ISBN 978-85-89082-23-5

Desenhos Tradicionais na Areia em Angola e seus Possíveis Usos na Aula de Matemática[1]

Paulus Gerdes

Resumo

Tanto países industrializados como também países do Terceiro Mundo enfrentam a necessidade de “multi-culturizar” seus currículos matemáticos. Após uma breve descrição da tradição do desenho do povo Tchokwe (Angola), dão-se algumas sugestões de possíveis usos dos seus pictogramas na aula de matemática. Os exemplos dados neste artigo vão do estudo de relações aritméticas, progressões, simetria, semelhanças e grafos de Euler à determinação do máximo divisor comum de dois números naturais.

Introdução

Em países industria1izados como a Grã-Bretanha, França e Estados Unidos, a necessidade de se considerar toda a experiência escolar, em vista do fracasso educacional de muitas crianças de comunidades étnicas minoritárias, é cada vez mais reconhecida. Aumenta a pressão para que o currículo escolar reflita a natureza muti-cultural dessas sociedades. Assim, Bishop (1987, p.2) conclui ser necessário “multi-culturizar” o currículo matemático (ver igualmente Ginsburg and Russel, 1981: Mellin-Olsen, 1986).

Como as fronteiras coloniais herdadas raras vezes consideram as realidades culturais e étnicas existentes, muitos países do Terceiro Mundo vêem-se hoje em dia no difícil processo da construção de uma nação, confrontados com a mesma necessidade de multi-culturizar seu currículo matemático (ver p.ex. D’Ambrósio, 1985a, b; Eshiwani, 1979: Gerdes 1985b, 1986b; Nebres, 1983). Durante o período colonial, a matemática foi geralmente apresentada como criação e capacidade exclusivas do branco (cf. Gerdes 1985a; Njock, 1985). Com a transplantação apressada de currículos das nações capitalistas altamente industrializadas para os países do Terceiro Mundo (p.ex. o chamado “African Mathematics Program”), esta negação das matemáticas “indígenas”, africanas, asiática, americano-índia e aborígine-australiana continuou, ao menos

[1] Digitalizado por Edson Pereira Barbosa e Sílvio César Otero Garcia.

ISBN 978-85-89082-23-5

implicitamente. E é nisto que reside uma das causas fundamentais dos níveis reconhecidamente baixos de aproveitamento que, por sua vez, podem reforçar preconceitos (neo) coloniais e raciais (cf. D'Ambrósio, 1985b; Gerdes, 1985b).

Para romper este círculo vicioso, D'Ambrósio realça que é urgente reconhecer todo tipo de matemáticas indígenas (ou "etnomatemáticas") e de integrar/incorporá-las no currículo. Só assim, na opinião do autor, uma condição necessária para que a matemática mundial (definida como a reunião de todas as "etnomatemáticas"; terminologia de Hogbe – Nled, 1985) ou "matemática internalizada" (terminologia de Bishop, 1987) se torne efetiva e realmente acessível aos povos do Terceiro Mundo, será satisfeita.

O seguinte artigo sobre tradicionais desenhos na areia em Angola pretende ser um exemplo concreto de como é possível usar idéias matemáticas "indígenas" no contexto do ensino. Estamos procurando pontes efetivas (Gay e Cole, 1967, p.94) entre "etnomatemática" e "matemática mundial".

1. A Tradição de Desenho dos Tchokwe

O povo Tchokwe (ou Quioco), com uma população de aproximadamente um milhão (Fontinha, 1983, p.28) habita predominantemente o nordeste de Angola, a região de Lunda. Por tradição são caçadores, mas desde meados do século XVII têm-se dedicado também à agricultura (Redinha, 1975, p.11). Os Tchokwe são famosos pela beleza de sua arte decorativa (Bastin, 1961), que vai da ornamentação de esteiras e cestas entrançadas, trabalhos em ferro, cerâmica, cabaças esculpidas (Fontinha e Vieira, 1963) e tatuagens (Lima, 1956) a pinturas em paredes de casas (Redinha, 1953) e desenhos na areia (Fontinha, 1983).

Quando os Tchokwe se reúnem no terreiro das suas aldeias ou nos acampamentos de caça, costumam, sentados à volta de uma fogueira ou na sombra de árvores frondosas, passar o seu tempo em conversações, que são ilustradas por desenhos no chão. A maior parte destes desenhos pertencem a uma longa tradição. Referem-se a provérbios, fábulas, jogos, adivinhas, animais etc., e desempenham um papel importante na transmissão de conhecimento e sabedoria de uma geração à outra (Fontinha, p.37). Os desenhos devem ser feitos lisa e continuamente porque qualquer hesitação ou interrupção por parte do desenhador é interpretada pelo público como imperfeição ou falta de conhecimento e é acolhida com um riso irônico.

Para facilitar a memorização dos seus pictogramas ou ideogramas padronizados, os "akwa kuta sona" – especialistas em desenho – inventaram um recurso mnemônico interessante. Após limpar e alisar o chão, começam por marcar com as pontas dos dedos uma rede ortogonal de pontos eqüidistantes. O número de linhas e colunas depende do motivo a ser representado. Por exemplo, para representar um galo (Fontinha, 1983, p.153), precisa-se de quatro linhas de três pontos (Figura 1). Aplicando seu método – um exemplo de um uso antigo de um sistema de coordenadas – (cf. Santos, 1960, p.267) – os "akwa kuta sona" geralmente reduzem a memorização de todo um desenho àquela de, na maioria das vezes, dois números e um algoritmo geométrico.

