade dum conjunto de objetos e são, por isso, adjectivos, que podem ser conjugados, como mostram os seguintes exemplos: em português "dois carros", mas "duas crianças", conforme o gênero do substantivo envolvido. Na língua Changana "sinhá hunwe (uma árvore), xiharhi xinwe (um animal), munhu munwe (uma pessoa), correspondente à classe do substantivo. Aqui vemos uma raiz comum "nwe" nos numerais para "um". Uma raiz comum pode pertencer a uma fase posterior, como a língua dos índios norte-americanos Tsimshia nos mostra provavelmente: t'epqat, goupel, gaopskan, g'alpeeltk e gulbel são numerais diferentes de objectos, tais como achatados, redondos, compridos, pessoas e medidas respectivamente[5].

Vê-se desenvolvimento na direcção duma substantivação crescente dos numerais no sentido de que, cada vez mais, para mais classes de objectos são utilizados os mesmos numerais, como por exemplo, no português, o numeral "três" pode ser usado para quaisquer objectos e não só para redondos ou achatados. Em muitas sociedades constata-se um outro desenvolvimento para comparar com determinadas colecções

[4] Vide Zaslavsky, C., **Black african traditional mathematics,** in: The Mathematics Teacher, 1970, 4, p. 366.
[5] Vide Conant, L., **The number concept**, New York, 1986, p. 87.

