Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem[1]

Semiotic representation in Mathematics: history, epistemology, learning

Cláudia Regina Flores[2]

Resumo

A partir dos estudos de Raymond Duval, a questão do papel dos registros de representação semiótica para a aprendizagem matemática tem sido foco de pesquisas, em educação matemática. Não há dúvida de que os registros de representação semiótica são essenciais tanto para a criação de objetos matemáticos como para a sua apreensão. A questão neste artigo é, então, trazer algumas reflexões sobre o modo de pensamento que fundamenta esta hipótese. Como a idéia de representação, particularmente de representação semiótica, se constituiu como o modelo para aquisição do conhecimento dentro de um regime de pensamento? Pode-se afirmar que o estudo sobre os registros de representação semiótica, empreendido por Duval, tem como base o pensamento moderno: um sujeito cognoscente, um objeto cognoscível e uma teoria dual dos signos. Esta análise se faz importante por possibilitar reflexões profundas, particularmente, na formação de professores de matemática, acerca das teorias de aprendizagem que se pratica, bem como da própria constituição dos saberes que se ensina em matemática.

Palavras-chave: Representação. Semiótica. História da Matemática. Educação Matemática.

Abstract

Since the works of Raymond Duval, the question regarding the role of records of semiotic representation in the learning of Mathematics has been an object of research. There is no doubt that records of semiotic representation are essential for the creation of mathematical objects, as well as for the learning of Mathematics. The subject of this text is, therefore, to offer some reflections on the way of thinking which gives foundation to this hypothesis. How did the idea of representation, particularly semiotic representation, become the model for the acquisition of knowledge within a specific line of thought? It can be said that the representation records theory, elaborated by Duval, for the learning of Mathematics, has modern thought as a base: a cognoscenti subject, a cognoscible object and a dual theory of signs. This analysis becomes particularly important for making possible a deeper reflection, especially in the education of Mathematics teachers, in regard to the learning theories which are employed, as well as the formation of the knowledge which is taught in Mathematics.

Key words: Representation. Semiotics. History of Mathematics. Mathematics Education.

Introdução

Recentemente foi publicada no Brasil uma coletânea de artigos que relatam pesquisas brasileiras sobre a aprendizagem em matemática, e que se apóiam na teoria dos registros de representação semiótica elaborada por Raymond Duval[3]. Esta coletânea,

[1] Este trabalho teve o apoio do CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.
[2] Professora do Colégio de Aplicação – CED/ UFSC e do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica- PPGECT – CFM/CED/UFSC. Endereço para correspondências: Rua Servirdão Laje de Pedra, 171. Itacorubi, Florianópolis, SC, Brasil. CEP 88034-605. crf@mbox1.ufsc.br.
[3] Raymond Duval é filósofo e psicólogo de formação. Desenvolveu estudos em Psicologia Cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (Irem) de Estrasburgo, na França, no período de 1970 a 1999. Atualmente é professor emérito na Université du Littoral Cote d´Opale, França.

organizada por Machado (2003), teve o objetivo de mostrar a importância de se considerar essa teoria para o estudo da complexidade da aprendizagem em matemática.

Em particular, no primeiro capítulo dessa coletânea, Duval (2003b) destaca a importância e a necessidade de um ensino pautado nos registros de representação semiótica para a aprendizagem em matemática. Isso porque um trabalho pedagógico, realizado a partir destes registros, possibilita um real funcionamento cognitivo do aluno, uma vez que o objetivo do ensino é a aquisição do conhecimento por parte do aluno.

Ainda, a partir deste mesmo tema, um Colóquio de Didática da Matemática foi realizado na França, em 2002, em homenagem a Raymond Duval e François Pluvinage. Para contribuir com a homenagem a Duval, muitos trabalhos apresentados neste Colóquio tinham o objetivo de relatar os processos de ensino/aprendizagem em matemática, destacando a importância do aspecto dos registros de representação semiótica.

No Colóquio, Duval (2003a) apresentou e publicou um texto intitulado “Descrever, visualizar ou raciocinar: quais ´aprendizagens primeiras` da atividade matemática?”. Uma vez mais, ele nos mostrou a especificidade do pensamento em matemática e, portanto, da aprendizagem em matemática, ou seja, as representações semióticas como acesso aos objetos matemáticos. Assim, descrever, raciocinar e visualizar em matemática são atividades que estão intrinsecamente ligadas à utilização de registros de representação semiótica.

Se a teoria de Raymond Duval tem sido cada vez mais aprofundada e, ao mesmo tempo, as pesquisas em educação matemática encontram aí um respaldo para o estudo da complexidade da aprendizagem em matemática, então, a questão que proponho é a seguinte: como a articulação desta teoria foi possível, e porque ela tem sido tão aceita pelos pesquisadores em educação matemática? Isto implica a compreensão das bases sobre as quais esta teoria está fundamentada. Assim, a questão proposta pode ser redimensionada: como a idéia de representação, particularmente de representação semiótica, constituiu-se como o modelo para a aquisição do conhecimento dentro de um regime de saber que é dado na ordem da representação? Porém, antes de tudo, é importante conhecer as principais idéias sobre os registros de representação semiótica para a aprendizagem em matemática.

O interesse de Duval[4] está, principalmente, no funcionamento cognitivo do aluno. Para ele, o pensamento é ligado às operações semióticas e, consequentemente, não haverá compreensão possível sem o recurso às representações semióticas. Não obstante, as representações no domínio da matemática são consideráveis, já que os objetos matemáticos, não sendo acessíveis pela percepção, só podem sê-lo por sua representação, lembrando que um mesmo objeto matemático poderá ter representações diferentes, dependendo da necessidade e do uso. Para o caso do objeto matemático, a função, por exemplo, pode-se ter um registro de representação lingüística (função linear), um registro de representação simbólica ($y = x$ ou $f(x) = x$), ou ainda, um registro de representação gráfica (o desenho do gráfico da função).

