Bolema, Rio Claro (SP), Ano 20, nº 28, 2007, pp. 1 a 20

ARTIGOS

Um Outro Caso de Obstáculos Epistemológicos: o princípio de permanência

Another Case of Epistemological Obstacles: the principle of permanence

Gert Schubring[1]

Resumo

Os números negativos constituíram um problema conceitual para a matemática enquanto grandezas e números não foram separados epistemologicamente e a definição da matemática era a ciência das quantidades. A solução do problema conceitual aconteceu no século XIX numa parte da comunidade matemática, como componente do surgimento do novo paradigma da matemática, vencendo a ontologia substancialista e estabelecendo a visão relacionista, baseado na algebrização da matemática.

Porém, o corpo professoral nas escolas secundárias não quis, na sua maioria, adotar o novo paradigma, o princípio de permanência, erigindo-se como obstáculo epistemológico para eles. Eles continuaram a aderir à visão platônica, baseando-se em justificações geométricas, sustentando que cada afirmação deve ser demonstrável. Pretendendo que os próprios obstáculos fossem o interesse dos alunos em achar na matemática nada de arbitrário mas sim absoluta conseqüência lógica, eles tornaram o princípio de permanência um obstáculo "didactogênico", como chamou Brousseau os obstáculos causados pelas caraterísticas do ensino.

Palavras-Chave: Números negativos, obstáculos epistemológicos, princípio de permanência

Abstract

The negative numbers constituted a conceptual problem for mathematics as long as quantities and numbers had not been separated epistemologically and as mathematics was understood to be the science of quantities. The solution of the mathematical problem

[1] Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld. email: gert.schubring@uni-bielefeld.de

was achieved in the 19th century in a part of the mathematical community, as an element of the rise of the new paradigm of mathematics, overcoming the traditional substantialist ontology and establishing the relationist epistemology, based on the algebrisation of mathematics.
The group of mathematics teachers at secondary schools was not prepared in its majority, however, to accept the new paradigm. It was in particular the principle of permanence, which proved to be an epistemological obstacle for them. They continued to adhere to the Platonist view, relying on geometrical justifications, maintaining that any mathematical statement should be capable of being demonstrated. Disguising their own obstacles to be those of the students who would accept nothing arbitrary in mathematics but rather absolute logical consistency, these teachers turned the principle of permanence to constitute an "obstacle didactogène" as Brousseau had called those obstacles caused by characteristics of teaching.

Keywords: negative numbers, epistemological obstacles, principle of permanence

Os números negativos - um problema conceitual

A história dos números negativos é extremamente rica em apresentar exemplos significativos que mostram que a história da matemática não é, como a concebeu Gaston Bachelard, "uma maravilha de regularidade", de continuidade no seu desenvolvimento, mas sim de desvios, de regressos, de obstáculos, de diversidade conceitual em comunidades matemáticas diferentes.[2]

Com efeito, foi um processo enormemente moroso a solução dos problemas matemáticos inerentes a definir e conceitualizar os números negativos desembaraçados de contradições. Esse nível não foi conseguido, como afirmado longo tempo pela historiografia, nos séculos XVI e XVII mas somente durante o século XIX, e aí mesmo somente numa das comunidades matemáticas, na Alemanha.[3]

O maior problema matemático envolvido pode se resumir assim: operar com números negativos implicava operar com um outro conceito de número que não aquele subjacente às operações comumente assumidas como geralmente válidas na aritmética. Foi preciso estender as operações da aritmética comum – então com os números inteiros – para o domínio maior de

[2] Ver a discussão sobre obstáculos epistemológicos em Schubring (2002, 2006).

[3] O desenvolvimento conceitual e epistemológico da noção dos números negativos e as diferenças dele em diversas comunidades matemáticas é apresentado extensamente em Schubring (2005).

números que incluía os relativos. A necessidade de estender, a saber, redefinir as significações das operações foi concebida pelo filósofo francês Condillac como a diferença entre dois "dialetos" da língua da matemática: o dialeto da aritmética e o dialeto da álgebra: "esse dialeto [a álgebra] tem regras que precisam ser conhecidas, e é uma nova gramática a ser aprendida" (CONDILLAC, 1981, p. 275). E ele advertiu: "Quando se misturam estes dois dialetos, não é possível evitar cair em expressões contraditórias" (CONDILLAC, 1981 p. 296).

Foi em particular na operação de multiplicação onde foram mais misturados os dois "dialetos". Classicamente, segundo Euclides VII, def. 15, a multiplicação foi definida somente para números inteiros: como adição repetida de um número, e assim com um papel assimétrico entre multiplicando e multiplicador. Devido a este papel assimétrico, foi admissível estender a multiplicação ao caso de repetir uma grandeza, então de multiplicar uma grandeza por um escalar. Mas a multiplicação entre duas grandezas foi excluída porque uma grandeza não pode funcionar como multiplicador. Porém, a prática na geometria e na física sempre voltava a exigir multiplicar duas grandezas – o que acarretou que o produto não mais fosse homogêneo ao multiplicando, como exigido pela definição da operação (SCHUBRING, 2002).