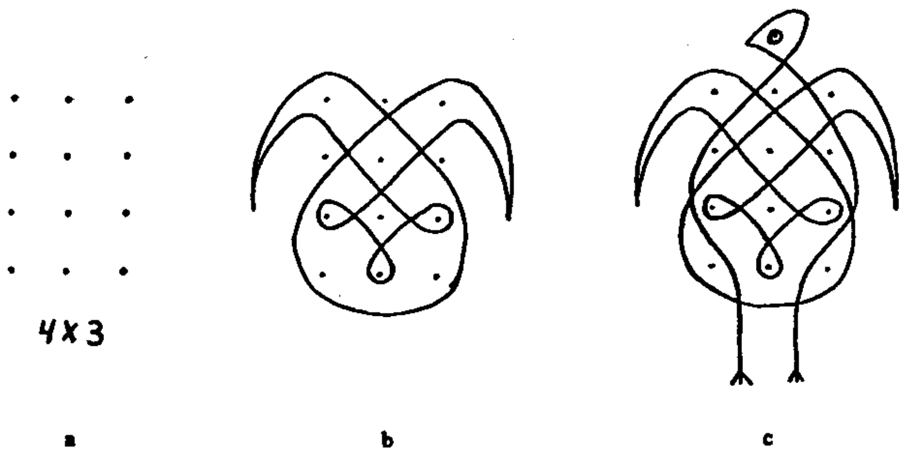

Figura 1: Desenho do Galo

Num belo livro, Fontinha (1983) publicou 287 desenhos diferentes dos Tchokwe, recolhidos nas décadas de 40 e 50. Kubik (1987) publicará uma coleção de pictogramas semelhantes do noroeste de Zâmbia. Uma hipótese sobre a origem histórica deste tipo de desenhos foi formulada em Gerdes (1985b, p.33-36).

Sugerimos agora alguns dos possíveis usos destes desenhos tradicionais dos Tchokwe na aula de matemática que serão discutidos resumidamente.

2. Relações Aritméticas

Cada desenho redistribuiu, por assim dizer, os pontos da rede de referência. Esta situação pode ser "explorada" na aula de matemática, como mostrarão os seguintes exemplos, para descobrir diversas relações aritméticas.

ISBN 978-85-89082-23-5

2.1. Primeiro Exemplo

Com base na representação de uma floresta como muitos pássaros “qundu” (Figura 2; Fontinha, 1983, 271), encontra-se: $5^2 = 4 . 6 + 1$,

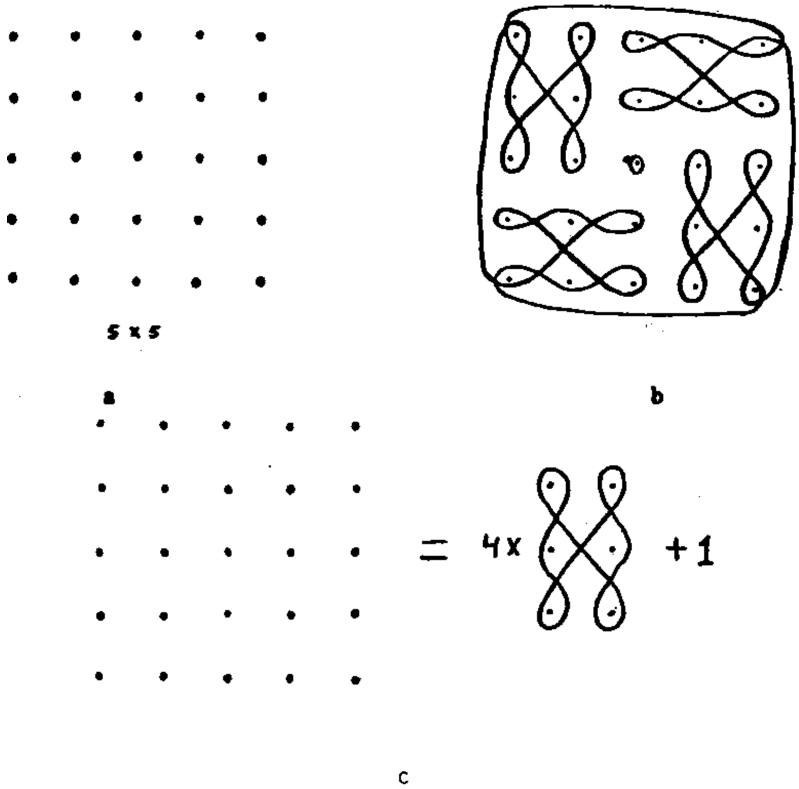

Figura 2

ou $5^2 = 4 . 6 + 1$.

2.2. Progressões Aritméticas

Uma análise da representação simbólica do provérbio “a trepadeira é a lenha dos velhos” (Figura 3; Fontinha, 1983, 287) leva a: $5 . 6 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 2 . (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$.

ISBN 978-85-89082-23-5

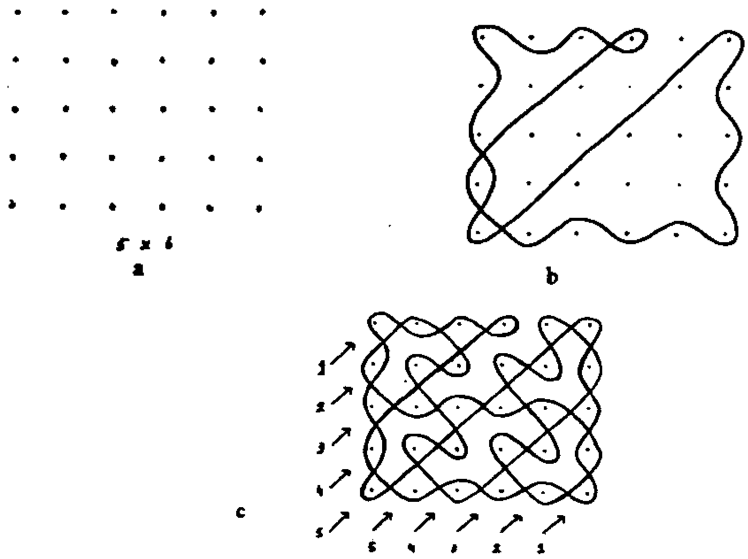

Figura 3

Este e outros exemplos semelhantes podem ser usados como ponto de partida para o estudo de somas de progressões aritméticas $2.(1 + 2 + 3 + ... + n) = n(n + 1)$, etc., ou, alternativamente: $2.(1 + 2 + 3 + ... + n) = (n+1)^2 - (n+1)$, como pode ser extrapolado de: $2.(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 6^2 - 6$, sugerido por uma representação de "kalunga" (Deus)(Figura 4c; Fontinha, 1983, 255, 177; cf. Zaslavsky, 1973, p.109).

