

## **Matemática-para-professores *Online*: facilitando mudanças conceituais nas visões sobre matemática de professores do ensino elementar**

### **Mathematics-for-teachers *Online*: facilitating *conceptual shifts* in elementary teachers' views of mathematics**

George Gadanidis<sup>1</sup>  
Immaculate Namukasa  
Alireza Moghaddam

*Tradução: Ricardo Scucuglia*<sup>2</sup>

#### **Resumo**

Neste artigo, nós narramos o desenvolvimento de um curso online de matemática-para-professores e discutimos assuntos relacionados às seguintes perguntas: (1) Como nós encontramos tempo, em um programa de formação de professores, para discutir competências matemáticas desses futuros profissionais de escolas do ensino elementar? (2) Que tipo de experiências e conhecimentos matemáticos os professores de ensino elementar necessitam? (3) Como podemos oferecer tais experiências em um curso online? Nós analisamos dados do primeiro curso online de matemática-para-professores que oferecemos e identificamos temas emergentes. Nós concluímos que professores de ensino elementar em pré-serviço necessitam de novas e positivas experiências com uma matemática profunda para ajudar a romper com suas atuais concepções de matemática e servir como modelos para reorganização de seus pensamentos pedagógicos matemáticos.

**Palavras-chave:** Formação de Professores de Matemática. Matemática para Professores. Formação Online de Professores.

<sup>1</sup> George Gadanidis - ggadanid@uwo.ca; Immaculate Namukasa – inamukas@uwo.ca, Alireza Moghaddam - amoughadd@uwo.ca. Endereço para correspondência: University of Western Ontario (UWO), Faculty of Education (FOE). 1137 Western Road, London, Ontario, Canada, N6G 1G7

<sup>2</sup> Tradutor: Ms. Ricardo Scucuglia (scucugliars@yahoo.com.br). (1) Integrante do Grupo de Pesquisa em Informática, Mídias e Educação Matemática (GPIMEM). (Departamento de Matemática - Universidade Estadual Paulista, UNESP, Rio Claro, SP). (2) Pesquisador Assistente do Projeto Digital Mathematical Performance (<http://www.edu.uwo.ca/dmp>). (Faculty of Education – University of Western Ontario – London, ON, Canada).

### **Abstract**

In this paper we tell the story of the development of an online mathematics-for-teachers course and address issues related to the following questions: (1) How do we find time in a teacher education program to address the mathematics competence of prospective elementary school teachers? (2) What type of mathematics knowledge and experiences do elementary teachers need? (3) How might we offer such experiences through an online course? We also analyze data from the first offering of the online mathematics-for-teachers course, and identify themes that emerge. We conclude that elementary pre-service teachers need new, positive experiences with rich mathematics to help disrupt their existing conceptions of mathematics and to serve as models for reorganising their mathematics pedagogical thinking.

**Keywords:** Mathematics Teacher Education. Mathematics for Teachers. Online Teacher Education.

### **As visões sobre matemática de professores de escolas do ensino elementar**

Há poucos anos atrás, nós realizamos uma apresentação em nosso grupo de 440 professores do ensino elementar em pré-serviço. Pedindo para que as mãos fossem levantadas, nós perguntamos “Quantos de vocês adoram matemática?”. Aproximadamente, de 15 a 20 levantaram as mãos no auditório. Então nós perguntamos “Quantos de vocês odeiam matemática?” e um mar de mãos encheu o auditório. Nós também tivemos esta experiência a respeito da matemática quando trabalhamos em projetos de escola-base. Os professores de ensino elementar que trabalham de modo rotineiro expressam desgosto ou medo de matemática. Este predicamento também é bem documentado na literatura, por exemplo: Ball (2003) Fosnot e Dolk (2001), McGowen e Davis (2001). Ao mesmo tempo, nós encontramos professores muito receptivos a oportunidades de desenvolvimento profissional em matemática. Embora muitos deles carreguem visões negativas de matemática, eles procuram caminhos para aprender e melhorar as experiências matemáticas que eles propiciam a seus estudantes. É um prazer para nós trabalhar com eles.

### **O Contexto: Matemática-para-professores?**

É importante enfatizar que diferentes tendências atuais em matemática-para-professores (BALL; BASS, 2003, DAVIS; SIMMT, 2006) propõem que a matemática que os professores necessitam deve ser qualitativamente diferente da matemática para seus estudantes. No entanto, em nosso curso de matemática-para-professores, nós enfocamos intencionalmente a profunda matemática-para-estudantes.

Muitos professores do ensino elementar têm tido experiências negativas com a matemática escolar. Nós trabalhamos supondo que eles necessitam de novas e recentes experiências para ajudá-los a repensar o que é matemática e o que significa fazer e aprender matemática – experiências sobre as quais possam modelar suas práticas futuras. A matemática que nós usamos com professores em pré-serviço é a mesma matemática que nós usamos com estudantes em nossos projetos de pesquisa desenvolvidos em escolas. A seguir, oferecemos uma crítica sobre a matemática-para-professores definida por Ball, Bass, Sleep e Thames (2005).

Ball e Bass (2003) oferecem o exemplo da tarefa matemática “307 – 168” e declaram que “Para ensinar é necessário estar apto a realizar este cálculo. Isto é conhecimento de conteúdo comum. Mas estar apto a conduzir os procedimentos não é suficiente para ensiná-lo”. Eles identificaram quatro domínios distintos do conhecimento matemático para a docência:

1. conhecimento de conteúdo comum (como calcular a resposta para  $307 - 168$ );
2. conhecimento de conteúdo especializado (como analisar os erros de cálculo);
3. conhecimento de estudantes e de conteúdo (como identificar o pensamento do estudante que pode ter produzido cada erro); e
4. conhecimento de ensino e de conteúdo (como reconhecer manipulativos que melhor destacariam características de lugar-valor do algoritmo).

A sugestão é que os três últimos domínios distinguem o que professores precisam saber do que estudantes precisam saber. É aí que diferimos. Vamos

imaginar uma situação em sala de aula na qual um estudante está resolvendo o problema “307 – 168” usando a lousa e comete um erro. É possível entender que o professor está “analisando o erro de cálculo”, “identificando o pensamento do estudante que pode ter produzido o erro” e “pensando sobre quais manipulativos (ou outros métodos de modelagem e instrumentos de pensamento) poderiam melhor iluminar as características de lugar-valor do algoritmo” e com isso o estudante pode perceber o erro feito e estar apto a atribuir sentido ao procedimento formal. Mas o que os estudantes estão fazendo? Eles estão prestando atenção e pensando? Sobre o que eles estão pensando? Sobre o que eles poderiam pensar?