A contribuição de Duval para o processo de ensino/aprendizagem em matemática está em apontar a restrição de se usar um único registro semiótico para representar um mesmo objeto matemático. Isso porque uma única via não garante a compreensão, ou seja, a aprendizagem em matemática. Permanecer num único registro de representação significa tomar a representação como sendo de fato o objeto matemático – por exemplo, $f(x) = x$ seria a função, e não uma representação do objeto matemático. Logo, para não confundir o objeto e o conteúdo de sua representação é necessário dispor de, ao menos, duas representações, de modo que estas duas devam ser percebidas como representando o mesmo objeto. Além disso, é preciso que o estudante seja capaz de converter, de transitar entre uma e outra representação.

Enfim, levar em conta a existência de muitos registros de representação, bem como, as atividades de conversão entre os registros, são, para Duval, imprescindíveis para a compreensão dos objetos matemáticos no ensino da matemática. É isto que possibilitará a diferenciação entre o objeto e sua representação.

Então, de um lado, percebe-se que este estudo de Duval, sobre os registros de representação semiótica para a aprendizagem em matemática, mostra-se como um importante instrumento de pesquisa, já que possibilita uma análise das complexidades da aprendizagem em matemática. Mas, por outro lado, a base teórica de Duval nos leva a outras reflexões que não se referem propriamente ao aspecto cognitivo do aluno. O que quero dizer é que ela nos faz pensar sobre o papel primordial, o funcionamento e a constituição de um sistema de representação que rege a construção dos saberes.

[4] Leia-se Duval (1988a, 1988b, 1993, 1995, 1998a, 1998b, 2003a, 2003b).

Neste sentido, vale refletir aqui como a idéia de representação, particularmente de representação semiótica, se fez como o modelo para a aquisição do conhecimento. Significa, portanto, compreender a criação, ou a emergência deste modo de conhecer. A base do estudo de Duval, sobre os registros de representação semiótica para a aprendizagem em matemática, tem como fundamento o pensamento moderno: um sujeito cognoscente, um objeto cognoscível e uma teoria dual dos signos.

Para tanto, este artigo se concentra nas seções seguintes: primeiramente, sob o título *A duplicidade das coisas*, trago reflexões sobre a instauração da representação enquanto regime de pensamento que dá as coisas os seus duplos, ou seja, sobre o fundamento de uma relação binária do signo, uma ligação entre aquilo que ele significa (o significado) e aquilo a que ele se refere (o objeto). Em seguida, sob o título *O sistema de Representação ou Conhecer*, discorro sobre a questão da dicotomia entre sujeito cognoscente e objeto cognoscível, sobre a distinção entre o objeto e sua representação, definindo os componentes de um novo modo de conhecer que é dado pelo sistema de representação. Por último, sob o título *A Representação Semiótica ou Representar*, analiso, particularmente, os registros de representação semiótica produzidos por um sistema semiótico, ou seja, a partir de regras, convenções, códigos, essenciais para as atividades do pensamento.

Enfim, considerando que a compreensão de tais fundamentos pode contribuir para a formação, tanto inicial, como continuada, do professor de matemática, imprimo as conclusões deste estudo. Opondo-se a uma formação docente centrada na racionalidade técnica, e focando-se no desenvolvimento da relação do professor com o saber matemático, é que reflexões históricas e epistemológicas tanto dos saberes matemáticos, como das teorias de aprendizagem que usamos, poderão agregar-se às discussões dos “novos caminhos com outros olhares” (FIORENTINI, 2003) na formação de professores de matemática.

A duplicidade das coisas

Durante a Antigüidade e Idade Média, a matemática era escrita de maneira quase que inteiramente retórica, como pode ser observado em Diophante, Leonardo de Pisa ou Luca Pacioli, por exemplo. Empregava-se uma metodologia híbrida, ou seja, uma mistura de geometria e retórica, cujos procedimentos geométricos eram a única via de resolução. Se havia o uso de símbolos, entremeando a escrita, eles eram de característica individual, ou seja, criados momentaneamente para a elaboração rápida de um texto, sendo de compreensão exclusiva para aquele que os criara.

A aritmética, o cálculo, era uma forma de geometria métrica. Isso significa que "Para os gregos, uma variável correspondia ao comprimento de um segmento, o produto de duas variáveis à área de algum retângulo e o produto de três variáveis ao volume de algum paralelepípedo retângulo" (EVES, 1997, p.384). Neste caso, as "[...] figuras geométricas eram consideradas como genéricas, e não havia aí representação de números 'quaisquer`" (SERFATI, 1997, p.139). Pode-se mesmo dizer que não havia nenhum sistema geral de representação, uma vez que nada foi publicado nesta época, pelo menos até meados do século XVII, que permitisse uma análise geral do uso de representações em matemática (SERFATI, 1997, p.139).

No sistema matemático antigo vê-se, portanto, que a geometria não fornecia apenas uma notação à aritmética, mas que as figuras geométricas eram consideradas como sendo, de fato, os próprios números. Ou seja, "As proposições aritméticas eram formuladas em termos de segmentos de reta, não porque seja essa forma como os números são representados, mas porque isso é o que eles são" (GAUKROGER, 2002, p.222).