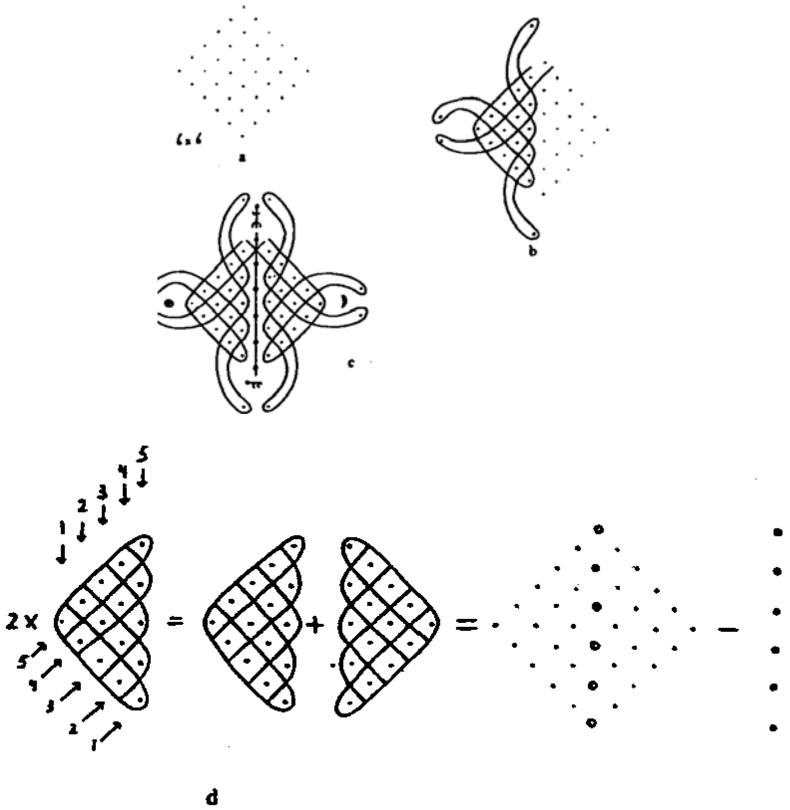

Figura 4: Representação de "Kalunga" (Deus)

ISBN 978-85-89082-23-5

Para executar muitos dos desenhos na areia dos Tchokwe, é preciso sobrepor duas redes ortogonais de tal maneira que os pontos da segunda são os centros dos quadrados unitários da primeira rede, assim formando um retículo novo. A representação de uma tartaruga elucida esta sobreposição (Figura 5; Fontinha, 1983, 221). A redistribuição dos pontos de referência por esta figura de uma tartaruga sugere: $3^2 + 2^2 = 1 + 3 + 5 + 3 + 1$

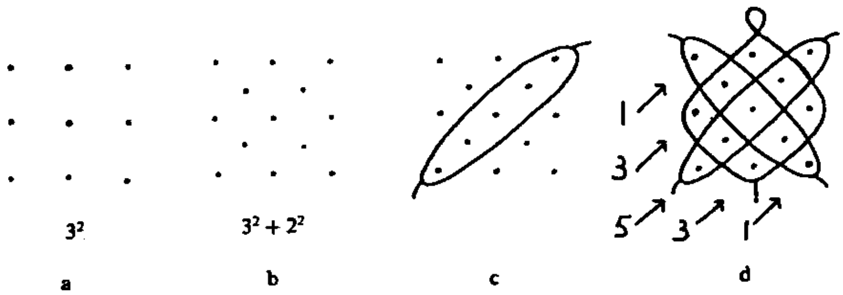

Figura 5

Da mesma forma, a representação de um estábulo de bois e de uma cabeça de elefante (Figura 6b. d; Fontinha, 1983, 167) leva a: $4^2 + 3^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 5 + 3 + 1$, e $5^2 + 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1$.

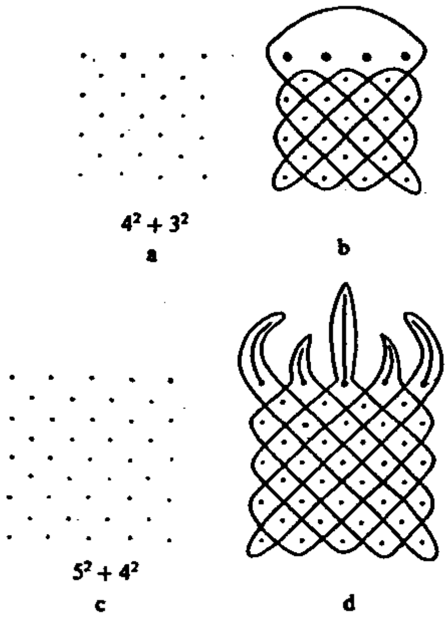

Figura 6

Que parte de (1 + 3 + 5 + 7 + 5 + 3 + 1) corresponde a 4^2? Que parte a 3^2? Experimentando, pode-se observar, por exemplo, da seguinte forma (Figura 7a): $4^2 = 3^2 + 3 + 4$, isto $4^2 = 3^2 + 7$. Por isso $4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$ e $3^2 = 5 + 3 + 1$. Pode-se perguntar

ISBN 978-85-89082-23-5

aos alunos se $5^2 + 4^2$ ou (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1) pode ser repartido da mesma maneira. E: “haverá outras maneiras para se ver que $4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$, a partir do retículo quadrado de 4^2 pontos (Figura 7b)”?