Os estudantes não deveriam, também, estar atentos ao erro no processo de calcular, fazendo conjecturas sobre o pensamento que pode ter produzido o erro e pensando sobre como eles podem modelar tudo isso, bem como comunicar seus pensamentos para seus colegas? Os estudantes não poderiam prestar atenção no aprendizado dos outros? Na realidade, as categorias de pensamento e conhecimento matemático que Ball e Bass (2003) usam para distinguir a matemática-para-professores são expectativas padronizadas para estudantes em muitas reformas curriculares, incluindo o currículo provincial canadense, por exemplo: o currículo matemático K-8 de Ontário, Ministério da Educação de Ontário (CANADA, 2005). Os professores precisam conhecer as três últimas categorias do conhecimento não porque este conhecimento é exclusivo para professores, mas porque este conhecimento é central para o pensamento matemático. A maioria dos professores (e estudantes e adultos) tem um déficit. Eles nunca foram formalmente engajados em aspectos envolvendo uma variedade de ferramentas e algoritmos alternativos durante suas experiências matemáticas escolares.

Outro problema no exemplo utilizado por Ball et al. (2005) para ilustrar sua concepção de matemática-para-professores é um enfoque sobre um algoritmo tradicional. O exemplo “307 – 168” apresenta uma grande preocupação sobre como o algoritmo padronizado funciona e como os estudantes devem aprendê-lo. Este exemplo é enganoso quando usado para definir matemática-para-professores. Quando se está lidando com subtração em uma sala de aula de ensino elementar ou em uma sala de pré-serviço o

foco é muito mais abrangente, inclui um enfoque sobre outros procedimentos para subtrair dois números, os quais poderiam ser construídos com base no conhecimento individual e na imaginação de estudantes e não simplesmente sobre regras rígidas e arbitrárias de algoritmos padronizados. Identificando qualquer conhecimento matemático além dos funcionamentos do algoritmo tradicional como conhecimento de conteúdo especializado, educadores podem dizer que qualquer coisa além de tarefas padronizadas e procedimentos são conhecimentos que não deveriam fazer parte das experiências matemáticas escolares. Isso poderia também significar que muitos dos conteúdos de livros texto de hoje deveriam ser recordados, bem como poderiam ser percebidos como suportes a fundamentos, desde que o que está além dos fundamentos seja definido para estar no domínio do conhecimento do professor.

### **Contexto: encontrando tempo para matemática em um programa de educação de professores do ensino elementar**

Um dilema de ensino em um programa universitário em pré-serviço tem sido a luta para encontrar tempo instrucional suficiente para discutir (ou pelo menos, para começar a discutir) a matemática necessária a futuros professores de ensino elementar. Os professores de ensino elementar precisam buscar entendimentos em todas as áreas de conhecimento, bem como em questões mais abrangentes em Educação e Pedagogia. Em 2000, nosso programa de pré-serviço de ensino elementar permitiu que fossem realizados apenas nove seminários de duas horas com pequenos grupos (25 a 30 estudantes) e nove seminários de uma hora com grupos maiores sobre métodos de ensino de matemática. Além disso, os estudantes escolheram uma disciplina de especialização (como matemática, linguagem artística, drama, ensino de física, etc.), e matricularam-se em um curso de 36 horas. Tipicamente, 20 a 25 estudantes, ou cerca de 5% de aproximadamente 440, optaram pelo curso de especialização em matemática. Portanto, a maior parte dos estudantes contou apenas com 27 horas de instrução em educação para professores de matemática durante seus programas (9 seminários de duas horas e 9 de uma hora). O nosso programa, ao invés de ser simultâneo à formação universitária

do estudante, ocorre no ano seguinte à sua formação. Ordinariamente, os estudantes submetem suas inscrições ao final de seus cursos universitários de 4 anos (também, nós contamos com estudantes que têm intenção de mudar de carreira). Um processo instrucional de vinte e sete horas restringe as oportunidades de encontrar tempo para fazer matemática. No entanto, nós estruturamos os seminários com um *design hands on*, envolvendo atividades fundamentais e, em um contexto que busca ilustrar idéias pedagógicas, nós engajamos os estudantes em processos de fazer matemática.

Desde 2000, nós tentamos diversos caminhos para aumentar a qualidade e o tempo de duração na educação de professores de matemática em nosso programa de pré-serviço de ensino elementar. Aumentar tempo destinado aos seminários tem se mostrado difícil, pois isto implica na redução do tempo de dedicação gasto em outras áreas ou no aumento total do tempo do programa (e, conseqüentemente, no aumento do custo). Nossa primeira tentativa para melhorar o programa pautou-se na substituição das nove horas de conferências com os grandes grupos para a apresentação e discussão de conteúdos em um contexto *online* envolvendo pequenos grupos (GADANIDIS; RICH, 2003). As grandes conferências não pareciam ser efetivas e às vezes não eram bem assistidas. Os instrutores rapidamente notaram uma significativa diferença na comparação com a experiência de grandes conferências dos anos anteriores: os estudantes iam mais bem preparados aos seminários em pequenos grupos. A responsabilidade mediante nossa avaliação das discussões *online* resultou no fato dos estudantes realizarem efetivamente as leituras propostas. A discussão *online* também ofereceu aos estudantes oportunidades de elaborarem e refletirem sobre suas idéias a partir das leituras e, assim, estender seus entendimentos.

No ano seguinte nós também oferecemos um curso optativo chamado “A Beleza da Matemática”, que foi anunciado como “matemática para professores que temem matemática”. Fora deste curso veio o conceito de “terapia matemática” (GADANIDIS; NAMUKASA, 2005), pois os estudantes começaram a se referir ao curso como o “curso de terapia matemática”. O objetivo do curso foi engajar os futuros professores em um processo de fazer matemática e que pudessem também desenvolver com seus

estudantes. Os problemas que nós exploramos partiram de uma coleção desenvolvida para ser usada em um projeto de pesquisa com estudantes de escolas de ensino elementar, os quais chamavam a atenção dos estudantes sobre relações matemáticas profundas e ofereciam a eles o prazer do *insight* e da surpresa matemática (GADANIDIS, 2004).

