Uma Reflexão sobre a Indução Finita: relato de uma experiência

A Reflection about Finite Induction: reporting an experience

Angela Marta Pereira das Dores Savioli[1]

Resumo: Pretende-se neste trabalho fazer uma reflexão sobre a indução finita e apresentar uma proposta para o ensino da mesma num curso de formação de professores de matemática. Utilizando-se de uma atividade de investigação em sala de aula, propõe-se realizar uma experiência matemática com os alunos, fazendo-os experimentar, conjecturar e formalizar um problema. Espera-se assim, contribuir para a formação do futuro professor de matemática.
Palavras-chave: Indução finita. Experiência. Investigação.

Abstract: The aim of this paper is to reflect on finite induction and present a proposal for teaching this subject in a course for future mathematics teachers. Using investigative activities in the classroom, a mathematics experiment is proposed for the students in which they pose problems, experiment and conjecture. In doing so, we hope to contribute to the education of future mathematic teachers.
Keywords: Finite induction. Experience. Investigation.

Introdução

A indução finita como método de demonstração vem sendo utilizado desde a Antigüidade, inclusive aparecendo implicitamente na obra **Os Elementos**, de Euclides (300a.C.). Segundo Katz (2004), nessa obra, em seu livro IX, proposição 35, encontra-se uma seqüência de números numa “proporção contínua” dada por a, ar, ar^2,..., ar^n e a soma de “todos os anteriores” dada por S_n (desde que existam n termos antes de ar^n). O resultado de Euclides afirma que $(ar^n - a): S_n = (ar - a): a$. Também, de acordo com Coelho e Millies (2001), a primeira afirmação explícita do princípio de indução finita deve-se a Pascal, no trabalho **Traité du Triangle Arithmétique**, de 1654.

Como método para a fundamentação do conceito de número natural, a indução finita é apresentada por Peano[2] sendo, freqüentemente, introduzida aos alunos nas primeiras séries do Curso de Matemática. Segundo Cury et al. (2002), boa parte dos alunos pensa na aprendizagem da indução matemática sob o enfoque da concepção lingüístico-pragmática, isto

---

[1] Professora Doutora do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas, UEL, Londrina, E-mail: angelamarta@uel.br.
[2] G. Peano, Arithimetica Principia Nova Methodo Exposita, 1889.

é, uma concepção que privilegia as técnicas de transformação algébrica dissociada das situações reais e preocupada apenas com o emprego de regras e propriedades no trabalho com expressões algébricas. Desta forma, os alunos preocupam-se com a obtenção de regras, de artifícios, de "modelos", buscando apenas a solução de um problema proposto.

Neste artigo, o interesse recai numa reflexão dos processos de ensino e de aprendizagem desse tópico da matemática, bem como de sugerir uma proposta de ensino enfatizando seu uso na prova de outros resultados de matemática, não só de fundamentos e de geometria. Espera-se contribuir para a formação dos futuros professores de matemática, fazendo-os vivenciar uma experiência matemática.

Para tanto, apresentar-se-ão, inicialmente, algumas considerações sobre o modo como tradicionalmente a indução é trabalhada nos cursos de matemática. Em seguida, será feita uma reflexão sobre a questão conceitual da indução finita. Finalmente, far-se-á uma proposta de ensino da indução finita para o Curso de Matemática – habilitação Licenciatura, utilizando-se de atividades investigativas.

A Indução Finita:

Segundo Y. Gástev, (apud SOMINSKI, 1996), indução significa o raciocínio que vai do particular ao geral e desempenha papel fundamental nas ciências experimentais. Assim, apesar do nome lembrar algo empírico (que se apóia na experiência e na observação), a indução finita é considerada um método dedutivo. De acordo com o mesmo autor, a demonstração desse método constaria de duas partes: uma base, ou seja, a demonstração dedutiva da proposição para um número natural e o passo indutivo que consistiria na demonstração, também dedutiva, da proposição geral: para todo n é correto que a validade da proposição para n implica a validade para n+1. Afirma ainda que a expressão "indução finita" deve-se simplesmente à associação, em nossa consciência, com as argumentações "indutivas" tradicionais.