Começou-se a tomar consciência das contradições nos fundamentos durante o século XVIII, mas não se conseguiu uma solução conceitual. As contradições mostraram-se particularmente agudas no caso dos números negativos, sendo eles casos especiais de grandezas: números inteiros com uma "qualidade", neste caso: uma direção. E para eles, a multiplicação de duas tais grandezas exprimiu-se como a regra dos sinais: multiplicar menos por menos.

Desde o século XVI, encontra-se em praticamente todos os livros-texto da álgebra a tentativa de mostrar a regra dos sinais, em particular para o caso de menos por menos. Apesar de alguns "dissidentes" que – começando com Cardano - queriam mostrar que menos por menos resulta em menos (SCHUBRING, 2005, p. 268), a convicção geral foi a de que não somente era necessária uma prova da regra dos sinais, mas também que já existia uma prova - ainda que formas diversas da prova coexistissem.

Refletindo sobre a crítica de d'Alembert com respeito à existência dos números negativos, foi Lazare Carnot (1753-1823) que empreendeu pela primeira vez uma análise sistemática das diversas provas da regra dos sinais. Ele mostrou que todas essas provas são deficientes. Em geral, as provas estenderam ilegitimamente a demonstração de Diofante para diferenças positivas:

$$(a\text{-}b)\ (c\text{-}d),$$

então com $a > b$ e $c > d$ ao caso inverso ou com a e c sendo zero. Como conseqüência, Carnot propagou a exclusão dessas grandezas contraditórias da matemática e a substituição dos números negativos por uma nova geometria sintética, a geometria de posição (CARNOT, 1803; SCHUBRING, 2005, p. 353ff.).

Na Alemanha, uma abordagem inteiramente diferente da rejeição expandida na França e na Inglaterra foi gradualmente elaborada e foi baseada no separar grandezas e números. Desde 1799, houve publicações que explicavam que operações com um novo tipo de grandeza exigiam redefinir, ou mesmo estender as significações das operações aritméticas (HECKER, 1799).

O segundo elemento inovador foi de algebrizar a noção basicamente geométrica de direções opostas de números positivos e negativos. Assim, concebeu-se a diferença entre sinal de operação e sinal da grandeza ("da qualidade"). Foi H. D. Wilckens, professor de matemática em uma academia florestal, que propôs em 1800 – para expressar esta diferença – uma notação segundo a qual a oposta de uma grandeza a é representada por $\bar{a}$ e as grandezas opostas são definidas pela equação a ? $\bar{a}$? 0 (WILCKENS, 1800).

A abordagem definitiva foi estabelecida em 1817 por um professor de matemática de um *Gymnasium* prussiano, em Danzig: Wilhelm A. Förstemann (1791-1836). Seu passo decisivo foi separar estritamente, nas definições das operações aritméticas e algébricas, os números e as grandezas. Refletindo sobre a epistemologia da matemática, Förstemann sublinhou a diferença ontológica entre números e grandezas. Ele criticou a noção de quantidade – sendo demais geral segundo ele – e propôs substituí-la por dois conceitos básicos: de grandeza e de número. Mas é somente com os números que se podem executar as operações algébricas – e, portanto, não com grandezas:

> *Grandezas* são: linhas, extensões, planos, sólidos, pesos, extensões do tempo, conjuntos de pessoas ou de livros. *Números*, no entanto, são apenas expressões das relações entre grandezas da mesma espécie (FÖRSTEMANN, 1817, p. 1).

É notável que Förstemann tenha partido da reflexão sobre a operação de multiplicação. Ele investigou se existe um "oposto" nesta operação e estabeleceu que deve ser o elemento inverso, definido pela equação:

$$b \cdot \tfrac{1}{b} = 1$$

e deduziu que 1 deve ser o elemento neutro dessa operação.

Tendo assim conceitualizado, numa abordagem algebrizante axiomática, a operação de multiplicação, Förstemann perguntou se existem analogias para a adição. Com efeito, mostrou-se que constitui o elemento inverso e que o 0 constitui o elemento neutro desta operação, como evidenciado pela definição:

$$a + \overline{a} = 0 \ ,$$

A próxima etapa para Förstemann foi conectar as duas operações adição e multiplicação pela distributividade. Neste ponto, ele explicou que a validade de

$$(a - b) \cdot c = ac - bc$$

já era conhecida para números positivos e absolutos. E para a validade da distributividade no domínio estendido de números positivos e negativos, ele foi o primeiro a formular o princípio de permanência, demandou como um postulado que as regras para as operações estendidas deviam corresponder às regras nos casos originais. Assim, por exemplo:

$$(a + \overline{b}) \cdot c = ac + \overline{b} \cdot c$$

com a conseqüência:

$$(a + \overline{b}) \cdot c = ac + \overline{b} \cdot c$$

E, em particular, segundo o princípio:

$\overline{b} \cdot \overline{d} = b \cdot d$ (FÖRSTEMANN, 1817, p. 17).