Nos dois anos seguintes, foi possível dar continuidade aos módulos *online* e, mediante financiamentos adicionais, estávamos aptos a reinstaurar o componente de grandes conferências mantendo os módulos *online*. Decidimos usar um contexto teatral nas conferências como um lugar para oferecer o curso “Beleza da Matemática” não como algo optativo, mas como um curso obrigatório a todos os estudantes. Adquirimos recipientes de materiais concretos e os estudantes utilizaram pratos de tortas para levar os materiais aos seus lugares na sala de conferência, onde eles trabalharam em pequenos grupos sobre problemas matemáticos. Nos últimos 5 minutos de cada sessão, cada estudante escreveu em uma folha uma reflexão sobre “o que eu aprendi” e “o que eu senti”. Isto serviu tanto como uma ferramenta para reflexão como uma forma de registrar as presenças. Nós lemos suas reflexões, identificamos temas e os apresentamos a eles em uma folha para iniciar uma discussão no início da sessão seguinte. A avaliação baseou-se (a) na presença e (b) na escrita de uma “redação matemática”. Na última classe, os estudantes escolheram aleatoriamente dois dos problemas que nós exploramos nas sessões e selecionaram um destes para discutir. Na redação matemática, os estudantes foram provocados a discutir uma variedade de caminhos para abordar e resolver o problema, a estabelecer conexões com outras questões matemáticas e a expressar suas experiências e conjecturas sobre o problema. A redação matemática serviu como um caminho para romper as visões pré-concebidas dos estudantes sobre o que significa fazer, ensinar e aprender matemática.

### **Desenvolvimento do curso online de matemática-para-professores**

O mais recente desdobramento na procura de tempo para fazer matemática com professores de ensino elementar em pré-serviço tem sido o desenvolvimento de um curso *online* de Matemática-para-Professores de

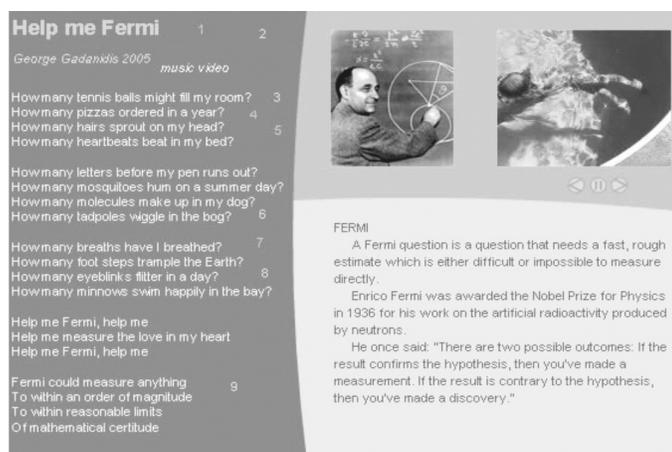
vinte horas, oferecido anualmente em Agosto, antes do início do programa de pré-serviço. (O oferecimento inicial deste curso foi em 2005).

O curso, que enfocou Geometria e Medição, foi divulgado aos estudantes através de panfletos enviados a eles em maio, juntamente com o material de matrícula do programa de pré-serviço. Ele foi divulgado como um curso para professores que não gostam ou temem matemática, sendo oferecido através de nosso programa de educação continuada de professores. Os estudantes realizaram a matrícula e pagaram pelo curso separadamente de seu programa de pré-serviço de educação de professores. Nós também propusemos dois outros cursos similares, um de Álgebra e um sobre Números e os três cursos de matemática-para-professores foram também divulgados e oferecidos para professores em serviço.

Nosso objetivo, quando propusemos estes cursos, foi possibilitar experiências matemáticas aos professores que os envolvessem em processos de fazer matemática e que pudessem mudar ou romper as verdades tipicamente assumidas em salas de aula de matemática como: matemática é uma ciência fria – ao invés de uma experiência estética e humana (GADANIDIS; HOOGLAND, 2003); matemática diz respeito a aprender procedimentos para obter respostas corretas – ao invés de possibilitar conjecturas sobre a complexidade de idéias matemáticas (GADANIDIS, 2004); um bom professor torna o ensino fácil – ao invés de criar situações nas quais os estudantes têm que pensar profundamente (JONASSEN, 2000); e, ensinar deveria começar com o que a criança já conhece e entende – ao invés de começar com o que a criança pode imaginar (EGAN, 1997).

O curso Geometria e Medição possui três módulos e cada módulo começa com as seguintes atividades *online*:

1. **Geometria: Se retas paralelas nunca se encontram** – <http://publish.edu.uwo.ca/george.gadanidis/mathpoetry/parallel>
2. **Medição: Ajude-me Fermi!** – <http://publish.edu.uwo.ca/george.gadanidis/mathpoetry/fermi>
3. **Geometria: Eu vejo isto! É invisível!** – <http://publish.edu.uwo.ca/george.gadanidis/mathpoetry/figures>

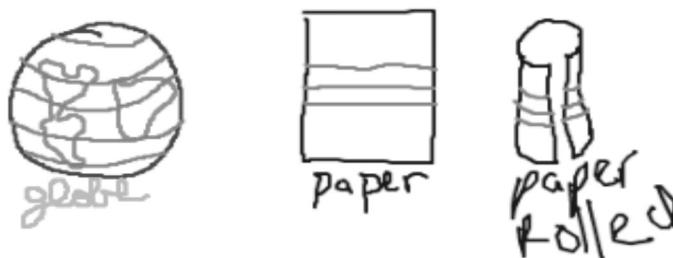


**Figura 1.** Ajude-me Fermi.

O uso de poesia (e canção) foi propositalmente escolhido como o centro das atividades (ver figura 1) porque, como sugere a poeta Molly Peacock (1999), a poesia pode ser vista integralmente na tela. Poesia também faz uso de imagens e metáforas que ajudam o leitor a sentir, de modo profundo, relações que são exploradas. As atividades *online* foram desenvolvidas usando um formato similar ao modo como Hughes (2006) desenvolveu os poemas em suas performances digitais com vídeos, imagens, textos e explorações interativas de poesia. A poesia, desenvolvida em um contexto digital, possibilita uma performance multimodal e a experimentação de idéias matemáticas. O discurso matemático escolar tradicional tem apresentado uma tendência que enfatiza a monomodalidade ou a bimodalidade (em casos nos quais diagramas ou gráficos são empregados). Kress e Van Leeuwen (2001, p. 111) sugerem que, em um contexto digital, “o significado se constitui através de vários modos diferentes, sempre, de vários modos e com várias mídias diferentes que estão co-presentes em um conjunto comunicacional”.