Além da prova por indução finita, têm-se outros tipos de prova em matemática, como, por exemplo, as seguintes:

- Prova por construção ou demonstração direta: a partir de algumas hipóteses é possível chegar, por dedução, à tese;

- Prova por absurdo: nega-se a tese e, a partir das hipóteses configuradas, chega-se a um absurdo. Como exemplo tem-se a prova que Euclides fez para a existência de infinitos números primos;
- Prova utilizando-se a contra-positiva: nega-se a tese e chega-se a uma negação da hipótese. Como exemplo tem-se a prova de que para um inteiro n qualquer, se n^2 é par, então n é par;
- Prova de existência: constrói-se um objeto matemático. Como exemplo, tem-se a prova da existência do máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros;
- Prova de unicidade: conclui-se que um objeto é único. Como exemplo, tem-se a questão da unicidade do elemento neutro para a adição nos inteiros;
- Prova por contra-exemplo: exibe-se um caso particular no qual a propriedade não vale. Como exemplo, tem-se a prova de que nem todo número primo é ímpar.

A indução finita, geralmente, é trabalhada nas primeiras séries do Curso de Matemática de maneira técnica, isto é, como uma receita a ser seguida. Sendo assim, os estudantes não são levados a pensar e refletir no porquê da existência e na utilidade da indução no desenvolvimento do pensamento matemático, como também, de sua aplicação na própria matemática. Muitos deles acabam vendo a indução finita apenas desse modo mais técnico não refletindo sobre o Teorema de indução finita, suas hipóteses e sua tese.

Apesar de Lopes (1998) defender que a indução se aprende através da execução de muitos exercícios e afirmar que os livros que apresentam o conteúdo de indução devam trazer respostas e soluções detalhadas de todos os exercícios para que os alunos não fiquem frustrados sem saberem se resolveriam certo ou errado, acredita-se que esta não seria uma boa estratégia para se trabalhar com a indução finita. Por que não aproveitar a indução finita e realizar uma experiência em sala de aula permitindo que os alunos reflitam sobre o que estão fazendo?

Tradicionalmente, a indução finita é introduzida quando se trabalha com números naturais. Alguns livros, como Domingues e Iezzi (2003) e Gonçalves (1979), enfocam este método logo após colocarem as propriedades dos inteiros e utilizam o Princípio da Boa Ordem para a prova do Teorema de Indução Finita.

Outra forma de apresentação da indução finita é através do quinto axioma de Peano, como se pode encontrar em Lima (1999), “Considerando $X \subset N$. Se $1 \in X$ e se o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = N$. “

O Teorema de Indução Finita também pode ser visto em forma de propriedades (ou proposições), ou seja, considerando-se o conjunto dos números naturais como $N = \{0,1,2,...\}$, o Teorema de Indução Finita pode ser enunciado como:

" Considere P(n) uma afirmação relativa a $n \in N$. Suponha que

a) P(1) é verdadeira;

b) Para todo $n \in N$, o fato de P(*n*) ser verdadeira implica que P(n+1) é verdadeira, onde n+1 é o sucessor de n.

Assim, P(n) é verdadeira para todo $n \in N$."

Neste trabalho, opta-se por apresentar a indução finita aos alunos via axiomas de Peano, pois se acredita que esta forma facilita a compreensão da mesma e deixa clara para o estudante a estrutura do método, isto é, mostra a importância das condições a e b para a conclusão de que P(n) é verdadeira para qualquer n natural.

Reflexões sobre a Indução Finita

Algumas questões sobre a importância da indução finita e seu ensino poderiam ser colocadas fazendo-se uma reflexão sobre o assunto.

Porque se ensina indução finita? Qual a real importância do ensino deste tópico da Matemática?