Gauß*, em sua famosa nota manuscrita "sobre a metafísica da matemática", insistiu que "o verdadeiro assunto da matemática são as relações entre as grandezas" (GAUSS, 1929, p. 59). E no seu resumo de 1831 sobre os restos biquadráticos, onde ele esboçou uma teoria dos fundamentos da aritmética, Gauß declarou que o conceito da oposição entre números reside na epistemologia e que na matemática não se trata de substâncias, mas de relações entre grandezas (GAUSS, 1863, p. 176). Gauß disseminou assim a abordagem epistemológica de Förstemann, a separação entre grandezas e números, sublinhando a nova epistemologia da matemática, sendo a das relações e não mais a de substâncias. Mas a obra e os conceitos de Förstemann ficaram conhecidos por somente poucas pessoas, mesmo na Alemanha.

Os conceitos de Förstemann e as novas abordagens epistemológicas de Gauß tornaram-se conhecidas e disseminadas somente depois de 1867, no ano em que o matemático alemão Hermann Hankel publicou na sua obra *Theorie der complexen Zahlensysteme* um tratamento já bastante axiomático dos fundamentos da aritmética. Ele assumiu as concepções de Förstemann sobre a *oppositeness* nas operações de adição e de multiplicação e elaborou mais explicitamente o "princípio de permanência" – que é com efeito ligado ao seu nome – como a base conceitual para estender o significado de operações a novos domínios de números. E foi Hankel também que sublinhou pela primeira vez explicitamente que essas extensões constituem convenções e que desta forma não podem existir provas para as definições assim conseguidas. Em particular, não existem demonstrações para as regras dos sinais: são convenções:

> Não é possível pronunciar-se tão acirradamente contra uma visão tão divulgada que essas equações [as regras dos sinais] jamais possam ser provadas em matemática formal; elas são convenções arbitrariamente estabelecidas para que se preserve o formalismo já existente nos cálculos. [...] Contudo, uma vez definidas, todas as demais leis da multiplicação derivam delas por necessidade (HANKEL, 1867, p. 41).[4]

* Gauß é a grafia alemã para Gauss quando escrito em minúsculo. (N.E.)

[4] It cannot be too sharply stressed against a view widely spread that these equations [the rules of signs] can nevermore be proved in formal mathematics; they are arbitrary conventions in favor of preserving formalism in the calculus. [...] Once these conventions have been established, however, all the other laws of multiplication will follow from them by necessity (HANKEL, 1867, 41; apud SCHUBRING, 2005, p. 602).

Depois a solução conceitual - um problema epistemológico

Podemos constatar que a solução matemática do problema de fundamentar as operações sobre o domínio estendido dos números inteiros foi obtida pela primeira vez em 1817, por um professor do secundário, que recebeu aceitação na comunidade matemática paulatinamente, mesmo após o apoio de Gauß. Contudo na Alemanha, a aceitação definitiva na comunidade dos matemáticos profissionais aconteceu somente depois da publicação do livro de Hankel em 1867.

Mas teria esta aceitação acarretado de imediato a disseminação e aceitação na cultura geral? Vou apresentar um debate fogoso entre professores alemães que é revelador para a persistência da epistemologia tradicional da matemática. E a duração do debate – mais de dois anos! – mostra a profundidade das convicções afetadas.

O debate teve lugar na revista *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* (ZfmnU) [Revista para o Ensino da Matemática e das Ciências Naturais], fundada em 1870 pelo J.C.V. Hoffmann. Hoffmann (1825-ca. 1910) nasceu na Saxônia e foi professor em escolas secundárias na Saxônia, em Vienna e em Hamburgo. Esta revista dirigia-se aos professores dessas disciplinas nas escolas secundárias dos diversos estados alemães e foi a primeira revista dedicada inteiramente à educação matemática.[5] A ZfmnU manteve o seu papel de revista didática principal da Alemanha até 1943, quando a segunda Guerra Mundial obrigou sua descontinuação.

A origem do debate foi um artigo de J. Kober (1883a), diretor de uma *Realschule* (escola realista/moderna), no primeiro número da revista do ano XIV/1883 sobre os começos do cálculo com letras. A intenção do artigo foi dar um esboço sucinto do ensino das regras das primeiras operações algébricas. Neste contexto, o autor apresentou as regras para multiplicar dois "binômios", i.e.

$$(a+b)(c+d), (a+b)(c-d), (a-b)(c+d) \quad ,$$

[5] Anteriormente houve duas outras revistas: o *Archiv der Mathematik und Physik*, fundada em 1841 por J. A. Grunert, especializada em artigos sobre a matemática escolar e a elementarização da matemática, e a *Zeitschrift der Mathematik und Physik*, fundada em 1856 por F. X. Schlömilch, publicando, entre outros artigos, sobre aspetos metodológicos e a história da matemática.

e em particular

$$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd \ ,$$

segundo os procedimentos conhecidos desde Diofanto. Kober não viu problemas em substituir a e c por 0:

$$(0-b)(0+d) = (-b)(-d) = +bd \ ,$$

justificando: "Pois, como as leis para a adição, a subtração, a divisão e a multiplicação valem também para zero, assim os resultados do número 13 devem continuar corretos também para $a = 0$ e $c = 0$" (KOBER, 1883a, p. 14).