A plataforma de discussão *online* é chamada Zona de Construção de Idéias (ZCI). Esta é uma nova plataforma em desenvolvimento. A plataforma ZCI, que possibilitou um aumento comunicacional e colaborativo durante o curso *online*, possuía as seguintes características quando foi utilizada (Gadanidis, 2007):

- **Texto:** O editor de texto da plataforma ZCI é similar ao editor de texto Microsoft Word. Mas, como destacado a seguir, a capacidade multimodal/multimídia permite que o instrutor crie um interessante conteúdo multimodal.



*Figura 2. Usando a ferramenta de desenho no curso online de matemática-para-professores.*

- **Comunicação multimodal:** A ZCI permite ao usuário postar: gráficos, Flash (swf); diagramas (usando a ferramenta de desenho); hiperlinks (envolvendo arquivos e páginas web). A ferramenta de desenho é uma aplicação Flash a qual permite que uma imagem seja desenhada pelo usuário, que se torna um autor quando esta é postada. Esta ferramenta foi bastante utilizada no curso *online* de matemática-para-professores, permitindo que nós compartilhássemos representações visuais de nosso pensamento matemático (ver exemplos na figura 2). A mais recente versão da plataforma ZCI também permite que vídeo e áudio sejam capturados e postados.
- **Postagem de algo que seja editado coletivamente:** Na ZCI, o usuário pode escolher postar algo que possa ser editado. Isto significa que outros usuários podem editar o que foi postado, oferecendo uma oportunidade de construção colaborativa de conhecimento.
- **Postagem de sínteses:** A ZCI permite aos usuários selecionar e responder o que foi postado de modo múltiplo, permitindo que os usuários combinem idéias no que foi postado e realizem deduções em forma de síntese. Os nomes dos autores originais são listados por

um botão de novas postagens.

- **Linhas de discussões flexíveis:** O instrutor pode adicionar, esconder, expirar e reordenar linhas de discussões.
- **Escolhendo opções de postagem:** A opção de escolha dos padrões das postagens é alinhada ordenadamente. No entanto, as postagens podem ser reorganizadas por data, pelo tópico do título e por autor. A escolha do autor é extremamente importante para dar ao instrutor uma noção inicial sobre o nível de participação dos estudantes.
- **E-mail do curso, Drop Box e Caderno de Notas:** A ZCI oferece um e-mail específico para o curso, permitindo que instrutores e estudantes se comuniquem de modo reservado sem ter que utilizar seus e-mails pessoais. Esta é uma política de privacidade estabelecida por nossa universidade. As atividades do curso são divulgadas através da Drop Box, que pode ser entendida como uma variação do e-mail tradicional, que também permite a comunicação estudante-instrutor. Um caderno de notas particular é disponibilizado para que estudantes e instrutores o utilizem. Todos estes recursos (e-mail, Drop Box e caderno de notas) são postagens que podem ser utilizadas somente por um estudante e pelo professor. Para enviar um e-mail, por exemplo, você simplesmente acessa a caixa de e-mail e posta uma mensagem após selecionar o nome da pessoa a ser contatada.

### **As atividades matemáticas do curso de matemática-para-professores**

Como mencionado anteriormente, o curso *online* Geometria e Medição foi organizado em três módulos. No primeiro módulo, no qual foram exploradas linhas paralelas, os estudantes foram provocados a discutir as seguintes questões e a realizar comentários sobre a idéia dos outros:

### Matemática

- O que você aprendeu sobre linhas paralelas na escola?
- Infe um balão e use uma caneta para desenhar algumas linhas de longitude e latitude. As linhas de latitude são paralelas? As linhas de longitude são paralelas? Quais são “mais paralelas”?
- Explore a atividade *online* e discuta a matemática envolvida.

#### Ajude-me Fermi

Quantas bolas de tênis poderiam encher meu quarto?  
Quantas pizzas são feitas por ano?  
Quantos cabelos crescem em minha cabeça?  
Quantas batidas do coração bateram em minha cama?

Quantas respirações respirei?  
Quantos passos realizei ao partir?  
Quantas piscadas em um dia?  
Quantos pequenos sapos nadam felizes na baía?

Quantas cartas antes de minha caneta não mais funcionar?  
Quantos mosquitos em um dia quente?  
Quantos pedaços compõem meu cachorro?  
Quantos girinos remexem no pântano?

*Fermi poderia medir qualquer coisa*

Em uma ordem de magnitude

Dentro de limites razoáveis

Da certeza matemática

Ajude-me Fermi, Fermi me ajude

Ajude-me Fermi, Fermi me ajude

Ajude-me a medir o amor em meu coração

Ajude-me a medir o amor em meu coração

Figure 3. Poema/Canção: Ajude-me Fermi.

### Pedagogia

- Reflita sobre sua própria experiência matemática escolar e compartilhe o melhor exemplo no qual sua imaginação foi engajada.

### Reflexão

- Próximo ao final do módulo, busque discutir (a) o que você aprendeu nesse módulo e (b) o que você sentiu.

Os padrões foram similares nos dois módulos seguintes, com os estudantes discutindo matemática e pedagogia, refletindo sobre o que aprenderam e sentiram. Mais conteúdos e questionamentos foram adicionados ao curso quando surgiu a necessidade. Em parte, isto foi realizado por direcionamentos dos estudantes a *websites* que discutiam as questões em pauta (como Geometria não-Euclidiana, fontes das questões de Fermi e assim sucessivamente). O objetivo pedagógico foi criar e sustentar uma atmosfera de aprendizagem dinâmica na qual conteúdo, conceitos e sugestões fossem

introduzidos quando necessário. A meta foi desenvolver o curso de modo espontâneo ao invés de algo rígido, e para que os estudantes sentissem que o direcionamento das discussões era fluido e moldado por suas contribuições e por seus pensamentos colaborativos. Havia 36 estudantes neste curso e grande parte das discussões foram organizadas em grupos menores de 12 participantes. Os estudantes tinham acesso a todas as discussões e podiam comentar as idéias elaboradas por outros grupos. Eles foram encorajados a ler o que os outros grupos discutiram e a trazer estas idéias aos seus próprios grupos de discussão.