O que vale observar, então, é que se concebe o número com estatutos diferentes, grandezas conhecidas ou desconhecidas com gêneros diferentes, de modo que cada qual possui uma "marca distintiva": as grandezas - quadradas, as grandezas – cúbicas... "Todas estas grandezas são designadas por símbolos diferentes e sem uma verdadeira relação lógica entre elas" (SERFATI, 1987, p.311).

Enfim, o que quero trazer à reflexão é que o sistema de signos até meados do Renascimento ocidental era imerso no "jogo da semelhança", como diz Foucault (1992). Isso significa que o signo, a visibilidade do signo, está na própria coisa, não havendo nada de oculto. Portanto, a relação do signo com seu conteúdo era assegurada na ordem das próprias coisas. De modo que a operação de representação era baseada na imitação, mantendo uma correspondência analógica com o mundo estável preexistente.

Nessa concepção epistemológica, as coisas trazem consigo sua própria marca e, além disso, cada uma se aparelha com a outra na medida em que se relacionam. Daí, o número, por exemplo, pode ser uma grandeza quadrada, ou um segmento de reta, ou ainda, uma grandeza não conhecida, cada qual trazendo consigo sua própria marca, em analogia com o mundo natural – as formas geométricas estão na natureza, assim como os números. Tudo tem sua finalidade na natureza. Logo tudo se aproxima e se enrola sobre si mesmo.

Contudo, no começo do século XVII, o pensamento cessa de se mover no elemento da semelhança, diz Foucault (1992, p.66). Se antes o saber se dava pelo semelhante, que era a da imitação do mundo real, e que fora durante muito tempo categoria fundamental do saber no que diz respeito à forma e ao conteúdo do conhecimento, no limiar da Idade Clássica, é fundado o projeto de uma ciência geral da ordem, na qual a teoria dos signos passa a ser analisada em termos de representação. Ou seja, no final do Renascimento, no limiar do período clássico, a questão da representação é instaurada enquanto conceito, passando a reger toda a teoria do conhecimento ocidental.

De fato, com o Renascimento, abre-se a era em que o homem considerado como sujeito do conhecimento coloca em oposição fé e razão. O homem passa a ser o responsável pelo conhecimento do mundo em que ele vive e pelo conhecimento dele mesmo. Assim, ele ordena e classifica todo o tipo de conhecimento, ou seja, a política, a economia, as línguas, os seres vivos, o que implica na representação dos objetos do conhecimento e, portanto, na problematização da representação enquanto expressão iconográfica da relação entre o sujeito do conhecimento e o objeto dado a conhecer, criando princípios da representação sob o aspecto de fundamento teórico, epistemológico (FLORES, 2003).

Segundo Crosby (1999), um novo modelo de pensamento, embora em caráter experimental, era instaurado no fim da Idade Média e início do Renascimento. Para esse autor, este modelo que surge "[...] distinguia-se por sua ênfase crescente na precisão, na quantificação dos fenômenos físicos e na matemática" (CROSBY, 1999, p.65). Assim, a busca pela matematização do empírico teria impulsionado uma nova forma de ver e de conhecer o mundo, de se relacionar com este mundo e, portanto, de representá-lo.

Porém, para Foucault (1992), nem esta tentativa de matematizar a natureza, tampouco as investidas de um mecanicismo fundamentam o modo de pensamento da Idade Clássica. Mas sim, a relação que todo o saber clássico mantém com a *máthêsis*, esta entendida como ciência universal da medida e da ordem. Então, essa "[...] relação de todo conhecimento com a *máthêsis* se oferece como a possibilidade de estabelecer entre as coisas, mesmo não–mensuráveis, uma sucessão ordenada" (FOUCAULT, 1992, p. 72). Isto se faz importante, uma vez que a colocação em ordem das coisas se dá, agora, por meio dos signos, quer dizer, não mais pelo que é semelhante, mas por intermédio da identidade e da diferença. O signo assume, então, um papel diferente daquele que ele tinha nas épocas anteriores.

A pintura e o mapa são considerados como exemplos primeiros de um signo. Um signo que passa a estabelecer uma relação binária, pois ele dá a ver aquilo que não está presente aos olhos. Portanto, signo é um objeto que representa um outro objeto. Assim, da mesma forma que acontece com a pintura de uma cena, de um retrato, o mapa manifesta uma verdadeira relação entre a coisa e sua representação, a tal ponto que nos leva a pensar que um mapa é a cidade, o país ou o globo. Donde, “A partir da idade clássica, o signo é a *representatividade* da representação enquanto ela é *representável*” (FOUCAULT, 1992, p.80 – grifo do autor).

Ora, tudo isto teve grandes conseqüências para o pensamento ocidental, analisa Foucault. Uma delas está justamente na importância dada aos signos. Enquanto antes eles eram apenas “[...] meios de conhecer e chaves para um saber; são agora co-extensivos à representação, isto é, ao pensamento inteiro” (FOUCAULT, 1992, p.80). Isso quer dizer que, ao contrário de antes em que o signo era dado na própria coisa, agora ele assume uma relação binária, uma ligação entre aquilo que ele significa (o significado) e aquilo a que ele se refere (o referente, o objeto). Neste caso, “A relação do significante com o significado se aloja agora num espaço onde nenhuma figura intermediária assegura mais seu encontro: ela é, no interior do conhecimento, o liame estabelecido entre a idéia de uma coisa e a idéia de uma outra.” (FOUCAULT, 1992, p.79).