Em seguida, Kober afirmou que esta multiplicação tem nada a ver com "arbitrariedade" e continuou polemizando contra a posição segundo a qual a multiplicação não seria legítima para grandezas relativas: o que deveria pensar o aluno desta disciplina com uma tal posição? (KOBER, 1883a., p. 15). No número 3 do mesmo ano, um professor de matemática, "Dr. Thieme", respondeu, referindo-se às pesquisas de Hermann Graßmann e de Hankel, explicando "a matéria correta": na multiplicação que é definida originalmente apenas para números positivos, um multiplicador negativo não é admitido. Deduzir a regra – mesmo na sua forma mais simples: $(-a)(+b) = -ab$ – pelo meio do binômio também não é legítimo porque pressupõe que $(a - b)$ etc. tenha um valor positivo. Apresentar a regra dos sinais como uma conseqüência lógica não é valido. A regra dos sinais não é uma proposição capaz de ser demonstrada mas é uma "definição". Porém, esta definição não é arbitrária mas oportuna ("zweckmäßig") (THIEME, 1883, p. 177-178).

O editor da revista permitiu a Kober uma resposta imediata e acrescentou uma nota própria de mais de três páginas. Kober postulou que a regra dos sinais não seja nem arbitrária nem oportuna mas simplesmente necessária . Nenhum matemático e nenhum filósofo poderia altera-la – ela se deduz sem dúvida da "lei da série dos números". E Kober exclamou: tenta e atribui a $(+a)(-b)$ uma outra significação! Talvez alguém encontre uma outra ainda mais "oportuna"? (KOBER, 1883b, p. 178).

Hoffmann, em suas observações, admitiu que um multiplicador negativo não fica legitimado pela definição da multiplicação, mas tentou atribuir um sentido pela noção de "oposição" de qualidades, como direção em geometria e bens *versus* débitos para grandezas na álgebra – sem então justificar concretamente a regra dos sinais. Mas no fundo, Hoffmann apoiou Kober criticando Thieme e manteve que considerar a regra dos sinais uma definição implicaria uma arbitrariedade uma vez que a regra é necessária e não arbitrária (HOFFMANN, 1883a, p. 178).

Kober, não ainda satisfeito, tentou pouco depois – no número 5 – dar uma demonstração direta da regra, pela manutenção da continuidade do produto. Considerando um produto ax, se x se diminui de uma unidade, o produto diminui de a unidades. Assim o produto passa por zero e chega no negativo porque deve tender a $-\infty$ (KOBER, 1883b, p. 340). Numa nota, o editor Hoffmann apoiou de novo Kober, citando do livro didático de um professor do *Gymnasium* em Hamburg, Schubert, uma justificação do produto com um multiplicador negativo. Mesmo sendo bastante impreciso, Hoffmann a entendeu como apoio a Kober (HOFFMANN, 1883b, p. 341).

Como Hoffmann escreveu no número 8 do mesmo ano, ele recebeu várias respostas à controvérsia entre Thieme, Kober e ele mesmo, e anunciou que as publicaria em seguida, mas que começaria ali com o artigo de Eduard Härter, professor numa *Realschule*, porque aquilo se apoiava "pretensamente" na posição de um "sábio".[6] De fato, Härter mencionou que matemáticos eminentes censuraram a apresentação dos números negativos nos livros didáticos e que uma apresentação cientificamente correta desse conceito importante dos elementos da matemática foi publicada por Rudolf Lipschitz (1832-1903), professor de matemática na universidade de Bonn, em seu livro texto *Grundlagen der Analysis*, publicado recentemente, em 1877 (LIPSCHITZ 1877).[7]

O artigo de Härter, intitulado simplesmente *O número negativo*, constitui um documento importante porque desenvolve explicitamente as diferenças entre as operações definidas com números inteiros e as operações estendidas para números negativos. Härter declarou como seu objetivo o de explicar o tratamento desse assunto por Lipschitz, que fica no livro

[6] Nota rodapé do Hoffmann, Härter 1883, p. 582.

[7] Härter sublinhou que ele não seguia diretamente o texto do Lipschitz. De fato, Lipschitz é bem explícito sobre a exigência de definir separadamente a multiplicação para os números negativos mas a apresentação não é tanto axiomática (LIPSCHITZ, 1877, pp. 18-23).

absolutamente claro mas sucinto, e de ilustrar o seu uso para ensino nas escolas.

Härter mostrou, concentrando-se no caso de menos por menos, que a multiplicação dos dois binômios admite um resultado somente quando se requer ainda ter diferenças reais, então sem ter introduzido números negativos:

$$(a-b)(c-d) = ac - ad - [bc - bd],$$

e que não é permitido resolver os colchetes e que precisa efetuar as operações numa certa ordem a fim de ficar dentro da área legítima. Seguindo Lipschitz, Härter explicou que é a multiplicação que requer a introdução dos números negativos, a fim de poder substituir o lado direito da equação por:

$$ac - ad - bc + bd$$

e poder operar independentemente de uma ordem prescrita . Ele introduz o elemento inverso da subtração, como fez Förstemann, porém substituindo a barra pelo sinal de menos, e explica que as regras de operação com os números negativos constituem *Festsetzungen* (definições). Assim, são os matemáticos que definem:

$$-a \cdot b = -ab$$
$$-b \cdot a = -ab$$
$$-a \cdot -b = +ab$$

"Essas três equações são definições arbitrárias e não podem ser demonstradas" (Härter 1883, p. 587). Concluindo, Härter acrescentou que a matemática deve os seus grandes progressos em particular às suas definições artificiais e que os significados delas se distinguem fortemente das mesmas palavras utilizadas no dia a dia.