Quando nós fizemos as atividades sobre linhas paralelas com os estudantes, nós começamos perguntando: “O que são linhas paralelas?” e a típica resposta inicial dos estudantes é: “linhas paralelas são aquelas que nunca se encontram”. No entanto, algumas dúvidas emergem. Linhas paralelas sempre têm o formato de reta? O que seria uma curva em trilhos de trem? Trilhos são paralelos? Linhas paralelas nunca se encontram? O Equador (uma transversal?) intercepta a longitude  $90^\circ$  – isto não significa que as linhas longitudinais são paralelas ao Equador? Mas as linhas de longitude se encontram nos Pólos. Fizemos estas perguntas aos estudantes usando balões e desenhamos linhas sobre eles com canetas. Investigamos o “alinhamento” e o “paralelismo” sobre uma esfera. Explorando estas complexidades, portas se abrem para experienciar uma variedade de significados de “linha” e de “paralela”. Por exemplo, Henderson (2001) e Henderson e Taimina (2006, p. 59) falam sobre o significado de linha envolvendo simetria e linha como menor parte e sobre alinhamento extrínseco e intrínseco. Estes diferentes significados ou perspectivas usam “abordagens não-formais, experiências e imagens geométricas”, adicionam camadas de complexidade e enriquecem o significado de alinhamento. Henderson e Taimina (2006, p. 59) sugerem, através de abordagens informais, que “muitos níveis de significados em matemática podem ser abertos no sentido de que a maioria das pessoas pode, desafiando e simulando, experienciar e realizar descobertas intelectualmente”. Nós também desenhamos triângulos e quadriláteros (usando geodésicas como lados) e consideramos as somas dos ângulos internos. No curso *online*, a seqüência foi similar. Historicamente, linhas paralelas e paralelismo têm sido tópicos

controversos na história da matemática. Somente “recentemente” os matemáticos descobriram que o postulado das paralelas de Euclides não poderia ser provado, pois era um axioma e não um teorema, e que diferentes axiomas levam a diferentes, mas ainda válidas, geometrias. Também nós vivemos nossas vidas sobre uma esfera e podemos considerar que geometria esférica é um interessante e apropriado tópico para estudantes de nível elementar.

No segundo módulo foram tratadas as Questões de Fermi. Nós começamos explorando algumas das questões apresentadas no poema de Fermi (Figura 3). Então os estudantes criaram (suas próprias perguntas) e resolveram seus problemas.

No terceiro módulo foram abordadas questões sobre o uso de nossa imaginação e visualização matemática para criar e “ver” formas geométricas invisíveis. Por exemplo, quando trabalhamos com estudantes, fazemos perguntas a eles do seguinte modo.

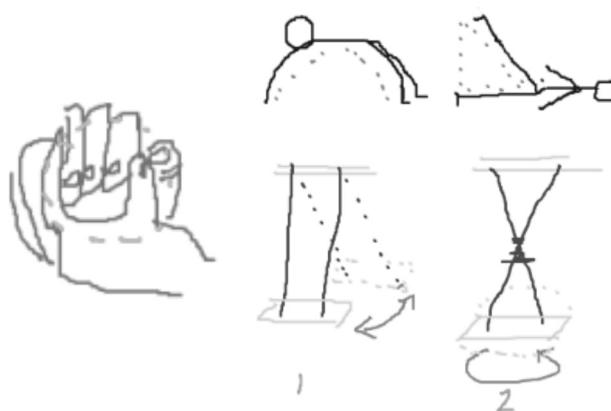
Use seu dedo para desenhar um círculo invisível no ar a sua frente. Agora, ligeiramente, amarre um cabo sob o diâmetro do círculo e movimente rapidamente, fazendo-o girar em suas mãos. Que figura tridimensional o círculo está formando no espaço?

Em seguida, pedimos a eles para desenharem um quadrado.

Use seu dedo para desenhar um quadrado invisível no ar a sua frente. Segure um lado do quadrado e coloque-o a sua frente no chão. Pise dentro do quadrado como se estivesse entrando nele. Agache e deslize seus dedos abaixo dele. Agora se levante e eleve o quadrado sobre sua cabeça. Dentro de que figura invisível você está?

Os estudantes então usam sua imaginação para criar e ver outras figuras e formas invisíveis como o caminho percorrido por um ponto branco em um pneu de carro ou como uma figura que se forma no espaço a partir de um balanço de *playground*. Algumas das idéias formadas pelos estudantes com a ferramenta de desenho da ZCI no curso de matemática-para-professores *online* podem ser vistas na Figura 4. Um estudante mostra uma figura na qual

ele segura uma esfera em suas mãos. Outro mostra formas que podem ser criadas com seu corpo. E a terceira ilustra dois diferentes movimentos de um balanço.



**Figura 4.** Desenhos dos professores no curso de matemática-para-professores.

#### **Análise do curso de matemática-para-professores**

Os dados foram coletados com a permissão dos estudantes participantes do curso de matemática-para-professores para que suas contribuições nas discussões *online* (discussões matemáticas, reflexões sobre o que aprenderam/sentiram e tarefas postadas) fossem utilizadas para propósitos de pesquisa. A partir dos conteúdos das discussões *online* foi realizada uma análise de conteúdo (BERG, 2004) (envolvendo estudantes que aceitaram participar do estudo). O conteúdo da discussão *online* foi naturalmente dividido em quatro categorias de discussão: Módulo 1, Módulo 2, Módulo 3 e reflexões sobre o fim-do-curso. Uma análise de conteúdo foi feita sobre cada categoria e temas emergentes foram identificados. Então, os temas das quatro categorias foram fundidos em temas comuns, bem como diferenças foram identificadas. Como os dados estavam em formato eletrônico (em termos de conteúdo e abordagem), as discussões *online* foram copiadas e coladas em um novo documento abaixo de cada tema identificado. Algumas discussões continham idéias híbridas e foram incluídas em mais de uma

categoria.

No segundo estágio da análise de conteúdo, o conteúdo da discussão *online* foi mais uma vez analisado juntamente com o conjunto final de categorias para que a integridade dos dados organizados sob cada categoria fosse verificada. Então, foram acrescentadas considerações descritivas a cada categoria para que a essência dos temas identificados fosse capturada. Progredindo com a análise de conteúdo, os temas que emergiram foram organizados sob as categorias globais “matemática” – visões e *insights* dos estudantes sobre matemática – e “pedagogia” – visões e *insights* dos estudantes sobre pedagogia. Um resumo é fornecido abaixo.