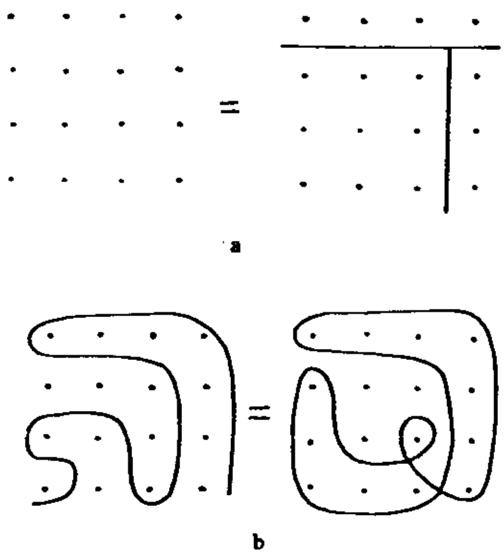

Figura 7

Extrapolação dá $n^2 = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)$, ou a soma dos primeiros n números ímpares é igual a n^2.

2.3. Uma Terna Pitagórica

Uma grade de referências de 5 pontos é usada para o motivo tradicional “cingelyengelye” (Figura 8a, b), um desenho muito antigo que já aparece em pinturas rupestres na região do Alto Zambeze (Redinha, 1948) e para alguns outros motivos Tchokwe (Figura 8c, d, e, f; Bastin, 1961, 152; Fontinha, 1983, 213, 207, 239, 227; Redinha, 1948, 74).

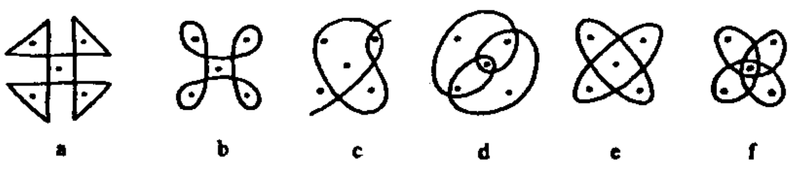

Figura 8

Ao tentarem cobrir por estes padrões grades quadradas duplas ($(n+1)^2 + n^2$ pontos) os alunos talvez descubram a terna “pitagórica” (3, 4, 5): $3^2 + 4^2 = 5^2$ (Figura 9).

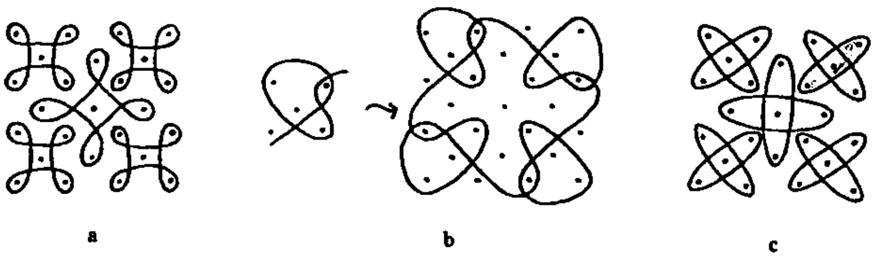

Figura 9

3. Idéias Geométricas

A tradição dos “akwa kuta sona” revela uma consciência e um interesse muito profundos nas propriedades geométricas dos seus desenhos. Estas propriedades, como simetrias e semelhanças, estudam-se na aula e os desenhos na areia podem servir de ponto de partida, como mostrarão os seguintes exemplos.

3.1. Simetria Axial

Não somente os desenhos na areia (Figura 10; Fontinha, 1983, 229, 211, 197, 171) mostram uma simetria axial, mas também as próprias redes de referência. Dois pontos correspondentes tem a mesma distância ao eixo de simetria.

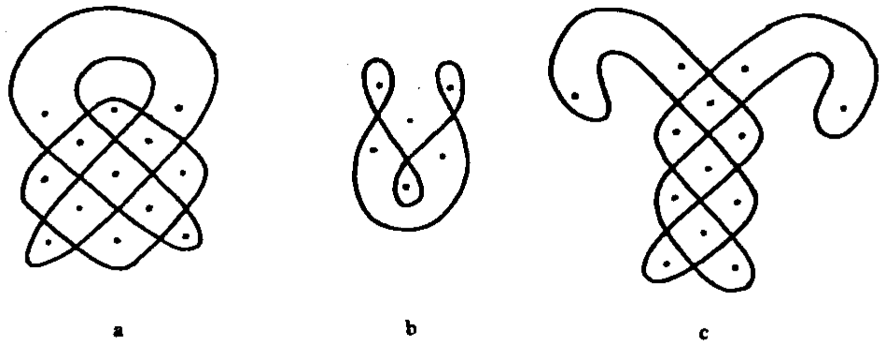

Figura 10

3.2. Simetria Axial Dupla e Simetria Central

Simetria axial dupla e simetria central são mostradas não só pelos desenhos na areia (Figura 11; Fontinha, 1983, 181, 257, 133, 185, 189, 195, 245), mas também pelas próprias redes de referência ortogonais. Isto pode ajudar os alunos a descobrirem que pontos correspondentes tem a mesma distância ao centro de simetria.

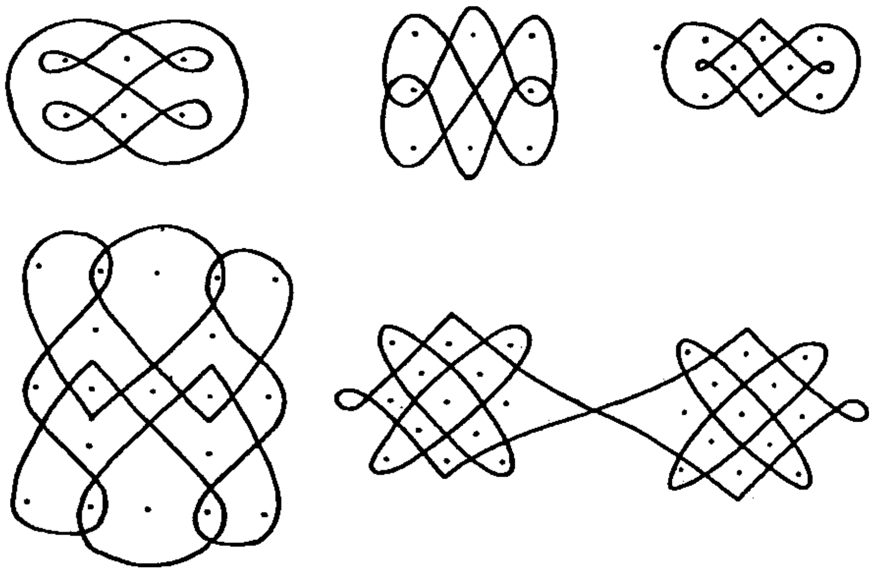

Figura 11

3.3. Simetria Rotacional

Da mesma forma, os alunos podem ser levados a descobrir (Figura 12; Fontinha, 1983, 243, 263, 175, 183), que pontos correspondentes têm a mesma distância ao centro de rotação.