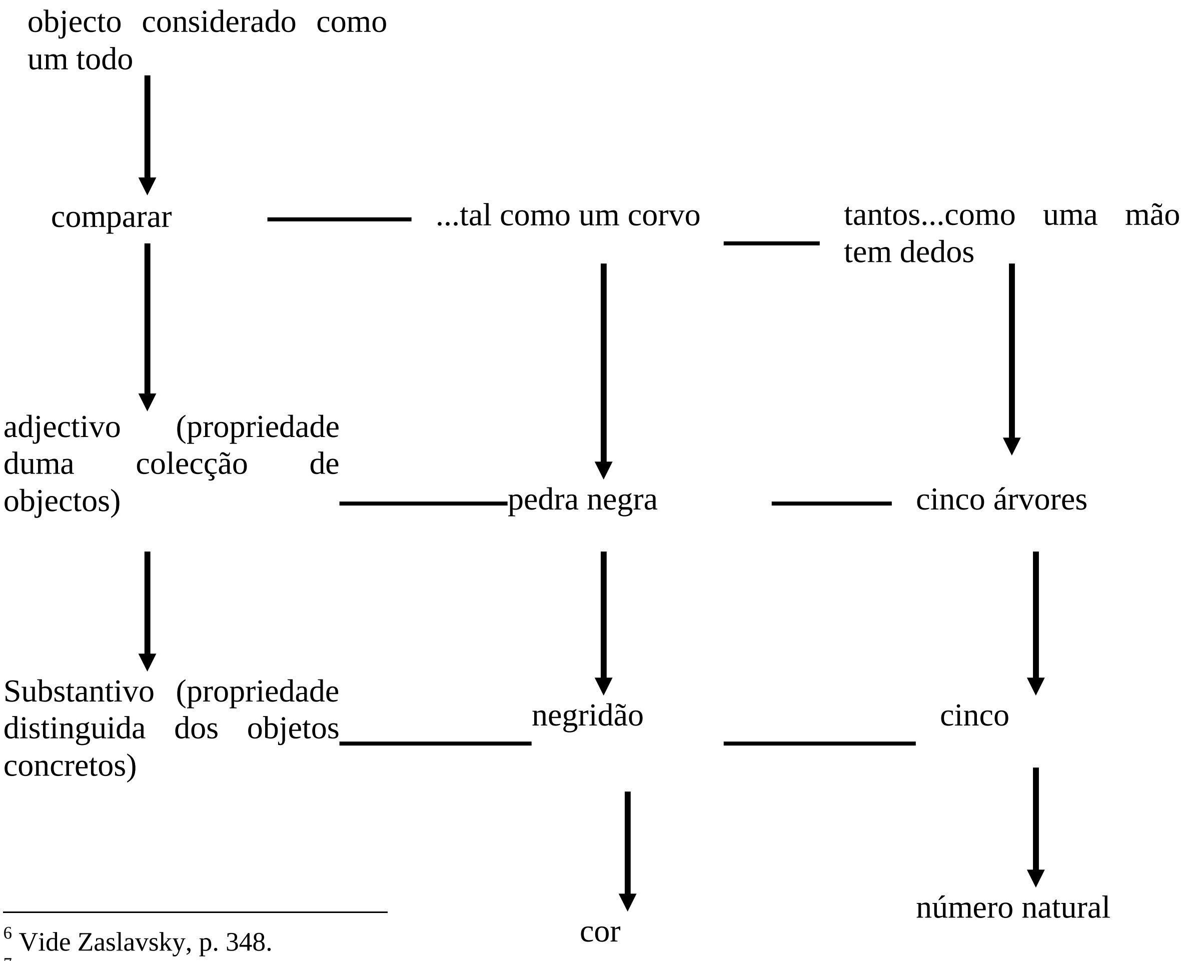
ISBN 978-85-89082-23-5

padrão, tais como dedos, cortes num pau, pedrinhas (no latim e palavra pedrinhas é “calculi”, da qual deriva a palavra portuguesa ‘cálculo’), riscos em pedras, etc. Perto de Ishango, no actual Zaire, foram encontrados vestígios de tais riscos localizados entre 9000 e 6500 a.n.e.[6]).

É possível que noutras sociedades estas formas de comparar precedessem e estimulassem essa substantivação dos numerais.

3.4 Em resumo, podemos constatar que a noção de número (os números naturais mais pequenos) foi nascendo num processo de abstrair, cada vez mais de determinadas propriedades das coleções de objectos que o homem nas sociedades de caçadores e recolectores encontrava, como respostas criadora aos problemas que enfrentava no seu trabalho. Esta noção reflecte a experiência pratica de "inumeráveis" gerações.

Um processo semelhante de abstração verifica-se na formação de outros conceitos, por exemplo, na noção de 'cor’. Em esquema[7]:



[6] Vide Zaslavsky, p. 348.

[7] Compare Aleksandrov, A. **A general view mathematics,** in: Mathematics, its contents, methods and meaning, New York, 1969, vol. 1. p. 10.

A propriedade que é comum a todos os conjuntos cujos elementos podem ser posto numa correspondência biunívoca com as asas de um pássaro, é o número indicado pelo nome dois (dizendo-se, muitas vezes, abreviadamente o número dois). Assim é um número (natural) a propriedade que é comum a todos os conjuntos cujos elementos se podem fazer corresponder biunivocamente.

Em que consistem as propriedades do número, representados pelo numeral quatro? Quatro é a soma de um e três, quatro é duas vezes dois... As propriedades de um número consistem nas suas relações com os outros números, tal como, em geral, una abstracção tirada da sua base concreta não tem significado em si própria; ela existe apenas nas suas relações com os outros conceitos. Isto coloca algumas questões. Como foram nascendo historicamente as relações entre os números? E quais foram as consequências para o desenvolvimento do conceito de número?

As operações sobre números (adicionar, multiplicar, subtrair e dividir) foram se desenvolvendo como reflexo das operações efectuadas com objectos concretos. Por exemplo, a adição corresponde à operação de juntar duas ou mais colecções (os frutos colhidos por um grupo, com os frutos colhidos por outro grupo, etc). A mu1tip1icacão desenvolve-se, em grande medida, a partir do habito de contar “dois por dois”, “três por três”, etc., assim acelerando a contagem do número de animais num rebanho, por exemplo.

4.1. Estas primeiras operações contribuíram para a extensão do conceito de número: mais números naturais como nos mostram os seguintes exemplos:

...Uma tribo, vivendo perto do rio Murray, na Austrália[8], usa como numerais: <u>enea</u> (= 1), <u>petcheval</u> (= 2), <u>petchevalenea</u> (=2+1,ou seja 3), <u>petcheval</u>-<u>petcheval</u> (=2+2, ou seja 4), uma estrutura binária semelhante a dos pigmeus Bambuti, e de tribos em Papus Guinea[9]): <u>urapan</u> (=1), <u>Okosa</u> (=2), <u>okosa-urapan</u> (=2+1, ou seja 3), <u>okosa-okosa</u> (=2+2, ou então 4), <u>okosa-okosa-urapan</u> (=2 + 2+1, quer dizer 5), <u>okosa-okosa-okosa</u> (=2+2+2= 6). Estas numerais partem sempre da base dois. No entanto, encontramos também outras bases. Por exemplo, com os Kamilaroina[10] na Austrália, a base três guliba (3), <u>guliba-guliba</u> (3 + 3 quer dizer 6). Na língua Swahili vestígios da base