Uma outra conseqüência é “[...] a extensão universal do signo no campo da representação” (FOUCAULT, 1992, p.81). Isso significa que não há sentido ao signo em termos de uma teoria da significação. Logo, os signos não têm outras leis senão aquelas que podem reger seu conteúdo, o que implica numa teoria geral e universal dos signos enquanto projeto que assegura a ordem no pensamento. É este sistema de signos que “[...] aproxima todo saber de uma linguagem e busca substituir todas as línguas por um sistema de símbolos artificiais e de operações de natureza lógica.” (FOUCAULT, 1992, p.78).

E, por fim, uma conseqüência que, segundo Foucault (1992), é a que se estende até nós, a saber, a teoria binária do signo. Neste caso, tem-se desde o século XVII o fundamento de uma ciência geral do signo, de uma semiologia, na qual o signo é considerado como pura ligação de um significante com um significado. Será esta, enfim, a condição básica para pensar a natureza binária do signo e que tornou possível o conjunto da *epistémê* clássica.

Em se tratando da matemática, Serfati (1997) demonstra como o fundamento de uma nova linguagem, ou seja, de uma escritura simbólica para representar cálculos, aliás, ainda hoje em vigor, é instaurado por Viète e Descartes, no fim do século XVI e início do século XVII.

Com a divulgação da *Geometria* de Descartes, em 1637, via-se um sistema de escritura que apresentava mecanismos inteiramente novos, em detrimento das escrituras retóricas, anteriores à matemática grega e medieval. Tem-se, portanto,

> [...] a passagem histórica progressiva entre uma escritura "grega" das matemáticas, puramente retórica, quer dizer, inscrita na língua comum, onde tudo se diz e se calcula em palavras, a uma escritura simbólica onde o texto é quase reduzido a uma concatenação de signos (letras, números, ou signos figurados), que é preciso de início decifrá-los, depois interpretar segundo regras sintáxicas e semânticas prescritas. (SERFATI, 1997, p. 5).

No entanto, segundo Serfati (1997), antes mesmo de Descartes, ou seja, com François Viète, no fim do século XVI, já se via um primeiro sistema de signos, unicamente constituído de letras, que revolucionava os princípios anteriores de aquisição de conhecimento, até então inatingíveis, da matemática e das ciências. Neste sistema, Viète "[...] introduziu a prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes." (EVES, 1997, p.309). Assim sendo, a escritura e o cálculo se reorganizavam em torno de uma convenção universal de interpretação, o que antes era em torno da geometria unida à retórica.

Mas, se Viète revolucionou de alguma maneira o modo antigo de pensar a matemática, é realmente com Descartes - já que Viète ainda oscilava entre a retórica e a simbologia - que ocorre uma verdadeira função da representação simbólica, logo, uma separação entre o registro simbólico e aquele das significações. Assim a letra "a", por exemplo, não é mais considerada como uma grandeza particular, mas o signo que representa a grandeza.

Esta exigência de Descartes para com a distinção entre significante e significado leva o pensamento matemático à função de abstração. Enquanto antes, para os matemáticos antigos, era suficiente descobrir o resultado, não importando a forma de apreensão requerida, agora, com Descartes, será mediante um tipo de apreensão que o saber matemático consistirá.

Enfim, com a invenção do simbolismo matemático de Viète, e mais particularmente de Descartes, uma primeira versão de escritura simbólica em matemática é apresentada, dando ordem à matemática e ao pensamento matemático. Daí, o surgimento da duplicação dos objetos matemáticos enquanto objetos do pensamento e objetos representados.

Contudo, havia ainda uma ligação estreita entre estes dois registros. Os únicos movimentos do pensamento reconhecidos como legítimos davam-se no sentido do registro das significações em direção ao registro simbólico, ou melhor, dos objetos do conhecimento científico aos conteúdos das representações do sujeito. Será somente com Leibniz que ocorrerá uma real abstração do objeto. Isso porque Leibniz "[...] foi o primeiro a compreender o extraordinário poder (do simbólico) e desenvolver aí, num registro verdadeiramente moderno, aplicações propriamente inconcebíveis por seus dois antecessores." (SERFATI, 1997, p. 373).

De fato, a nova linguagem algébrica levou a uma formalização das operações aritméticas, permitindo mesmo o desenvolvimento de teorias puramente algorítmicas, donde as teorias algébricas são consideradas como realizações particulares do método algorítmico. A título de exemplo, tomemos o caso da adição aritmética discutida por Ladrière (1977, p.53),

> Podemos adicionar dois números "intuitivamente", apoiando-nos no sentido intuitivo da operação de adição e na apreensão direta dos números considerados. Mas, podemos também praticar a adição pelo dispositivo do símbolo, de modo puramente mecânico, à maneira de uma máquina de calcular, isto é seguindo regras. Chegamos então a um resultado, sem termos necessidade de refletir sobre o sentido das operações que efetuamos; basta-nos proceder de maneira materialmente conforme as estipulações impostas.

Portanto, de posse da nova linguagem simbólica e das regras de cálculos, pode-se fazer qualquer tipo de cálculo, mesmo aqueles que antes não eram realizados. Foi isto que possibilitou a Leibniz, em 1676, a criar o método de cálculo infinitesimal, definindo, desta forma, as operações de integração e derivação. Daí, o desenvolvimento da matemática pura, que permitiu a construção, por exemplo, do edifício da teoria das funções, como também da geometria diferencial. Criam-se, enfim, novos símbolos, novas técnicas, novas formas de representação. As coisas se reduplicam, portanto.