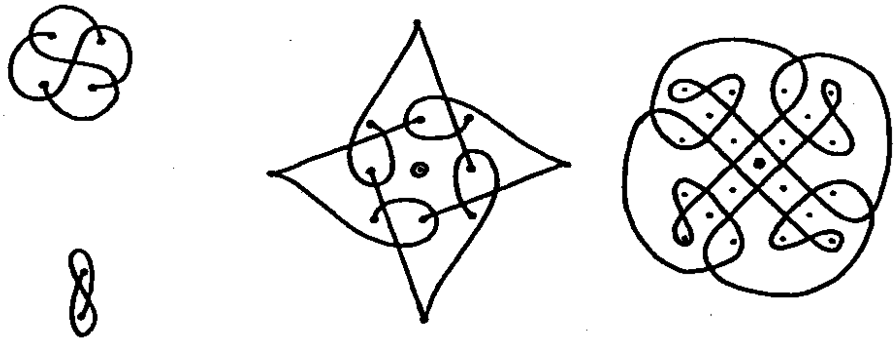

Figura 12

3.4. Semelhança

A Figura 13f representa uma leoa com seus dois filhotes (cf. Fontinha, 1983, 181, 299; adaptamos o desenho porque seu desenhador Saitumbo fez alguns erros

ISBN 978-85-89082-23-5

óbvios na sua execução). As dimensões 10 : 3 e 7: 2 dos esqueletos retangulares da leoa e seus filhotes foram escolhida de tal maneira que a leoa e os filhotes sejam figuras mais ou menos semelhantes. Por isso 10 : 3 $\approx$7 : 2.

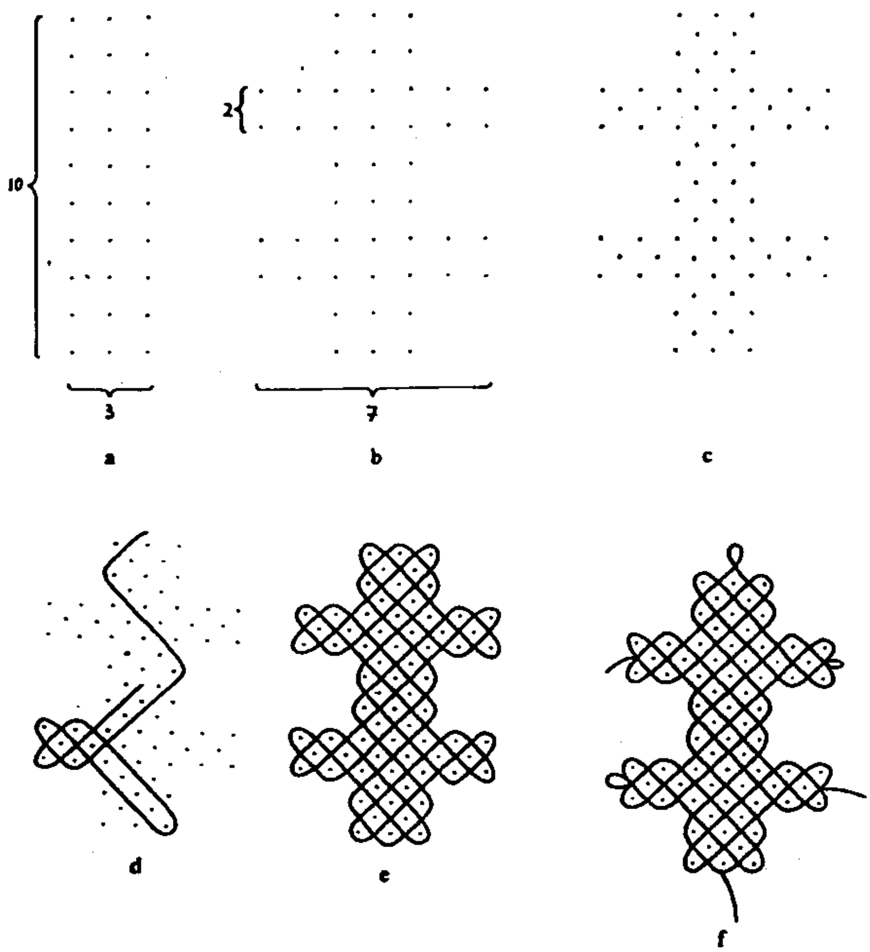

Figura 13

Sua posição mutuamente ortogonal pode ser usada na aula de matemática para comparar (ver Figura 14) os pares (3,7) e (2,10) e para descobrir que 10 : 3$\approx$7 : 2 corresponde a 3 . 7 $\approx$ 10 . 2 (21 $\approx$ 20).