Uma resposta seria a de que a indução finita proporcione ao aluno vivenciar uma "experiência matemática" que, em regra geral, consiste na busca da solução de um problema, utilizando-se de exemplos para chegar a uma conjectura e, finalmente, à prova desta. Esse processo leva o aluno a traçar os passos da descoberta e da investigação, que vai utilizar durante toda a sua carreira como matemático e como professor de matemática. Essa investigação também envolve de acordo com Ponte et al. (2005) a observação, experimentação, indução, analogia e razões plausíveis, bem como, também o objeto lógico e dedutivo vindo dos trabalhos de Euclides e Bourbaki[3]. Segundo o mesmo autor, em vez de estabelecer um conflito irredutível entre esses dois lados da matemática, questiona-se como eles podem estar complementando um ao outro no processo de aprendizagem.

Considerando a indução finita como um método, precisa-se estudá-lo e analisá-lo para que sua aplicação não fique restrita às fórmulas que os alunos não têm idéia de onde vieram.

Um ponto fundamental a se considerar é de que quando se trata de um problema de indução finita existe uma preocupação com o procedimento e, geralmente, este não apresenta nenhuma motivação que gere o envolvimento dos alunos nas atividades.

A motivação e, conseqüentemente, o envolvimento nas atividades, constitui uma questão essencial nos processos de ensino e de aprendizagem. Eles estão diretamente relacionados com a predisposição do aluno para uma aprendizagem efetiva.

Segundo Ausubel et al. (1978), a participação nas atividades de aprendizagem pode indicar se há predisposição do aluno para aprender significativamente. Buscando despertar esse envolvimento dos alunos, propõe-se introduzir a indução finita, utilizando-se problemas envolvendo a mesma, ou seja, são dados os problemas para que os alunos resolvam sem saberem se utilizarão a indução ou não e sem deixarem as fórmulas explícitas. Eles terão de descobri-las, conjecturá-las e provar sua veracidade para todo número natural.

Segundo Ponte et al. (2005), o caminho indutivo é essencial para criar novos conhecimentos e o dedutivo é necessário para organizá-lo e decidir o que é válido e o que não é. Por isso a importância da indução finita.

Analisando questões de provas e trabalhos desenvolvidos no Curso de Matemática da Universidade Estadual de Londrina nos últimos anos, percebe-se que os alunos apresentam dificuldade de compreender a indução finita e sua importância. Apresentar problemas e discutir as soluções são elementos imprescindíveis na formação do estudante. Por exemplo, provar, utilizando a indução finita, que a soma de dois números naturais é um natural, desperta no aluno a curiosidade e o questionamento matemático, uma vez que ele nunca parou para pensar que existe uma prova por indução para essa afirmação. Obviamente, caberiam aqui algumas considerações. Algumas afirmações matemáticas podem ser provadas de maneira mais simples, sem a utilização da indução finita, como, por exemplo, a prova de que a soma de dois números pares é um número par. Contudo, usa-se a indução finita também para provas desse tipo. Cabe aos professores escolher a prova de algum resultado que esteja adequado ao que se quer destacar para os alunos naquele momento.

---

[3] Nicholas Bourbaki

A indução finita como é trabalhada normalmente deixa para o aluno a impressão de algo puramente algébrico e sem aplicabilidade. No entanto, problemas envolvendo geometria ou mesmo jogos podem ser abordados no trabalho com o método de indução finita. Como exemplo, tem-se o problema de se determinar a relação entre o número de diagonais de um polígono convexo com o número de lados desse polígono e o problema de se determinar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados. Os alunos buscam exemplos dentro do conhecimento que já detêm. Isto é, fazem vários ensaios com triângulo, quadrado, e outros polígonos convexos, e então conjecturam sobre uma fórmula que resolveria o problema, utilizando-se finalmente do Teorema de Indução Finita para provar a afirmação.

A investigação matemática

O que seria investigar em matemática? Como trabalhar com alunos a investigação matemática?

Segundo Ponte et al. (p. 13, 2005), "para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades"

Assim surgem os novos conceitos matemáticos, bem como os novos resultados e, possivelmente, as novas teorias. O matemático, ao se defrontar com uma questão, faz alguns exemplos, conjectura e finalmente prova seu resultado. Ele não sabe de antemão o que vai encontrar pela frente. Pode ser que demonstre exatamente o contrário do que pensava inicialmente.