Como diz Foucault (1992, p.72), a relação com todo o conhecimento era dada dentro de uma ciência da ordem e da verdade, então, "[...] o projeto leibniziano de estabelecer uma matemática das ordens qualitativas se acha no coração mesmo do pensamento clássico." Portanto, dentro desta nova forma de se relacionar com o mundo, com as coisas do mundo, consigo mesmo, dentro deste novo regime pautado pela relação da ordem e da medida, é que foi possível o cálculo até mesmo das coisas incomensuráveis.

Enfim, um novo regime de saber se configura; um regime que é dado na ordem da representação. Foi isto que assegurou a fundação de um tipo de representação, de uma ciência algébrica, autônoma, moderna. A nova forma de conhecer, ou seja, a forma baseada na dissociação do signo e da semelhança, tornou, então, possível essas individualidades de pensamento como os de Viète, Descartes, Leibniz.

O sistema de Representação ou Conhecer

Para falar de representação no contexto da teoria do conhecimento, um artigo intitulado *Representação e Conhecimento*, publicado na *Encyclopaedia Universalis* sob a autoria de Jean Ladrière (1985), explora a questão, trazendo à baila a idéia de que a concepção do conhecimento é associada à representação. Isso quer dizer que representação é um modelo para a atividade do conhecimento, concepção que está no fundamento da ciência moderna.

A idéia de representação, discutida por Ladrière no artigo mencionado acima, apóia-se na dupla metáfora do teatro e da diplomacia. Então, de um lado, a representação teatral sugerindo a presença concreta de algo mediante uma situação significante. E, de outro, a representação diplomática sugerindo a transferência de atribuições, já que o objeto real não pode de fato estar presente - uma pessoa pode agir em nome e em lugar de uma outra, por exemplo.

Esta dupla faceta da representação exerce um papel essencial na aquisição dos conhecimentos. Isso porque para conhecer é preciso ter acesso aos objetos do conhecimento – problema fundamental da aquisição do conhecimento. Logo, a representação será o modo pelo qual se torna possível a visibilidade, a transparência e, assim, a ordenação dos objetos do conhecimento. A representação como suporte que possibilita a mediação entre dois pólos: o do sujeito e o do objeto.

O sujeito do conhecimento será, então, a instância para a qual há representação. Com o surgimento do homem ativo da modernidade em oposição ao homem contemplativo medieval, o homem passa a assumir uma postura de conhecedor da natureza, dos objetos da natureza e de si mesmo. Neste caso, será mediante a “luz natural da razão”, ou seja, a cognição guiada pelo intelecto, segundo Descartes, que será possível ocorrer o conhecimento. Esta condição irá desembocar, mais tarde, na filosofia kantiana para a qual a razão é a fonte única do conhecimento.

Logo, se o homem não é mais subordinado nem ao determinismo da natureza, nem às leis de Deus, mas à sua própria razão, ele tem a capacidade de julgar, criar uma ética e uma estética, ou seja, julgar o que é certo, o que é bom e o que é belo. Ele é dotado de um juízo crítico. Isso significa que o homem passou a ser livre, uma vez que, “Ser livre (...) é ser capaz de obedecer à razão.” (PASCAL, 1985, p.137). Enfim, Kant outorgou ao homem uma responsabilidade total; ele passou a ser livre, autônomo e responsável por seus atos. Ele é o sujeito do conhecimento.

Para a teoria do conhecimento, esta é uma posição idealista que dá ao sujeito a prioridade ao conhecimento. Portanto, não mais uma posição empírica na qual o conhecimento está nas coisas, mas uma posição que assume um papel duplo de empírico e de transcendente. Isso se configura no idealismo transcendental de Kant, que estabelece que só é possível conhecer as coisas pela subjetividade, quer dizer, pela razão, mesmo que esta seja mediada pela experiência. O conhecimento está, portanto, nas nossas representações mentais. Logo, o sistema de representação tem como fundamento a razão.

Quanto ao objeto, este é o conteúdo apreendido, ou seja, é a realidade (interna ou externa ao sujeito) enquanto realidade conhecida. Mas, para que se tenha conhecimento é preciso que o objeto do conhecimento esteja em presença do sujeito do conhecimento, que ele seja dado a conhecer, porém, como o objeto real não pode de fato estar presente, é necessário uma mediação. Daí o problema do conhecimento: como ter acesso aos objetos do conhecimento? É mediante a representação que se dá o conhecimento.

Se um objeto do conhecimento só pode ser apreendido mediante uma representação, o que é então um objeto? E, particularmente, o que nos interessa aqui, o que é um objeto matemático?

Para debater esta questão, tomemos a pesquisa de Lefebvre (2001), que teve por objetivo analisar como as práticas gráficas de matemáticos serviam de espaço de mediação para a comunicação e para a produção de conhecimentos matemáticos. Os matemáticos entrevistados nesta pesquisa foram confrontados com a questão “O que é um objeto matemático?”. Segundo Lefebvre, as respostas dadas estão em conformidade com as práticas destes matemáticos, ou seja, eles relataram basicamente duas concepções de objeto matemático: o platonismo e o formalismo. Então,

> Os matemáticos platônicos definem os objetos matemáticos como entidades ideais que existiriam independentemente do espírito humano. Para os formalistas, a matemática é definida como a ciência da dedução formal, dos axiomas aos teoremas. Seus enunciados só têm conteúdo quando é fornecida uma interpretação. Para os mais radicais dentre eles, a matemática se resume em um *jogo de linguagem* sem relação com os “objetos” materiais (LEFEBVRE, 2001, p.154).

Ora, a noção de objeto matemático nos parece um tanto irresoluta. Porém, o que se percebe, a partir das análises de Lefebvre, é que os objetos matemáticos são considerados, na maioria das vezes, como objetos ideais, por exemplo, números, conjuntos, estruturas algébricas, espaços...