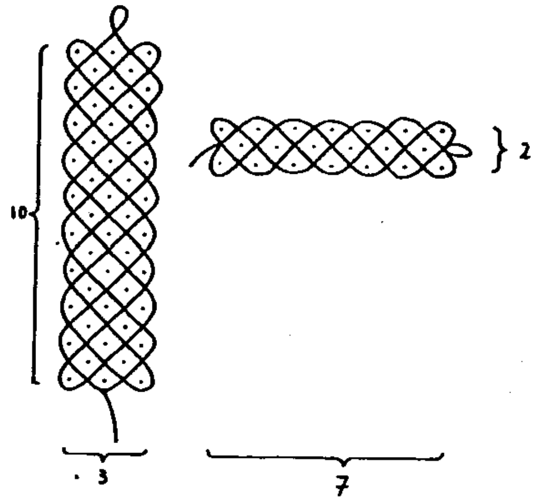

Figura 14

Uma análise análoga (Figura 15) da representação de uma leoparda com cinco filhotes (Fontinha, 1983, 183) leva à correspondência de 11 : 8 ≈ 4 : 3 e 8 . 4 ≈ 11 . 3 (32 ≈ 33).

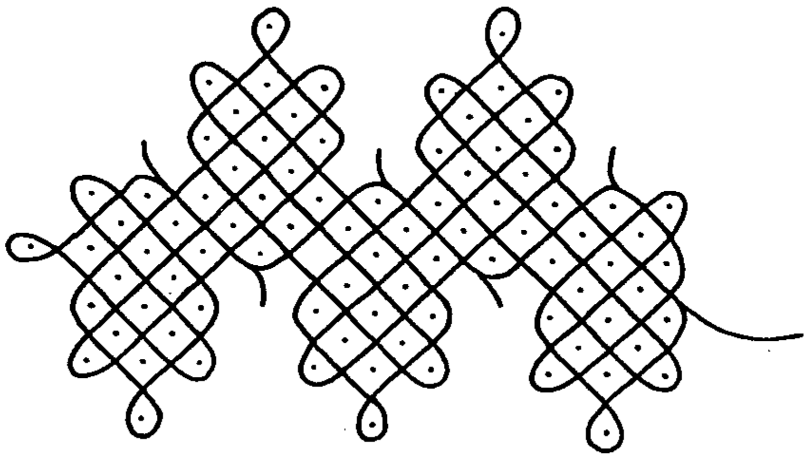

Figura 15

Extrapolando, isto dá:

$$a : b \approx c : d \text{ (ou } a : b \approx c : d)$$

equivalente a

$$b . c \approx a . d \text{ (ou } b . c \approx a . d).$$

3.5. Determinação Geométrica do Máximo Divisor Comum de Dois Números Naturais

Voltemos à representação da tartaruga (ver Figura 5). Os “akwa kuta sona” começaram por uma referência 3 x 3 e precisaram essencialmente de três curvas fechadas para completar seu desenho (Figura 16). No caso da cabeça de elefante da Figura 6, começa-se por uma rede de referência 5 x 5 e precisa-se de cinco curvas fechadas para “abraçar” todos os pontos.

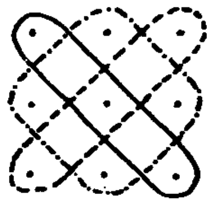

Figura 16

Para desenhar uma cabeça de antílope (Fontinha, 1983, 235), deve-se começar por uma rede 2 x 4 e precisa-se de duas curvas fechadas para “abraçar” todos os pontos do retículo (Figura 17).

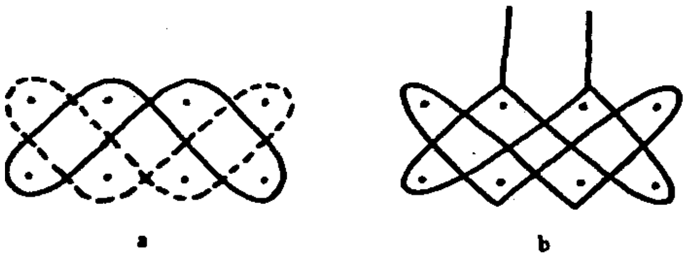

Figura 17

Quantas curvas deste tipo são precisas para “abraçar” todos os pontos de uma rede de referência m x n? f(m,n) = ... ? Para começar, os alunos podem tentar definir as características de curvas deste tipo: formam, tanto antes como depois da reflexão, ângulos de 45° com os lados da estrutura de referência (ver Figura 18).

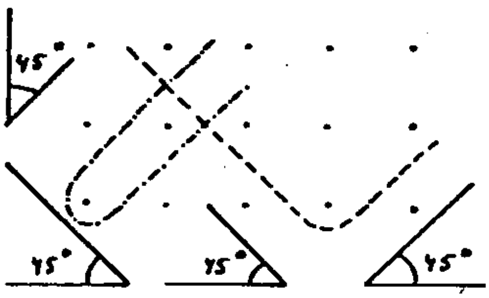

Figura 18

ISBN 978-85-89082-23-5

Agora os alunos podem experimentar (Figura 19) e descobrir que não é preciso desenhar mais que uma curva fechada para responder à pergunta: f(3,6) = ... ?

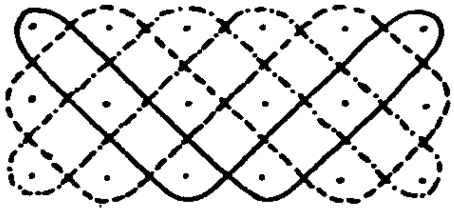

Figura 19

Uma curva fechada permitida que começa num dos vértices (Figura 20a) sempre "abraça" um ponto de cada coluna e dois de cada linha. Já que há três linhas, são precisas três curvas: f(3,6) = 3.

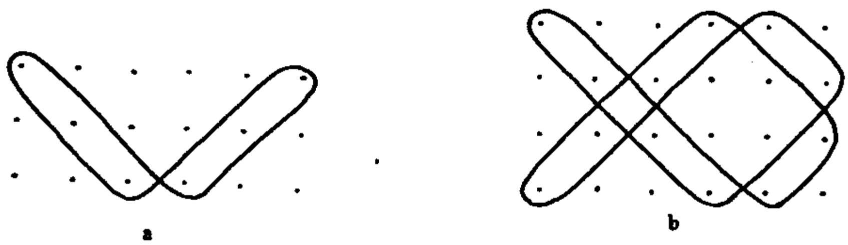

Figura 20

f(4,6) = ... ?