A investigação matemática poderia ser o que chamamos de uma experiência matemática, uma atividade na qual o aluno descobre como resolver o problema por si só, sem a intervenção do professor e com os conhecimentos que possui. Ela está muito próxima da resolução de problemas, na qual a solução é conhecida pelo professor. Segundo Polya (p.1, 1998),

> Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Se o fim por si só não sugere de imediato os meios, se por isso temos de procurá-los refletindo conscientemente sobre como alcançar o fim, temos de resolver um problema. Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente por meios adequados.

Na investigação matemática, a resposta ou solução do problema pode não ser conhecida ainda. O aluno, na tentativa de resolução de um problema, depara-se com situações inusitadas e muitas vezes, de repente, a solução aparece como se uma conexão se efetivasse. Concorda-se com Polya (1975) quando ele chama a atenção para o contraste entre duas imagens da matemática: "a Matemática tem duas faces; é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais. A Matemática em construção aparece como uma ciência experimental, indutiva. Ambos os aspectos são tão antigos quanto a própria Matemática".

Ainda segundo Ponte et al. (2005), temos que, em Matemática, existe uma relação estreita entre problemas e investigações. Isto é, uma investigação em matemática desenvolve-se em torno de um ou mais problemas. E resolver esses problemas seria o objetivo.

Os autores ainda apontam os quatro momentos principais de uma investigação matemática: o primeiro seria o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões, o segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas, o terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas e o último diria respeito à argumentação, à demonstração e à avaliação do trabalho realizado. Nota-se que esses momentos poderiam acontecer simultaneamente.

Na investigação matemática, o aluno passa a atuar como um ser ativo no processo de ensino e de aprendizagem. Ele participa como um matemático, tentando descobrir algo novo para ele. Acredita-se que a investigação seja um método eficiente para o estudo da indução finita proporcionando aos alunos sua primeira experiência matemática. Além disso, outras descobertas podem acontecer durante o processo de investigação de um problema, trazendo amadurecimento para o aluno.

Proposta

Com o intuito de apresentar aos alunos a indução finita de uma maneira reflexiva, optou-se por utilizar a investigação matemática numa prática em sala de aula. A idéia é levar o aluno a ter uma experiência matemática. Escolhem-se, inicialmente, alguns problemas conhecidos pelos estudantes, buscando-se que reflitam sobre os mesmos e descubram o porquê daquelas fórmulas. A atividade pode ser realizada em seis aulas. Nas duas primeiras, seriam apresentadas aos estudantes duas questões que deveriam ser resolvidas numa folha e entregues ao professor. Como numa atividade investigativa, propõe-se que o professor não interfira, nem responda as questões dos alunos. Nas duas aulas seguintes, optou-se por apresentar questões nem tão conhecidas pelos estudantes, trabalhando numa atividade de investigação matemática. Espera-se que, como os alunos provavelmente desconhecem a fórmula, esses problemas despertem maior interesse e disposição para tentar achar e buscar uma solução. Essa atividade, além de promover uma maior integração da turma, deve ser mais interessante para os alunos, bem como, dará margem a algumas reflexões e discussões sobre o tema indução finita. Nas duas últimas aulas seriam feitas as discussões das soluções encontradas. As questões seriam retiradas de alguns livros constantes na bibliografia. Como exemplo, cita-se:

- a) Encontre uma fórmula que dê a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados ($n \geq 3$).

  b) Prove que a fórmula encontrada é verdadeira.
- Seja um polígono convexo com n lados. Qual o número de diagonais desse polígono?
- Desenham-se n círculos num plano π de acordo com o seguinte: todos os círculos cortam-se sempre em dois pontos e três círculos não passam nunca pelo mesmo ponto.
  a) Encontre o número de regiões do plano π dado pelos círculos, incluindo a que é exterior a todos os círculos.
  b) Prove a fórmula encontrada para todo $n \geq 1$.