Vejamos agora, a fala do seguinte matemático entrevistado na pesquisa de Lefebvre (2001, p.154):

> Ca: Tem-se um objeto complexo. Escolhe-se um modo de representação. O modo de representação é mais facilmente manipulável que o objeto, portanto faz-se 3 etapas. Toma-se o objeto, representa-o, trabalha-se sobre a representação, e volta-se ao objeto. É uma passagem em 3 etapas, que é muito mais fácil de analisar que a passagem direta.

Notemos que, ao menos, a distinção entre o objeto matemático e sua representação é um fato resolvido. Ora, definir com precisão o que é um objeto matemático não é mesmo tarefa simples. Conforme explica Lefebvre, o termo objeto envolve três dimensões: a do objeto material (uma representação); a conceitual (o conceito); e de uma "idealidade matemática" (a entidade). Por exemplo,

> [...] o conceito de "círculo", (...), pode ser resumido "por uma curva fechada na qual todos os pontos estão situados a uma distância igual a um ponto interior chamado centro." A entidade matemática é, para o filósofo Desanti, "o que está apreendido pela consciência na forma de unidade"[5]. Enfim, as representações de um círculo são múltiplas, elas podem ser simbólica (sob a forma, por exemplo, de uma equação: $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x^2+y^2= 1\}$), lingüística (a palavra "círculo") ou, ainda, visual (desenho de um círculo), por exemplo (LEFEBVRE, 2001, p.155).

O interessante nisto é ver como a apreensão do objeto matemático passa, necessariamente, por intermédio de suas representações. Então, conhecer o objeto só é possível, como já foi dito, mediante a sua materialização; é preciso que ele seja dado ao conhecimento, ou melhor, ao sujeito do conhecimento.

Enfim, se é mediante a representação do objeto do conhecimento que se pode apreendê-lo, é preciso, desta forma, pensar sobre aquilo que objetiva esta representação, ou melhor, sobre a parte material da representação - os signos.

De um modo geral, pode-se dizer que um signo é uma entidade que designa ou representa outra entidade - que pode ser um objeto ideal, concreto ou mesmo outro signo. Em outros termos, pode-se dizer que um signo representa algo para alguém. Ora, se a matemática, assim como a lógica, é considerada uma ciência formal, então é preciso entender o que é um signo nas ciências formais. Segundo Ladrière (1977, p.20-21),

---

[5] Desanti (1968, p.85).

> O termo signo toma aqui uma significação extremamente limitada: os signos de que nos ocuparemos são simplesmente símbolos, no sentido restrito do termo. (...), são aqueles da lógica e das matemáticas, isto é, símbolos formais. Um símbolo formal é uma unidade elementar pertencente ao vocabulário de uma linguagem artificial completamente formalizada [...].

Assim, um sinal de mais "+", os sinais de associação "{ }", um ponto geométrico "**.**", um par ordenado de inteiros "(a, b)"... são exemplos de unidades elementares, ou seja, de símbolos formais. Os símbolos formais (os signos) têm por função tornar acessíveis os sistemas formais do pensamento matemático. Assim, os símbolos têm um caráter totalmente contingente e convencional. Por si mesmos, os símbolos não nos fazem ver aquilo que eles representam. Eles só se relacionam com o objeto matemático por força de uma idéia, de uma lei, cujo efeito consiste em fazer interpretar o símbolo como referente a um dado objeto.

Para Peirce (2000), um símbolo é um signo arbitrário cuja ligação com o objeto é fruto de uma convenção, portanto, um signo convencional ou signo que depende de um hábito nato ou adquirido. Então, diferentemente de um ícone (símbolo que está ligado àquilo que representa através de alguma similaridade), ou de um índice (símbolo que está ligado àquilo que representa por conexão causal, factual, física, concreta), a ligação entre o símbolo e seu objeto dá-se por mediação, isto é, por associação de idéias, de modo a fazer com que o símbolo seja interpretado como se referindo aquele objeto. Essa associação de idéias é um hábito ou lei adquirida que fará com que o símbolo seja tomado como representativo de algo diferente dele.

Assim sendo, "estrela", "cachorro", enfim, qualquer palavra comum, pode ser exemplo de um símbolo, na medida em que um símbolo pode ser aplicado a tudo aquilo que possa concretizar a idéia relacionada com a palavra. Isto quer dizer que o símbolo não mostra as coisas às quais se refere ou se aplica, mas permite imaginar seu referente por intermédio de uma imagem. Para o caso da estrela, por exemplo, o símbolo "estrela" não nos faz ver uma estrela no céu, mas nos permite imaginar uma estrela, tendo a ela associado a palavra.

Em matemática tomemos, por exemplo, uma notação fornecida por Descartes. Assim, quando Descartes (1986[6], apud SERFATI, 1997, p.322), estabeleceu que escrever $2a^3$ é o mesmo que dizer "duas vezes a grandeza na qual entram três relações e que é designada pela letra *a*.", ele mostrou que escrever objetos matemáticos, mediante uma

---

[6] Descartes (1986).

escritura simbólica, não é o mesmo que designar a realidade das coisas como elas são de fato, mas somente indicar, designar, como se realmente fossem, quer dizer, anunciar aquilo a que se referem. O recurso às escrituras simbólicas é desejável na medida em que se trata de representar os objetos ideais.

Porém, no raciocínio algébrico, o símbolo utilizado não designa somente a grandeza, mas intervém de modo a assumir o lugar dela própria; na verdade, o símbolo age como um substituto da grandeza. Como diz Ladrière (1977, p.50), o símbolo é o "nome de um fantasma".