Desta vez, uma curva fechada permitida (ver Figura 20b) "abraça" dois pontos de cada seis colunas iniciais e três de cada linha. Já que há quatro linhas, são necessárias 4/2 = 2 curvas. Da mesma forma, já que há 6 colunas, são necessárias 6/3 = 2 curvas. Extrapolação leva a f(m.n) é um divisor de m, f(m,n) é um divisor de n, ou f(m,n) é um divisor comum de m e n. Mais experimentação leva a: f(m,n) é o máximo divisor comum de m e n (= mdc(m,n)). A Figura 21 dá uma aplicação deste resultado provisório. Observação cuidadosa do comportamento da curva fechada desenhada na Figura 21 e comparação com outros exemplos concretos podem levar os alunos a descobrir a seguinte generalização interessante: mdc(m,n) = número mínimo de pontos "abraçados" por "ramos" de uma curva fechada permitida que passa por uma rede de referência m x n.

ISBN 978-85-89082-23-5

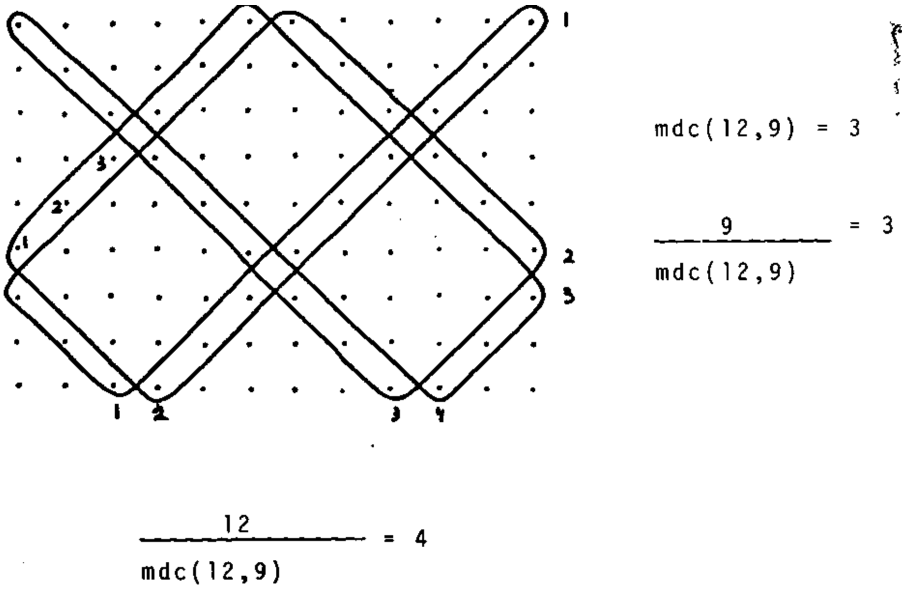

Figura 21

3.6. Rumo ao Algoritmo Euclidiano

A partir desta generalização, não é muito difícil aos alunos, por meio de uma série estruturada de exercícios (ver Gerdes, 1987a), chegarem ao equivalente geométrico do algoritmo de Euclides para a determinação do máximo divisor comum de dois números naturais. A Figura 22 elucida os possíveis passos sucessivos neste processo de descoberta para o caso (m,n) = (21,15). Na Figura 22b, a curva fechada permitida foi substituída por uma linha poligonal. Nesta fase o mdc(m,n) pode ser interpretado geometricamente da seguinte maneira (cf. Figura 22c): mdc(m.n) = comprimento do lado do maior quadrado com o qual é possível encher um retângulo m x n (mesma unidades de comprimento).

ISBN 978-85-89082-23-5

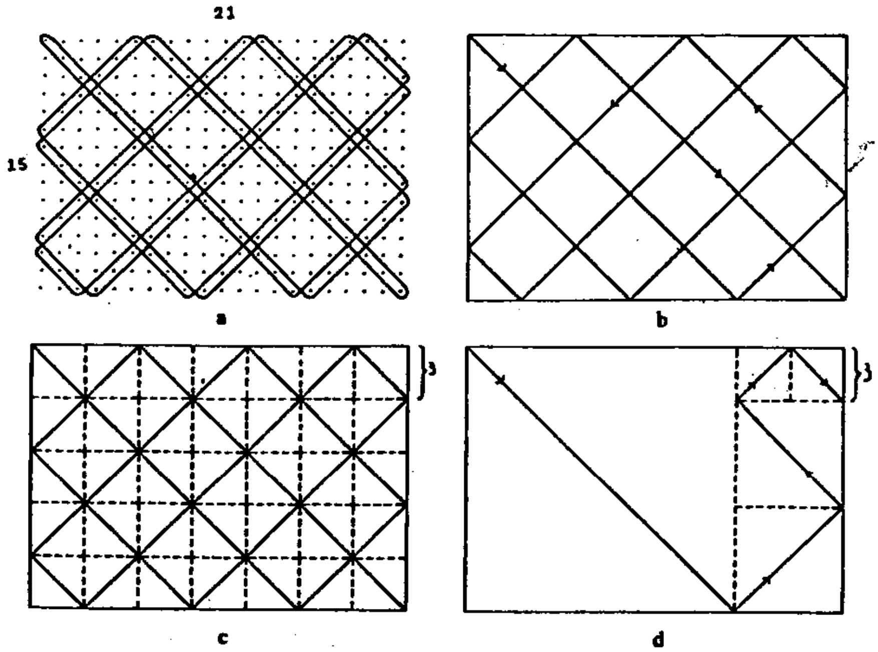

Figura 22

A Figura 22d mostra que não é necessário desenhar toda a linha poligonal de 22b para encontrar o mdc(m,d). Basta considerar uma linha poligonal reduzida que "corta diagonalmente quadrados" do retângulo original m x n.