O artigo de Härter provocou fortes agressões do lado de outros professores. O editor Hoffmann reuniu sob o mesmo título várias reações de leitores publicadas num número seguinte da revista: "Advertência para jovens professores de matemática e para aqueles que querem tornar-se professores". Uma das direções das censuras foi representada por Kober, que condenou vigorosamente toda introdução de arbitrariedade na matemática. Segundo ele, demonstrar que $-a \cdot b = -ab$ é "facílimo"; é preciso somente, e.g., calcular 3 vezes 5 e depois subtrair os 15, resultando em -15 (KOBER, 1884,

p. 108). Ele ridicularizou a afirmação da arbitrariedade, exclamando: que bom que esses senhores tenham achado por acaso o correto!

Um outro professor argumentou contra a pretendida inexecutabilidade de $b \cdot (-a)$, que esta expressão não tem sentido antes de definir os números negativos, mas que uma vez definido o número negativo, fica de imediato definido o que é um multiplicador negativo, negando que também as operações precisam ser redefinidas (SCHUSTER, 1884, p. 343-344).

A segunda direção foi um desprezo aos matemáticos. Härter deu a entender que, tendo saído recentemente da universidade e estudado os fundamentos segundo as concepções modernas da matemática, se apoiou no livro de Lipschitz; entretanto Hoffmann não teve acesso a este livro e enviou uma carta a Lipschitz a fim de saber a opinião dele sobre as afirmações de Härter. Para sua decepção, Lipschitz, em sua resposta, não quis ser envolvido no debate e referiu-se brevemente ao seu livro (HOFFMANN, 1884a, p. 108). Hoffmann comentou lamentando que Lipschitz deveria expor a sua concepção nesta revista se ele a considera tão importante (HOFFMANN, 1884a, p.. 108). Um outro leitor falou da "opinião" de Lipschitz e declarou não concordar com essa (HOFFMANN, 1884a, p. 110). E Hoffmann ainda mais fundamentalmente negou-se a aceitar as obras de matemáticos sobre fundamentos como fontes decisivas, mesmo denunciando as abordagens de Härter como justificações por autoridades; ele exclamou: "poupe-nos de demonstrações por autoridades!" Outro leitor aponta para matemáticos como Hankel, Graßmann, Cantor; Hoffmann propõe-se a publicar seu artigo, mas não o faz integralmente, mencionando que os matemáticos citados não escreveram especificamente para a escola, e os excluiu então como fontes relevantes (HOFFMANN, 1884a, p. 112).

Com efeito, a estratégia principal foi recusar argumentos de matemáticos alegando que se tratavam de questões didáticas, do ensino – enquanto o foco do debate eram convicções sobre os fundamentos da matemática.

Na verdade, as exigências do ensino foram pretextos a fim de argumentar contra a matemática como instância superior. Quando se tratou de desenvolvimentos matemáticos produzidos por esses professores, eles sempre afirmaram que seria tão fácil para os alunos que o ensino não constituísse uma própria dimensão para testar a efetividade didática. Por exemplo, um professor, citado por Hoffmann, afirmou que se consegue esclarecer o conceito dos números negativos "mesmo ao aluno o mais simplório" (apud HOFFMANN, 1884a, p. 110). E Hoffmann afirmou que pôr várias vezes em linha as qualidades de grandezas negativas, segundo a concepção dele, "não há de trazer dificuldades mesmo ao aluno tapado" (HOFFMANN, 1884c, p. 506).

Embora também não tenham escrito para a escola, outros grupos foram mais bem vindos para apoiar as posições dominantes dos professores do secundário: filósofos e psicólogos. Isto mostrou-se pela primeira vez também na ocasião do artigo de Härter. Além de livros didáticos, ele criticou também um filósofo, autor de um livro de lógica, citando-o de memória: $-b \cdot a$ é um produto, então uma soma de parcelas iguais: a parcela -*b* deve ser posta *a* vezes; assim resulta $-ab$. Mas quando se trata de $-a \cdot -b$, não se deve pôr *b* vezes a parcela -*a*, mas se deve pô-la às avessas *(verkehrt) b* vezes, então resulta $+ab$ (HÄRTER, 1883, 585). E Härter comentou: se o autor não já soubesse antes o resultado correto, ele teria chegado pelo seu "pôr às avessas" somente a um resultado às avessas.

O editor da revista foi imediatamente instigado por essa observação e tentou verificar na própria obra. Estando emprestada na biblioteca em Leipzig, ele foi obrigado esperar a citação exata por Härter.[8]

Revelou-se que, no original, não foi utilizado "às avessas" mas "oposto" *entgegen*, porém na substância, a "demonstração" não tornou-se melhor:

> "A grandeza negativa está oposta à positiva. Assim o problema: põe -5 três vezes oposto ou põe -5 três vezes de tal maneira que -5 fique cada uma destas vezes oposto, significa exatamente o mesmo como: põe +5 três vezes, i.e., +5+5+5 = +15. Então, o produto de -5 por -3 é igual a +15" (apud HOFFMANN, 1884a, p. 109).