[8] Vide Conant, p. 106.
[9] Vide Dantizig, T., **Number the language of science**. New York, 1976, p. 28.
[10] Vide Contant, p. 107.

quatro: nane (=4+4 ou seja 8). Frequentemente, vê-se mais do que uma base. Com os Ekoi, nos Camarões esaresa (=3+3=6), enirese (=4+3=7), enireni (=4+4=8), eloneni (=5+4=9), ou na língua changana: nthalanu ni simbiri (=5+2=7)e tshume ni xinwe (= 10+1 = 11).

Para a multiplicação podemos também encontrar muitos exemplos. Em changana ‘mune wa matshume’ (4 x 10, ou seja 40). Na língua Banda, já mencionado, o nome para quinze significa à letra “três mãos” e o quarenta “dois homens completos”. Estes novos numerais e atendidos já pressupõem uma descoberta importante: não só hoje dois leões mais três leões dão cinco leões, mas isto acontecerá amanhã também; não só dois leões mais três leões dão sempre cinco leões, mas também dois antílopes mais três antílopes dão sempre cinco antílopes; não só dois animais mais três animais dão cinco animais, mas também duas plantas mais três plantas dão cinco plantas, etc.

Através do trabalho de “inumeráveis” gerações com coleccões concretas foram-se descobrindo regularidades cada vez mais gerais, que desaguavam em regras, tais como na nossa linguagem simbólica 2+3=5, ou o que ainda precisa duma base de experiência muito maior e rica, o resultado a adição de dois números e independente da ordem em que se procede, ou então na nossa notação actual $2+3=3+2$, e mesmo $a+b=b+a$ onde a e b representam números quaisquer.

4.2 Passaram entre 10 e 15 mil anos desde esta grande revolução que se verificaria ter influencia profunda no desenvolvimento do conceito de número, no desenvolvimento da matemática. Pela primeira vez na historia humana, povos romperam com a dependência extrema do meio ambiente que implicava a sua vida de caçadores e recolectores; gradualmente aprendia-se a intervir na produção de comida: foram descobrindo a agricultura e a pastorícia.

Estas novas possibi1idades de produção punham a humanidade perante numerosos problemas novos: que quantidade de sementes podemos comer e que quantidade temos de semear para poder comer suficientemente no ano seguinte? ‘escaparam-se animais do rebanho’, ‘quando temos de semear?’ etc. Estes problemas e possibi1idades novas (viver em grupos maiores, estabelecer-se em aldeias, etc.) necessitavam duma extensão do conceito de número: tornava-se necessária a contagem de quantidades maiores.

Uma vez mais, vemos aqui confirmada a teoria de Friedrich Engels segundo a qual o homem desenvolve-se através do seu trabalho[11]).

As novas necessidades sociais e econômicas exigiam uma extensão do conceito de número e das operações sobre os números.

4.3. Saber contar o número de animais num rebanho, o número de dias num ano, o número de produtos numa troca, etc., saber contar colecções cada vez maiores e saber comunicar a outras pessoas os resultados das contagens provocaram inovações.

Como é possível compreender rapidamente um Ekoi se ele falasse de "enirenirenirenireni" animais onde nos falamos de vinte animais? Como compreender rapidamente o changana "nthalanu wa matshume ni ma tshume manharh ya bsiluva ni xinwe (5x10+10x3+1), onde se diz em português, oitenta e uma flores? Como obter rapidamente uma impressão do número,quando num pau encontramos os seguintes riscos;

ou mesmo, quando mais ordenados ||||||||||||||||||||||||||?

Ao anotar  é quase imediato que se trata de vinte-e-seis objectos.

Tornavam-se socialmente necessárias inovações tanto no aperfeiçoamento e na simplificação dos nomes dos números, como na introdução ou no me1horamento dos símbolos para representar números.

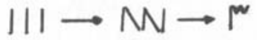
Em particular, foram alcançados avanços consideráveis nas civi1izações agrícolas dos grandes rios tais como o Nilo, Eufrates, Tigre, Ganges, Huang Ho e mais tarde Yang-tse, e com as Mayas. Aí, era necessário calcular na computação do calendário, na administração da colheita, na organização de obras públicas, na colecta de impostos, etc. Foi naquelas sociedades que se inventou a escrita a partir da contabilidade, a partir do cálculo.