Ora, desta forma, o símbolo não é menos abstrato que o próprio objeto que simboliza. "O símbolo de que as línguas formais fazem uso é, aparentemente, simples indicação, lugar vazio de um objeto ausente, instrumento abstrato, separado do seu sentido" (LADRIÈRE, 1977, p.45). Ele não representa mais que convenções de linguagem e de escrita. Daí o símbolo ser uma lei, uma convenção, uma linguagem, tanto quanto seu objeto e seu significado são leis.

Enfim, pode-se definir os componentes do sistema de representação: o sujeito do conhecimento, o objeto do conhecimento, e um suporte que permita a realização da representação, ou seja, um signo, um artifício, uma simbologia, uma expressão, uma palavra, um mapa... É sobre este sistema que se funda a teoria do conhecimento, o modo de conhecer ocidental.

A Representação Semiótica ou Representar

A base do pensamento matemático, durante a Antigüidade grega e Idade Média, era a da intuição geométrica, cuja retórica era a linguagem que se usava para demonstrar, explicar, representar o conhecimento. Já durante a Idade Clássica, uma nova forma de linguagem matemática, a escritura simbólica, ou seja, algébrica, possibilitou a fundação de um pensamento caracterizado como racional, organizado, moderno. A constituição desta nova forma de representar os objetos da matemática tornou possível um ponto de vista formal, portanto, um pensamento matemático permeado por uma linguagem convencional, formalizada. Quanto às figuras geométricas, estas ganharam um novo modo de representação a partir da instauração de uma nova forma de olhar e de representar o espaço, um espaço em perspectiva (FLORES, 2003).

O que se percebe, enfim, é que as representações tornaram-se centrais para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Se com Leibniz o registro da escritura simbólica tornou-se, para os matemáticos, o lugar da experiência (SERFATI, 1997), após ele, não será mais possível fazer matemática sem passar pelos registros de representação[7]. Isso significa que para a aquisição de conhecimentos se faz importante a criação e a diferenciação de registros de representação que se constituem dentro de sistemas semióticos: linguagem natural, sistemas de numeração, códigos iconográficos... Daí, muitos registros são inventados: registros de linguagem que vão desde a linguagem natural até aquelas do tipo formal; registros de imagens como as figuras geométricas, as representações gráficas, os esquemas. Portanto, registros de representação semiótica, já que são produzidos segundo um sistema semiótico, isto é, a partir de regras, convenções, códigos.

Como analisa Foucault (1992), o que mudou na primeira metade do século XVII foi o regime inteiro dos signos. Se antes, considerava-se que os signos tinham sido depositados sobre as coisas e ali aguardavam por aquele que viria reconhecê-los, agora, o signo só se constitui por um ato de conhecimento, ou seja, é no interior do conhecimento que o signo passa a significar. O signo ganha, portanto, uma importância sobre o modo de conhecer e, também, uma extensão universal no campo da representação. Não obstante, a teoria binária do signo que funda a ciência geral do signo, cuja base se dá na relação fundamental da pura ligação entre um significante (signo) com um significado (referência), está no fundamento do pensamento moderno. Daí, teorias semióticas são elaboradas e, em muitas delas, o signo passa a ser representado pela tríade seguinte (Fig. 1):

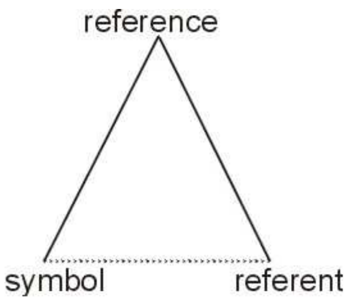

Figura 1: Tríade de Ogden e Richards

Trata-se do conhecido triângulo, difundido por Ogden e Richards[8] (1972, apud NETTO, 2001, ECO, 2001) que faz corresponder a cada *symbol* (signo ou significante) uma *reference* (conceito ou significado) e um *referent* (objeto).

[7] Ver por exemplo a pesquisa de LEFEBVRE (2001).
[8] OGDEN, C. K. e RICHARDS, I. A. *O significado de significado.* Rio de Janeiro: Zahar, 1972.

A relação entre as representações com seus referentes dá-se em termos de referência, ou seja, o que duas representações distintas de um mesmo objeto têm em comum é a referência. Por exemplo, ao analisar as problemáticas que possibilitaram as novas escrituras, ou seja, escrituras algébricas, em matemática, e as novas formas de representar as figuras geométricas, Bkouche (1988) levanta a questão de que duas representações distintas podem ser representações que fazem referência a um mesmo objeto matemático. Então, para duas formas de representação tais como uma reta desenhada sobre um sistema de eixos coordenados e uma relação do tipo $y = ax + b$, o que elas têm em comum não será um dado, mas, como demonstra Bkouche, uma construção historicamente datada, isto é, a invenção da geometria analítica por Descartes e Fermat.

O importante é ver que a abstração requerida, quando da relação entre representação e referência, permite apreender o objeto matemático independentemente da representação que se use. Este fato permitiu tanto a produção de novos registros de representações, a partir de regras dadas por um sistema semiótico, portanto, de representações semióticas, como também a elaboração da lógica matemática e da reflexão sobre os fundamentos da matemática.