Enquanto Hoffmann achou este original como "tudo diferente" da primeira citação por Härter, a essência de ser um *petitio principii* foi a mesma.

[8] Nota rodapé do Hoffmann, Härter (1883, p. 584).

Na verdade, como autor revelou-se Kuno Fischer (1824-1907) um dos mais importantes filósofos alemães da época e um neo-kantiano.

O próprio Kuno Fischer, contatado por Hoffmann a fim de saber sua opinião, admitiu que alteraria esta passagem do seu livro de lógica e metafísica na próxima edição (HOFFMANN, 1884a, p. 109.). Hoffmann interpretava em Fischer a aceitação de um elemento "qualitativo" que ele achou ser o fundamento dos números negativos. Ele confirmou no mesmo momento o seu desprezo por "matemáticos rigorosos" que não aceitariam esse elemento qualitativo na matemática.

Em vez de matemáticos, Hoffmann apoiava-se ainda mais em um filósofo, Moritz Wilhelm Drobisch (1826-1868),[9] citando da obra de lógica dele:

> "Quanto à multiplicação de grandezas opostas pode se dizer, que aqui já [...] se põe o multiplicando na qualidade do multiplicador" (HOFFMANN, 1884a,., p. 110).

Essa afirmação corresponde ao remédio do século XVIII, explicado em (Schubring 2002), de transformar um dos dois fatores num escalar.

E, praticamente no último artigo do debate na revista, em 1885, Hoffmann invocava mais um filósofo como apoio à sua posição: Wilhelm Wundt (1832-1920), famoso fisiólogo, psicólogo e filósofo – e apresentado como também matemático por Hoffmann. Num artigo intitulado: *A proposição ab perante um tribunal superior*, Hoffmann aponta Wundt como essa suprema instância; ele cita da seção "A lógica da matemática" da obra de lógica dele onde Wundt discute a multiplicação de números negativos e recusa que tivesse arbitrariedade em sua definição. Em vez, Wundt desenvolve uma demonstração da regra dos sinais e afirma com "certeza" que o produto de menos por menos deve ser mais. A argumentação é basicamente a mesma de Fischer: uma grandeza negativa *b* deve ser *a* vezes "revogada" (*aufgehoben*) (Hoffmann 1885a, pp. 107-109).

9 Deve se admitir que Drobisch foi professor titular de matemática na universidade de Leipzig desde 1826 até 1868 quando mudou aí para a cadeira de filosofia, mas nunca fez contribuições na pesquisa matemática; ele se restringiu a matemática elementar.

Conflitos sobre a noção de multiplicação

Porém, apoiando-se em Drobisch, Hoffmann – como ativista principal do debate na revista ZfmnU – vê-se obrigado a entrar sempre mais detalhadamente no problema da multiplicação entre duas grandezas. Ele deve admitir que existem problemas na definição geral da multiplicação e assim ele tenta estabelecer uma nova definição geral. Como esta não foi coerente, Hoffmann provocou uma nova série de debates sobre a multiplicação entre grandezas – e Hofmann, como editor, tentou refutar cada argumento expresso contra suas concepções.

Hoffmann recusou apropriar-se da abordagem algebrizante moderna e continuou a manter a justificação anterior baseada em noções geométricas, i.e., em "qualidades", na "direção", e julgou legitimado conceitualizar assim pelo texto citado do Drobisch. Ele concluiu poder melhor justificar a multiplicação com números negativos. Tendo de efetuar o produto entre (-4) e (+5), e (-4) sendo o multiplicador, ele afirmou que seria mais fácil decompô-lo como (+4) (-1) e reduzindo assim a questão "que sentido tem um multiplicador negativo?" à questão pretensamente mais fácil "que sentido tem a multiplicação por -1?". Bem simples, segundo Hoffmann: pôr o multiplicando na qualidade oposta, ou na direção oposta – assim contar desde zero no lado negativo (HOFFMANN, 1884b, p. 275). Hoffman deduziu por meio desse "desenvolvimento genético" uma nova definição da multiplicação:

> Multiplicar um número significa pô-lo como adendo tantas vezes (então segundo aquela quantidade) e no mesmo tempo naquela qualidade (relação), como o multiplicador o requer (HOFFMANN, 1884b., p. 277).

Esses esforços de Hoffmann mostram que ele foi obrigado, por causa do debate, a admitir que a noção da multiplicação tem problemas e que precisa ser redefinida para operações com números negativos.

Hoffmann concluiu dessa sua definição que seria legítimo trocar a "qualidade" de uma grandeza pelo escalar do multiplicador: assim, de transformar o produto 5 x 7 kg em 5 kg x 7 = 35 kg (HOFFMANN, 1884b, p. 277.).

Porém, com essas "inovações", Hoffmann provocou bastante protestos e refutações mesmo por professores de opiniões tradicionais que retomaram todos os antigos debates sobre a multiplicação de duas grandezas. Por exemplo, foi discutido se a multiplicação de dois comprimentos - 7m e 5m - seria $(7m)\cdot(5m)=35m^2$ ou se seria $7m^2\cdot 5=35m^2$ (RÜEFLI, 1884a, p. 279).