Às vezes, os primeiros novos símbo1os eram o resultado de traçar rapidamente riscos numa vara ou incisões num pedaço de barro (sem levantar a caneta) como os nossos símbolos actuais sugerem:

[11] Vide Engels, F., **Dialektik der Natur**, Berlim, 1975, p. 444-456.

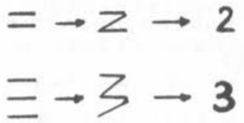
ISBN 978-85-89082-23-5

(dois no sistema árabe)



(três no sistema árabe)

ou horizontalmente



Aqui ecoa a base material nos símbolos para dois e três, libertando o caminho para a criação de outros símbolos. Baseados em muitas experiências, foram gradualmente introduzidos melhoramentos nas notações simbólicas, tais como a introdução do <u>sistema de posição</u> e do zero. Por sua vez, a introdução de símbolos para os números tinha um significado importante para o desenvolvimento da aritmética e mesmo para o desenvolvimento da matemática. Eles dão uma encorporação simples do conceito de número, mesmo em tal medida que muitas pessoas identificam, embora isto seja incorrecto, um número com o seu nome simbólico, como se o país Moçambique fosse idêntico ao conjunto (ordenado) das letras do seu nome! Os símbolos facilitam fazer as contas; podemos calcular no papel (barro, solo, etc.,) em vez de precisar juntar dois rebanhos para saber quantas vacas há no total, etc. Eles estimularam a extensão do conceito de número até números tão grandes que nunca pudessem ser o resultado duma contagem directa: quantas vidas humanas seriam precisas para poder contar até 1010?

5. A terminar, tiremos algumas conclusões a partir destas primeiras fases de desenvolvimento do conceito do número[12]. A origem do conceito de número é histórica. E1e desenvolve-se conforme as mudanças nas necessidades sociais e econômicas. O conceito de número e as operações sobre os números desenvolvem-se através de um processo de abstracção, subindo a níveis cada vez mais altos, reflectindo a acumu1ação duma quantidade imensa de experiência prática com colecções de objectos concretos.

Por isso, os resultados da aritmética são tão <u>convincentes</u>, como 1 + 1=2 e são tão <u>aplicáveis</u>: eles reflectem a experiência de milhares de gerações humanas.

...tão aplicáveis. Porém nisto reside igualmente a sua limitação, porque a verdade não é abstracta, é sempre concreta (Lenine). Pode acontecer que, em circunstâncias muito particulares, um mais um dê um; 1+1=1(!?), quando um leão com

[12] Compare Aleksandrov, p. 15-17.

ISBN 978-85-89082-23-5

fome está numa gaiola com um cordeiro, restará apenas um animal, ou quando o Ministro Sérgio Vieira disse no seu discurso "O Homem Novo é um processo" do trabalho colectivo: quando 1 mais 1 trabalham, é mais que 2 (l+l>2); ou quando se mistura 1 litro de água com 1 litro de álcool, fica apenas 1,9 litros de líquido: 1 + 1= 1,9.

Assim os números são, por um lado importantíssimos na nossa vida, mas por outro lado, não se deve considerá-1os absolutos ou deificá-los. É neste contexto que o matemático soviético Rashevski[13] formulou a hipótese de que a resolução de um número de problemas nas ciências modernas na natureza pudesse pressupor romper com o "dogma dos números naturais" duma maneira análoga ao quebrar o dogma da Geometria Euclidiana no século passado, que constituiu uma das condições necessárias para a elaboração das teorias físicas revolucionárias da relatividade e da mecânica quântica no século 20.

Conceitos (significativos) reflectem a realidade objectiva. A origem e o desenvolvimento do conceito de número (tal como o de conceitos geométricos) retiram qualquer base para uma visão idealista de que a matemática é 'a priori' um produto do pensamento puro, ou duma intuição inata.

[13] Vide Rashevskii, p., **On the dogma of the natural numbers**, in: Russian Mathematical Surveys, vol. 28, 1973, 4, p. 143-148. (Reprodução de "**Ciência e Tecnologia**", vol. 1, 1980, páginas 53-57).