### **Matemática**

#### **O que os professores sabiam sobre os tópicos matemáticos baseados em suas experiências escolares.**

Quando os professores em pré-serviço foram questionados sobre o que eles recordavam ter aprendido sobre linhas paralelas na escola, o conhecimento que eles compartilharam foi mais ou menos similar uns aos outros. Eles disseram que “linhas paralelas são retas e nunca se tocam ou interceptam”. Alguns também lembraram ter aprendido sobre ângulos formados por uma transversal e relataram padrões ou regras. Neste contexto de compartilhamento de seus conhecimentos sobre linhas paralelas, alguns estudantes disseram estar admirados com o fato de linhas curvas poderem ser consideradas paralelas: “Eu não acho que linhas paralelas têm que ser retilíneas. Eu acho que elas são paralelas quando elas têm a mesma inclinação (quando elas estão exatamente à mesma distância uma da outra durante toda sua extensão)”. Um professor usou a curva em um trilho de trem para ilustrar isso. Isto confundiu os outros. Se as linhas dobras, elas realmente são linhas? Estas foram novas questões para os professores em pré-serviço. Nenhuma dessas questões havia sido explorada em suas trajetórias escolares.

### **A frustração experienciada por professores quando estão trabalhando em atividades matemáticas do curso.**

O foco do curso inicialmente surpreendeu e confundiu a maioria dos professores em pré-serviço. Um destes professores comentou: “Eu me senti confuso no início. Este é o curso de matemática em que me matriculei?”. Outro disse: “Eu me senti perdido! Poesia e Matemática?”. Ainda, outro falou: “Eu me senti confuso. O que um poema tem a ver com matemática?”. Pelo fato dos professores em pré-serviço estarem engajados com os problemas matemáticos do curso, eles também experienciaram a frustração pensando matematicamente. Para alguns, a frustração foi um tema persistente no decorrer do curso. “Eu estou um pouco mais confuso do que eu estava no início. Quanto mais eu tento dar sentido a isto, mais estou dando nó em meu cérebro”. “Eu ainda estou tendo alguns problemas para entender linhas paralelas. Eu sei o que nos ensinaram na escola, um pouco, mas foram tantas as perguntas durante esta semana que eu me sinto mais confuso (a)”. “Eu não consigo pensar sobre como resolver estes tipos de questões e, portanto, eu não quero fazer isto! Eu sou muito teimoso (a)!”. Parte desta frustração de alguns professores em pré-serviço foi sobre suas apreensões sobre ensinar o tipo de matemática que estava sendo focada no curso – uma matemática que eles não entendiam completamente. “Agora, isto está me estressando mais do que qualquer coisa! Lendo as mensagens postadas por meus colegas de classe definitivamente vi alguns conceitos que conheço, mas para eu ensiná-los a alguém *blank slate* (sem *background*) seria um desastre neste momento!”.

Para muitos professores em pré-serviço a frustração juntou-se a uma excitação sobre a matemática com a qual eles estavam engajados. “Eu me senti completamente fora da minha zona de segurança, mas intrigado pelas possibilidades”. E, como eles estavam engajados em um fazer matemática, os professores em pré-serviço expressaram de modo crescente atitudes positivas acerca dessa experiência. Um professor em pré-serviço comentou:

Então, como eu entrei no *swing* das coisas, eu me senti mais confiante com minhas opiniões, com minhas respostas e, mais importante, comigo mesmo. Eu me senti alegre e experimentando matemática como um estudante. Eu

certamente poderia me simpatizar com meus futuros estudantes. Eu me senti feliz pelo fato da orientação matemática poder ser feita de modo engajante. Finalmente, eu estava atordoado (a) – de alegria – por estar pensando sobre matemática. Eu realmente estava pensando sobre matemática, e não fazendo de tudo para evitá-la.

Mesmo sem toda a euforia apresentada no comentário acima, outros professores em pré-serviço expressaram sentimentos similares.

### **Suas (novas) visões sobre matemática.**

Um tema persistente nos comentários dos professores em pré-serviço sobre suas visões de matemática foi que o curso tinha os ajudado a perceber, para muitos deles de modo surpreendente, que matemática era uma disciplina menos rígida do que eles acreditavam ser.

Eu me sinto como se tivesse sido enganado (a), extraviado (a). Como se tivessem me contado a meia-verdade sobre linhas paralelas. Esta é a primeira vez que eu percebi/senti que matemática não é somente PRETO & BRANCO e que é possível causar resultados / discussões bastante criativas. Imagine, se nós estamos tendo essas conversas sobre linhas paralelas, o que uma criança poderia propor.

Os professores em pré-serviço começaram a ver a imaginação como uma parte integrante da matemática. Como professor, eu comentei: “Eu entendo agora que matemática é como todas as outras disciplinas. Ela é também uma disciplina criativa e nem sempre é representada por quantidades e absolutismos que possam ser encaixotados conforme se queira”. Os professores em pré-serviço também notaram que o curso os ajudou a perceber que matemática pode ser divertida. “Eu acho que no decorrer do curso eu fui encontrando uma matemática que pode ser mais divertida para aprender e ensinar em relação ao que pensava que ela poderia ser!”. Os professores também perceberam que matemática pode ser uma disciplina para ser discutida com a família e amigos, ao invés de ser somente uma atividade escolar, e que matemática pode ser encontrada todos os dias no mundo ao redor deles. “Eu aprendi que

matemática pode ser discutida com nossa família e amigos assim como um livro favorito ou um novo filme. Eu aprendi a olhar para matemática com novas luzes, e não como algo assustador a ser evitado, mas como algo maravilhoso para ser abraçado”.

### ***Pedagogia***

#### **Como o curso afetou a visão dos professores sobre suas experiências matemáticas escolares.**

No decorrer do curso, os professores em pré-serviço iniciaram uma reflexão sobre suas experiências matemáticas escolares, comparando-as com as experiências matemáticas do curso e identificando “buracos” em seus aprendizados. A maioria dos professores realizou comentários como o apresentado a seguir:

[Este curso] tem mostrado para mim o quanto eu NÃO fui ensinado (a) no ensino elementar e o quanto eu ainda preciso saber! Eu não me lembro de ter sido engajado (a) a usar minha imaginação em matemática quando eu era uma criança ou um (a) estudante. Todos os aspectos da matemática eram absolutos. Eles não eram desafiadores, eram para ser aceitos.