Esse professor Rüefli censurou também diretamente o editor Hoffmann por causa de contradições que se concluem da sua "nova" definição, em particular da transformação do multiplicador numa grandeza (RÜEFLI, 1884b, p. 500).

O debate desenvolveu-se sempre mais ramificado. Por um lado, um professor que quis ficar anônimo e que assinou como "X.", apontou outras contradições no artigo do Rüefli e afirmou que $(-1)\cdot a=-a$ é uma definição, sublinhando que quem acha que isto seria uma proposição demonstrável incorre em erro:

> "Todas as pretensas demonstrações são demonstrações fictícias" (X., 1884, p. 591).

Por outro lado, Hoffmann respondeu num artigo com extensão de 11 páginas tentando-se defender, intitulado:

"Resposta do editor à réplica dita. Ao mesmo tempo descoberta de um erro nas provas das proposições

$$a\cdot(-b)=-ab$$
$$(-a)\cdot(-b)=+ab$$

juntamente com um novo desenvolvimento dessas proposições".

Embora não contribuindo nova substância, a resposta documenta o quão acirrada foi a continuação o debate. Com efeito, falou-se do outro como do "adversário" e criticou-se o "modo de lutar" do outro. Notável é que aqui Hoffmann constata um círculo vicioso na prova de

$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd\ ,$$

onde já se pressupõe o resultado desejado $(-b)(-d)=+bd$ (HOFFMANN, 1884c, p. 508).

Conclusão

Depois de um debate de apenas dois anos apareceu um novo elemento. Um partidário do Eugen Dühring, Hermann Märtens, enviou um extrato de uma obra de Dühring ("Neue Grundmittel und Erfindungen"), explicando a concepção de Dühring sobre os números negativos. Dühring é bem conhecido dos marxistas, pelo *Anti-Dühring* de Friedrich Engels de 1878 em que Engels mostrou que as doutrinas econômicas e filosóficas desse *Katheder-Sozialist* jamais estiveram de acordo com as idéias do movimento trabalhador. Mas Dühring é também conhecido na história da matemática. Dühring, um sectário doutrineiro, achou-se estar na posse da verdade absoluta e censurou e escarneceou os matemáticos de Berlim como Kummer e Weierstraß num estilo tão anti-acadêmico que a universidade e o ministério se viram obrigados em 1877 a cassar de Dührung o direito de dar aulas na universidade – com o efeito que Dühring reclamou ser mártir da luta pela verdade (BIERMANN, 1988, p. 121-125).

Neste extrato, Dühring não somente negou a conceitualização algebrizante, ele também negou um próprio caráter matemático dos números negativos; ele somente os aceitou como números subtrativos, restringindo o significado de diferenças aos valores positivos. Revela-se que Dühring voltou nas concepções de Bézout na França do século XVIII, explicando soluções negativas isoladas como a indicação da necessidade de alterar os sinais na equação de origem a fim de conseguir soluções que sejam possíveis em números absolutos (MÄRTENS, 1884, p. 577; SCHUBRING, 2005, 121).

Hoffmann fez seguir uma resposta sua, mas é notável que ele não reconhecia o caráter retrógrado dessa concepção, que teria drasticamente reduzido os poderes da álgebra e que ele dava somente uma justificação da existência de números negativos – mas sempre segundo a sua visão geometrizante de constituir uma qualidade que pode ser transformada no oposto. Hoffmann aproveitou somente a ocasião para sublinhar que o negativo definitivamente é necessário e nem arbitrário nem casual (HOFFMANN, 1884d, p. 580).

No mesmo número da revista, Hoffmann advertiu, pintando um cenário de horror das conseqüências nefastas para o ensino da matemática se os professores fossem obrigados a dizer aos alunos que a regra dos sinais é mera convencão: "Eu temeria ver os olhos de surpresa e de espanto dos alunos". Alunos inteligentes sobreviriam com perguntas: "Isso é verdadeiramente arbitrario? Não se pode o demonstrar?"[10]

Ele não mudou a sua concepção segundo a qual as regras dos sinais são proposições indubitavelmente certas:

> Elas ficam tão firmes 'quanto uma rocha no mar' porque as verdades contidas são 'necessárias' e não 'arbitrárias'. Onde está o matemático que teria ensinado desde a invenção do cálculo com as letras que não é mas ? Nomeia-o para mim! (HOFFMANN, 1884a, p. 111).[11]

Mesmo na última contribuição do debate, Hoffmann – como representante de um grande número de professores da matemática – não mudou sua concepção e defendeu conceber grandezas negativas como uma qualidade de direção oposta (HOFFMANN, 1885b, p. 192).

Referências

BIERMANN, Kurt-R. **Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810-1933: Stationen auf dem Weg eines mathematischen Zentrums von Weltgeltung**. Berlin: Akademie-Verlag, 1988.

CARNOT, Lazare. **Géometrie de position**. Paris: Duprat, An XI = 1803.

CONDILLAC, Étienne Bonnot de. **La langue des calcul***s*. Texte établie et présenté par Anne-Marie Chouillet. Lille: Presses Universitaires, 1981.

FÖRSTEMANN, Wilhelm August. **Über den Gegensatz positiver und negativer Größen**. Nordhausen: Happach, 1817.