3.7. Grafos de Euler

A tradição Tchokwe de desenhos na areia oferece boas oportunidades para estudar algumas propriedades de grafos. Pode-se perguntar aos alunos, por exemplo, quais as figuras que podem ser desenhadas na areia sem levantar o dedo e sem retraçar qualquer segmento de reta (cf. Zaslavsky, 1973, 105).

As representações de um pássaro "dyahotwa" (ver Figura 23a, b; Fontinha, 149, 151) não são traçáveis. Mas podem ser "entendidas" para se tornarem traçáveis (Figura 23c,d). Os alunos podem descobrir que existe um caminho que percorre a figura sem passar mais que uma vez sobre o mesmo segmento se e somente se existirem menos que 3 vértices pertencendo a um número ímpar de segmentos. A representação de um casal (Figura 24, Fontinha, 1983, 145) é um exemplo de um grafo de Euler deste tipo.

ISBN 978-85-89082-23-5

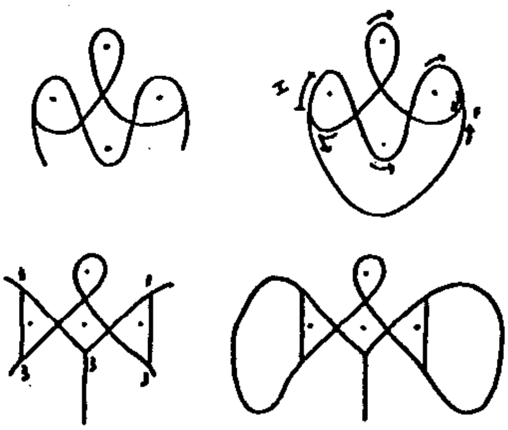

Figura 23

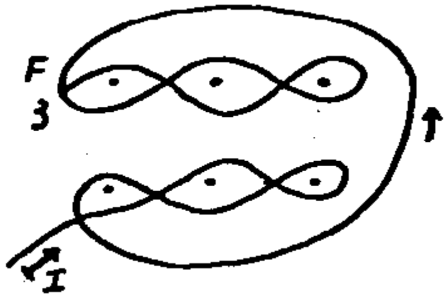

Figura 24

4. Observações Finais

Neste artigo sugerimos algumas possíveis formas de usar tradicionais desenhos angolanos na aula de matemática. A incorporação no currículo desta tradição, tanto educacional para atingir objetivos importantes para a sociedade:

- No caso concreto do povo Tchokwe, pode contribuir para reivindicar, reforçar e valorizar esta prática dos “akwa kuta sona”, ameaçada de extinção durante a ocupação colonial; pode contribuir na direção de uma educação matemática mais produtiva e criativa, evitando a alienação sócio-cultural e psicológica.
- Com a integração desta tradição regional no currículo nacional, esta prática de desenho, o conhecimento que revela e o seu potencial matemático, tornar-se-ão menos monopolizados, menos regionais, menos tribais; a incorporação desta e de outras práticas populares de todas as regiões do país contribuirá para o desenvolvimento de uma cultura verdadeiramente nacional, muito importante

num processo de construção de uma nação como no caso de Angola (cf.Gerdes, 1986b);

- A utilização destes motivos em desenhos na areia na aula de matemática não precisa se restringir a Angola. Antes, pelo contrário. A sua incorporação em outros currículos africanos, por exemplo em Moçambique, contribuirá para a valorização e apreciação da cultura deste povo irmão, reforçará a apreensão do valor desta herança artística e científica do nosso continente; consolidará a idéia que a matemática não vem de fora de nossas culturas africanas. Também em outras sociedades (cf. Zaslavsky, 1973, 1979, 1985), a sua integração “multi-culturisante” no currículo pode estimular interdisciplinaridade (p.ex. matemática e desenho com educação artística-estética) e contribuir para confiança matemática: a matemática é pan-humana, todos os povos tem sido capazes de desenvolver matemática (etno-matemática). Esta confiança facilitará a assimilação de “matemática mundial”.

Alguns outros exemplos de incorporação de práticas tradicionais num currículo matemática são dados em Gerdes (1986a, 1987b).

Pós-Escrito

Neste artigo exploramos algumas possibilidades de utilizar a tradição Tchokwe de desenhar na areia na aula de matemática. Contudo, o seu valor educacional não é a única razão para estudá-la. Também constituem um estímulo para o desenvolvimento de novas idéias e métodos matemáticos (ver p.ex. os resultados de Jaritz, 1983) e são muito importantes para a reconstrução de algumas partes dos primórdios da história da matemática. Provavelmente, independentemente da tradição Tchokwe, métodos similares de desenhar foram desenvolvidos no Sul da Índia (Layard, 1937) e nas Novas Hébridas (Deacon, 1934; Ascher, no prelo). Parece que povos diferentes inventaram o mesmo recurso mnemônico em respostas à mesma necessidade de facilitar a transmissão de idéias e valores de uma geração a outra. Há motivos para se acreditar (ver p.ex. as figuras em Giacardi et al., 1979, 146, 157) que existiu uma tradição semelhante na Antiga Mesopotâmia. O autor está preparando um estudo sobre a possível influência de uma tradição deste tipo de desenhos na areia dos Tchokwe sobre o desenvolvimento da matemática da Antiga Mesopotâmia, uma das raízes importantes da "matemática mundial".

Agradecimentos

O autor agradece aos professores D.Crowe (Madison, EUA), M. Ascher e C. Zaslavsky (Nova York, EUA) e aos editores seus comentários valiosos sobre este artigo; ao Dr. W. Humbane (Maputo, Moçambique) a revisão do texto em inglês e ao Wim Neeleman (Rio Claro, Brasil) a tradução deste artigo para o português.

Referências

Artigo publicado originalmente em "Educational Studies in Mathematics", vol 19 nº1 (Fevereiro de 1988) p.3 – 22.

Nota: Sobre esse mesmo tema, o autor escreveu uma brochura, para crianças a ser editada pela Editora Scipione na série "Vivendo a Matemática" (coordenador: Márcio Imenes). A brochura contém muitas atividades para alunos e dá ao leitor a possibilidade de experimentar na sua escola.