#### **Apreciação sobre o aprendizado coletivo.**

Um tema persistente nos comentários compartilhados pelos professores em pré-serviço foi o modo como eles apreciaram os benefícios da aprendizagem colaborativa que eles experienciaram durante o curso. Os dois comentários a seguir são típicos pontos de vista expressados pelos professores em pré-serviço.

Se eu tivesse realizado esta tarefa por mim mesmo eu não teria aprendido tanto! Lendo as experiências, idéias, *websites*, etc. de todos, foi realmente importante para que eu finalizasse este módulo. Eu acho que isto demonstra como é importante colaborar com idéias e compartilhar experiências.

A coisa mais importante que eu aprendi foi como é importante compartilhar idéias/experiências com os outros! Neste curso, eu pensei que poderia aprender com UM professor, mas ao invés de um, eu aprendi com muitos.

O interessante é que esta colaboração foi realizada em um ambiente de aprendizagem completamente *online*, no qual a interação baseou-se em uma interface digital.

### **Os *insights* pedagógicos.**

A experiência dos professores em pré-serviço durante o curso ofereceu a eles *insights* pedagógicos. Eles comentaram que o uso de questões em aberto pode ajudar a reduzir a ansiedade em ensinar matemática e ajudar a tornar isto mais divertido.

Usando atividades como as questões de Fermi, a matemática se torna menos rígida e restritiva. Ela torna-se uma disciplina para ser explorada. Ela torna-se também confortável. Se você não tem a ansiedade em encontrar a resposta “certa”, você se torna livre para se divertir e abraçar os conceitos. Nós precisamos das questões de Fermi, sim, nós precisamos! Eliminando a possibilidade de uma única resposta correta e clara, aumenta o número de estudantes que acham a matemática excitante.

Eles também comentaram sobre como podem abordar o ensino de matemática diferentemente.

Com este curso eu percebi que existe outro caminho para ensinar matemática. Um caminho que não é tão chato e restrito como eu tive na escola quando eu era jovem, mas um caminho divertido, imaginativo, que nos dá inspiração; é um prazer ouvir a opinião de todos e criar nossa própria opinião sobre a disciplina... Eu sinto que este curso permanecerá profundamente em minha memória e me fará pensar quando eu quiser ensinar uma lição estereotipada. Um dos conceitos mais interessantes que emergiram neste curso foi a idéia de ensinar os estudantes a praticar um pensamento mais difícil. Desafiando nossos estudantes a pensar mais difícil através de perguntas para criança discutir,

explicar e estender as idéias, a lição matemática será mais interessante para os estudantes e uma experiência de ensino divertida para o professor.

Embora o curso tenha focado a matemática, os professores em pré-serviço também discutiram idéias pedagógicas que foram moldadas conforme a matemática foi apresentada e experienciada.

### **Discussão**

Que impacto o curso de matemática-para-professores pode ter tido sobre os futuros professores? As citações acima, sobre os *insights* matemáticos e pedagógicos dos professores em pré-serviço, representam realmente mudanças conceituais em suas visões de matemática – sobre o que é matemática e o que significa fazer, ensinar e aprender matemática? Uma simples experiência de curso provavelmente não cria mudanças significativas e permanentes nas concepções de matemática e de ensino de matemática de professores. Precisamos continuar a buscar caminhos para possibilitar que professores encontrem oportunidades de experienciar ricas matemáticas em ambientes de pré-serviço e de serviço. É também pouco provável que esta experiência de matemática-para-professores irá afetar significativamente a prática dos professores em sala de aula. O ensino é também fortemente afetado pela aceitação de práticas de ensino em largas comunidades escolares (BUZEIKA, 1999; ENSOR, 1998) e pelo conflito de prioridades (SKOTT, 1999). Entretanto, a intensa realização de *insights* e o prazer em realizar experiências durante o curso de matemática-para-professores são importantes pontos iniciais para que ocorram mudanças nas concepções de matemática dos professores e em suas práticas em sala de aula. O curso de matemática-para-professores ajudou os professores a experienciarem novas concepções de matemática e pedagogia. Estas concepções têm potencial para servirem como modelos pedagógicos.

Que tipo de matemática professores de ensino elementar deveriam experienciar? O curso de matemática-para-professores focou a matemática que também poderia ser ensinada em escolas de nível elementar. Existem

vantagens ao se realizar com professores a mesma matemática que se realiza com estudantes (GADANIDIS; NAMUKASA, 2007). Um curso denominado matemática-para-professores (BALL; BASS, 2003, DAVIS; SIMMT, 2006) e que reivindica que a matemática que professores necessitam é qualitativamente diferente da matemática que seus estudantes deveriam experienciar perde seu poder para modelar processos matemáticos e pedagógicos em um caminho direto e experimental. Este curso de matemática-para-professores foi baseado em problemas que chamam a atenção para profundas relações matemáticas e permitem o prazer dos *insights* matemáticos. Isto é o que ambos precisam, professores e estudantes.

Um ambiente *online* é apropriado para ajudar professores a realizar experiências e fazer matemática. Gadanidis e Hoogland (2002, p. 556) sugerem que

Apesar de existirem grandes diferenças [...] os componentes de uma efetiva educação matemática *online* de professores podem não ser diferentes dos componentes críticos de uma educação matemática presencial de professores [...] os componentes de uma efetiva educação matemática de professores incluem (a) experiências estéticas com matemática, (b) confronto de crenças pessoais sobre matemática, (c) engajamento em investigações práticas, e (d) discussões sobre implicações pedagógicas.

Todos os comentários anteriores foram parte do curso de matemática-para-professores. Existem características importantes do aprendizado *online* como a comunicação à distância e a discussão assíncrona que são distintas do ensino presencial. Entretanto, as ferramentas *online* tornaram-se mais sofisticadas e permitem uma comunicação multimodal, na qual a aprendizagem *online* torna-se excitante. Acerca de 8 anos atrás, 10% de nosso programa de educação continuada de professores era *online*. Hoje, 90% do curso é realizado *online*, com 5.000 professores em serviço freqüentando nosso curso *online* anualmente. Nós ainda oferecemos a modalidade presencial, mas pouquíssimos professores optam por ela. Os professores levam uma vida ocupada e um ambiente de aprendizado assíncrono possibilita que eles possam participar e aprender ao mesmo tempo conforme suas disponibilidades de agenda.