GAUSS, Carl Friedrich. Theoria residuorum biquadraticum. Commentatio secunda. [Selbstanzeige], **Göttingische gelehrte Anzeigen**, 23. 4. 1831 [reprint in: Gauß, **Werke**, Bd. II, 1863, 169–178].

GAUSS, Carl Friedrich. Fragen zur Metaphysik der Mathematik, in: Gauß, **Werke**, Band. X, 1933, 396-397.

[10] Nota rodapé de Hoffmann, em X. 1884, p. 591.

[11] Ver em cima.

GAUSS, Carl Friedrich. Zur Metaphysik der Mathematik, in: Gauß, **Werke**, Band. XII, 1929, 57–61.

HANKEL, Hermann. **Theorie der complexen Zahlensysteme: insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung**. Leipzig: Voss, 1867.

HÄRTER, Eduard. Die negative Zahl. **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, vol. 14, p. 582-587, 1883.

HECKER, Johann Peter. **Über den gewöhnlichen Vortrag der Anfangsgründe der Lehre von den entegengesetzten Größen**. Weihnachtsprogrammschrift der Universität Rostock. Rostock: Adler, 1799.

HOFFMANN, J.C.V. Ansicht des Herausgebers ds. Z. über diesen Punkt. **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, vol. 14, p. 178-181, 1883a.

HOFFMANN, J.C.V. Nochmals die Multiplikation mit negativem Multiplikator. **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, vol. 14, p. 340-341, 1883b.

HOFFMANN, J.C.V. Eine Mahnung an junge Mathematiklehrer und solche, die es werden wollen. Bemerkungen zu Härters Artikel über „die negative Zahl" von verschiedenen Fachkollegen. Des Herausgebers Bemerkungen und Mitteilungen, sowie die Stimmen andrer Fachkollegen. **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, vol. 15, p. 108-113, 1884a.

HOFFMANN, J.C.V. Das qualitative Element in der Multiplikation mit negativen Größen. **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, vol. 15, p. 274-277, 1884b.

HOFFMANN, J.C.V. Antwort des Herausgebers auf die vorstehende Entgegnung. Zugleich Aufdeckung eines Fehlers in den Beweisen der Sätze [...] nebst einer neuen Entwickelung dieser Sätze. **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, vol. 15, p. 505-515, 1884c.

HOFFMANN, J.C.V. Zwei wichtige Fragen über das Negative, beantwortet vom Herausgeber. **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, vol. 15, p. 580-582, 1884d.

HOFFMANN, J.C.V. Der Satz $\pm a.\pm b$ = [..]ab vor einem höhern Richterstuhle. **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, vol. 16, 107-109, 1885a.

HOFFMANN, J.C.V. „Zur anschaulichen Darstellung der Multiplikation mit (-1). **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht***,* vol. 16, 191-192, 1885b.

KOBER, J. Die Anfänge des Buchstabenrechnens. **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht***,* vol. 14, p. 13-17, 1883a.

KOBER, J. Zur Rechtfertigung. **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht***,* vol. 14, p. 13-17, 1883b.

KOBER, J. Bemerkung von Dr. Dr. Kober (Großenhain). **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht***,* vol. 15, p. 106-108, 1884.

LIPSCHITZ, Rudolf. **Lehrbuch der Analysis, Bd. 1: Grundlagen der Analysis**. Bonn: Cohen, 1877.

MÄRTENS, Hermann. Neue Feststellung des Sinnes des Negativen von Dr. E. Dühring und Ulrich Dühring. **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht***,* vol. 15, p. 577-580, 1884.

RÜEFLI, J. Zum Begriff der Multiplikation. **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, vol. 15, p. 278-279, 1884a.

RÜEFLI, J. Das qualitative Element in der Multiplikation mit negativen Größen. **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, vol. 15, p. 500-504. 1884b.

SCHUBRING, Gert. A Noção de Multiplicação: Um "obstáculo" desconhecido na História da Matemática. **Bolema** (Rio Claro/SP), ano *15*, no. 18, 26-52, 2002.

SCHUBRING, Gert. **Conflicts between Generalization, Rigor and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany**. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York: Springer, 2005.

SCHUBRING, Gert. Ontogeny and Phylogeny. Categories for cognitive development, in: **Proceedings of HPM 2004 & ESU 4** (ICME10 Satellite Meeting of the HPM Group & Fourth European Summer University 12 - 17 July 2004 Uppsala), Furinghetti, F., Kaijser, S., Tzanakis, C. (Eds.). Iraklion: University of Crete, 2006, p. 329-339.

SCHUSTER, J. St. Bemerkung zu der angeblichen Unausführbarkeit von *b*.(-*a*). **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht***,* vol. 15, p. 343-344, 1884.

THIEME. Eine für den Unterricht in der allgemeinen Arithmetik wichtige Kontroverse. **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, vol. 14, p. 177-178, 1883.

WILCKENS, Heinrich David. **Die Lehre von den entgegengesetzten Größen in neuem Gewande**. Braunschweig: Reichard, 1800.

"X.". Dennoch zur Verständigung! **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrich***t,* vol. 15, p. 590-594, 1884.

Aprovado em abril de 2007
Submetido em janeiro de 2007