Note-se que durante a experiência em sala de aula não poderia ser feito nenhum comentário sobre como ou o que deveria ser usado para a resolução dos problemas. Inclusive pede-se para mostrar que as fórmulas sejam verdadeiras, não fazendo referência ao conjunto dos números naturais.

Quanto aos primeiros problemas, espera-se que os alunos tenham uma idéia do caminho a seguir e logo pensem na indução finita para resolvê-los. Espera-se também que comecem com casos particulares, percebam que existe uma regra ou um padrão, conjecturem e, de posse de uma fórmula, tentem provar por indução finita. Isto é, vivenciem uma experiência matemática.

Antes do término da atividade, após a apresentação do Teorema de Indução Finita via axiomas de Peano, os alunos seriam incentivados a provar que a soma de dois números naturais é um natural e também as fórmulas do termo geral de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica a partir das fórmulas de recorrência.

A atividade terminaria com problemas em que uma das hipóteses do Teorema de Indução Finita não seria contemplada.

Concorda-se com Hadamard (apud PONTE et al., p. 19, 2005) quando diz que “Entre o trabalho do aluno que tenta resolver um problema de geometria ou de álgebra e o trabalho de criação, pode dizer-se que existe apenas uma diferença de grau, uma diferença de nível, tendo ambos os trabalhos uma natureza semelhante”.

Enfim, com esta abordagem, é possível que o aluno construa o conhecimento por meio da resolução de um problema num trabalho compartilhado e colaborativo, bem como, venha a contribuir para que ele seja incentivado e/ou estimulado a trilhar os passos da pesquisa em matemática. E o professor deixa de assumir o papel de transmissor de informação e conhecimento para assumir o de quem desafia, desequilibra, incentiva e por que não dizer, faz uma parceria com um companheiro disposto a ajudá-lo no seu caminho da construção do conhecimento.

Conclusão

A investigação matemática no ensino de indução pode parecer para os alunos uma dificuldade a mais, contudo, tem-se que eles obtêm sua primeira experiência matemática, isto é, eles irão, num primeiro momento, buscar casos particulares, depois conjecturar e finalmente, provar suas afirmações.

Procurou-se com esta proposta apresentar a indução como um início à pesquisa matemática e não como uma mera mecanização. Com isso, os alunos parecem entender sua importância dentro da matemática, bem como, os modos de utilizá-la. É um método simples, mas que já envolve símbolos, abstração e formalidade matemática, elementos importantes para a formação do pesquisador em matemática e também do professor de matemática.

Referências

AUSUBEL, D., NOVAK, J., HANESIAN, H. **Educational psychology:** a cognitive view. 2nd ed. New York: Holt, Rinehart & Winston, 1978.

COELHO, S. P., MILIES, C. P., **Números:** uma introdução à matemática. 3. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

CURY, H. N., VIANNA, C. R., LANNES, W., BROLEZZI, A. C. Álgebra e educação algébrica: concepções de alunos e professores de matemática. **Educação Matemática em Revista – RS,** Rio Grande do Sul, v. 4, n. 4, p. 9-15, 2002.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna.** São Paulo: Atual, 2003.

GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra.** Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

KATZ, V. J. **A history of mathematics:** an introduction. Reading: Addison-Wesley, 2004.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio.** Rio de Janeiro: SBM, 1999. v. 1-3. (Coleção do Professor de Matemática, 4)

LOPES, L. **Manual de indução matemática.** Rio de Janeiro: Interciência, 1998.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de janeiro: Interciência, 1975.

POLYA, G. Sobre resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK, S., REYS, R. **A resolução de problemas na matemática escolar.** São Paulo: Atual, 1998.

PONTE, J. P., BROCADO, J., OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

SOMINSKI, I. S. **Método de indução matemática.** São Paulo: Atual, 1996. (Coleção matemática: aprendendo e ensinando).

Recebido em maio de 2006; aceito em novembro de 2006.