## Conclusão

Em um programa de um ano de educação de professores de ensino elementar em pré-serviço é um desafio encontrar tempo para promover experiências matemáticas-para-professores. Este artigo fornece uma variedade de opções que vêm sendo realizadas em nossa instituição. Professores de ensino elementar em pré-serviço precisam de novas e positivas experiências com uma profunda matemática para ajudar a romper suas existentes concepções de matemática e para servir como modelos que reorganizem seus pensamentos matemáticos pedagógicos.

## Agradecimentos

Esta pesquisa foi desenvolvida com fundos do *Social Sciences and Humanities Research Council of Canada*.

## Referências

- BALL, D. L. What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics? Washington, D.C.: Secretary's Summit on Mathematics, U.S. Department of Education, 2003. Disponível em: <http://www-personal.umich.edu/~dball> Acesso em: 21 abr. 2004.
- BALL, D. L.; BASS, H. Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In: ANNUAL MEETING OF THE CANADIAN MATHEMATICS EDUCATION STUDY GROUP. GROUPE CANADIEN D'ÉTUDE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES (CMESG/GCEDM), 2002, Edmonton. **Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group**. p. 3-14. Edmonton, AB: CMESG/GCEDM, 2003.
- BALL, D. L.; BASS, H.; SLEEP, L.; THAMES, M. **A theory of mathematical knowledge for teaching**. Paper presented at the The Fifteenth ICMI Study: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics, 15-21 May 2005, State University of Sao Paulo at Rio Claro, Brazil. Retrieved December 1, 2006 from [http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log\\_in.html](http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log_in.html), 2005.
- BERG, B. L. **Qualitative research methods for the social sciences**. New York: Pearson, 2004.

BUZEIKA, A. Teachers' doubts about invented algorithms. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 23<sup>rd</sup>, 1999, Haifa. **Proceedings of the 23rd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 23)**. Haifa, Israel: PME, 1999. v. 2, p. 161-168.

CANADA. Ontario Ministry of Education. **Mathematics**: grades 1-8. Toronto, 2005.

DAVIS, B.; SIMMT, E. Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics, Dordrecht*, v. 61, n. 3, p. 293-319, 2006.

EGAN, K. The arts as the basics of education. **Childhood Education**, Wheaton, v. 73, n. 6, p. 341-345, 1997.

ENSOR, P. Teachers' beliefs and the problem of the social. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 22<sup>nd</sup>, 1998, Stellenbosch. **Proceedings of the 22nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 22)**. Stellenbosch, South Africa: PME, 1998. p. 280-287.

FOSNOT, C. T.; DOLK, M. **Young mathematicians at work**: constructing multiplication and division. Portsmouth, NH: Heinemann, 2001.

GADANIDIS, G. The pleasure of attention and insight. **Mathematics Teaching**, Derby, v. 186, n. 1, p. 10-13, 2004.

GADANIDIS, G. Designing an online learning platform from scratch. In: C. Montgomerie & J. Seale (Eds.), **Proceedings of World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications**. Chesapeake, VA: AACE, 2007. p. 1642-1647.

GADANIDIS, G.; HOOGLAND, C. Mathematics teacher education online. In P. Barker & S. Rebelsky (Eds.), **Proceedings of World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications 2002**. Chesapeake, VA: AACE, 2002. p. 556-561.

GADANIDIS, G.; HOOGLAND, C. The aesthetic in mathematics as story. **Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education**, Toronto, v. 3, n. 4, p. 487-498, 2003.

GADANIDIS, G.; NAMUKASA, I. Math therapy. In: Proceedings of *ICMI STUDY: THE PROFESSIONAL EDUCATION AND DEVELOPMENT OF TEACHERS OF MATHEMATICS*. THE INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION (ICMI), 15., 2005. State University of Sao Paulo at Rio Claro, Brazil,

2005. p. 15-21 Disponível em: [http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/Namukasa\\_Immaculate\\_ICMI15\\_prop.doc](http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/Namukasa_Immaculate_ICMI15_prop.doc) Acesso em: 31 jan. 2007. Ver também: <http://joyofx.com/matherapy/>

GADANIDIS, G.; NAMUKASA, I. Mathematics-for-teachers (and students). **Journal of Teaching and Learning**, Ontario, v. 5, n. 1, 2007. Disponível em: <http://ojs.uwindsor.ca/ojs/leddy/index.php/JTL/issue/view/56> Acesso em: 31 mar. 2007.

GADANIDIS, G.; RICH, S. From large lectures to online modules and discussion: issues in the development of online teacher education. **The Technology Source**, July/August, 2003. Disponível em: [http://technologysource.org/article/from\\_large\\_lectures\\_to\\_online\\_modules\\_and\\_discussion/](http://technologysource.org/article/from_large_lectures_to_online_modules_and_discussion/) Acesso em 31 jan. 2007.

HENDERSON, D. W. **Experiencing geometry in euclidian, spherical, and hyperbolic spaces**. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.

HENDERSON, D.W.; TAIMINA, D. Experiencing meanings in geometry. In: SINCLAIR, N.; PIMM, D.; HIGGINSON, W. (Ed.) **Mathematics and the aesthetic: modern approaches to an ancient affinity**. New York: Springer-Verlag, 2006. p. 58-83.

HUGHES, J. **On poetry**. 2006. <http://faculty.uoit.ca/hughes/research.htm>

JONASSEN, D. H. **Computers as mindtools for schools: engaging critical thinking**. 2<sup>nd</sup> ed. Upper Saddle River, NJ: Merrill, Prentice-Hall, 2000.

KRESS, G.; VAN LEEUWEN, T. **Multimodal discourse: the modes and media of contemporary communication**. New York: Oxford University Press, 2001.

MCGOWEN, M. A.; DAVIS, G. E. What mathematics knowledge do pre-service elementary teachers value and remember? In R. Speiser, C.A. Maher, & C.N. Walter (eds.). **Proceedings of the XXIII Annual Meeting, North American Chapter of International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Snowbird, Utah, 2001. p. 875-884.

PEACOCK, M. **How to read a poem... and start a poetry circle**. Toronto: McClelland and Stewart, 1999.

SKOTT, J. The multiple motives of teaching activity and the role of the teacher's school mathematical images. In: 22nd Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1999, Haifa - Israel. **Proceedings of the 22nd Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME 22)**. Haifa - Israel: Psychology of Mathematics Education, 1999. v. 4, p. 209-216.

**Aprovado em janeiro de 2008**  
**Submetido em junho de 2007**

# ZETETIKÉ

Volume 15 ! Número 28 " Julho/Dezembro de 2007