Frege[9], ao elaborar os *Fundamentos da Aritmética*, proporcionou um acirrado debate sobre a natureza semântica da referência, ou seja, sobre a natureza semiótica das representações, bem como sobre a determinação do objeto como o invariante de referência de muitas representações[10]. Significa que Frege, ao reconhecer duas ou mais representações distintas fazendo referência a um mesmo objeto, definiu as representações não como representações subjetivas do sujeito, mas como sendo ligadas às possibilidades e às regras constitutivas de um sistema semiótico, portanto, à idéia de representação semiótica, como sendo a fusão da idéia de representação e de signo.

Quanto à referência, que é comum a duas ou mais representações, Frege estabeleceu uma distinção entre o sentido e a referência. “A referência e o sentido de um sinal devem ser distinguidos da representação associada a este sinal” (FREGE, 1978, p.64). Logo, as representações podem ter em comum a referência, mas não o sentido. “É, pois, plausível pensar que exista, unido a um sinal (nome, combinação de palavras, letra), além daquilo por ele designado, que pode ser chamado de sua referência, ainda o que eu gostaria

[9] Refere-se a Gottlob FREGE, 1848-1925, lógico e matemático alemão.
[10] Pode-se consultar, por exemplo, FREGE (1978).

de chamar o sentido do sinal, onde está contido o modo de apresentação do objeto" (FREGE, 1978, p.62).

Para compreendermos esta importante distinção entre o sentido e a referência, em matemática, tomemos o seguinte exemplo fornecido por Duval (1988a,p.8):

> [...] 4/2, (1+1), são formas escritas que designam um mesmo número, expressões que fazem referência a um mesmo objeto, e que não possuem a mesma significação uma vez que não são reveladoras do mesmo domínio de descrição ou do mesmo ponto de vista: a primeira exprime o número em função de propriedades de divisibilidade e razão, a segunda em função da recorrência à unidade [...]. Simples mudanças na escrita permitem exibir propriedades diferentes do mesmo objeto, mas mantendo a mesma referência.

A representação 4/2, assim como (1+1), tem como referente o numeral 2, o que significa o indicativo do número dois. Por sua vez, este objeto (numeral dois) refere-se ao número dois, ou seja, a entidade abstrata que corresponde a uma quantidade, grandeza, intensidade... , portanto, à referência da representação 4/2 e também da (1+1). Se há, então, no referente um substrato da referência, há também um sentido. No entanto, como foi dito, este sentido não será o mesmo para os dois modos de representação; ele vai depender da representação escolhida.

É justamente sobre a determinação da distinção entre sentido e referência que, segundo Duval (1998a), Frege forneceu uma resposta ao problema do conhecimento, ou seja, quanto à possibilidade do conhecimento – problema este que se coloca desde Kant – tanto num sentido epistemológico, como cognitivo. Isso porque mesmo que haja uma diversidade de representações semióticas para um mesmo objeto, cada uma destas representações é tomada sob um ponto de vista, por uma significação. O que implica num trabalho cognitivo do pensamento por parte do sujeito e, também, para a possibilidade de aquisição de novos conhecimentos.

É preciso, enfim, tecer algumas considerações acerca desta estruturação do sistema semiótico. Pode-se dizer que as representações semióticas "[...] são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento" (DUVAL, 1993, p.39). O importante é que estas representações semióticas não são, segundo Duval, somente para fins de comunicação, mas essenciais para as atividades cognitivas do pensamento.

Assim sendo, tem-se que para a elaboração de novos conhecimentos no âmbito científico, ou para a aquisição de conhecimentos, ou ainda, transportando o pensamento sobre a aprendizagem por parte do aluno, é preciso transitar pelas várias representações do mesmo objeto a fim de apreender o objeto. Ou seja, é preciso uma coordenação entre os registros de representação semiótica. Isso proporciona, igualmente, a não confusão entre o objeto representado com sua representação.

Para um trabalho cognitivo centrado sobre um determinado registro de representação semiótica há a mobilização de tratamentos específicos ao registro escolhido. Por exemplo, além das representações simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico...), pode-se recorrer às representações figurais. Neste caso, a operação de reconfiguração[11] é um tipo particular de tratamento para o registro figural. Assim sendo, é preciso preocupar-se com uma aprendizagem que leve em conta tal tratamento.

O fato de que duas representações distintas para um mesmo objeto têm cada uma delas sentidos diferentes, logo, tratamentos diferenciados, implica em um custo cognitivo também diferente. Somar dois números fracionários, por exemplo, não tem o mesmo custo cognitivo que somar os mesmos dois números em sua forma decimal. Como foi visto, tudo depende do sentido que se dá para cada uma das formas de apresentação do objeto matemático.

Trabalhos ligados à psicologia cognitiva sublinham, assim, a importância das representações semióticas na aprendizagem, dada à diversificação dos registros de representação e a exigência da distinção entre o objeto do conhecimento e sua representação. “A noção de representação semiótica pressupõe, portanto a conscientização de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico a um outro” (DUVAL, 1995, p.17).

Considerações Finais

No que se refere à formação de professores, seja inicial ou continuada, é comum encontrarmos análises que mostram que ela é debruçada tanto num cientificismo, como num tecnicismo. Isso quer dizer que o trabalho que é feito com os professores, na maioria das vezes, é pautado numa atitude na qual se espera que a ciência, em sua objetividade e positividade, possibilite o conhecimento das coisas como elas realmente são e que, por isso mesmo, poderemos conhecer a solução para todos os problemas ligados às dificuldades de ensinar e de aprender. Não obstante, o abuso na tecnicidade do ensino, a praticidade total e o desejo pela transparência das complexidades do processo ensino/aprendizagem levam ao

[11] A operação de reconfiguração é uma das operações que dá ao registro das figuras seu papel heurístico possibilitando uma educação para o olhar (FLORES-BOLDA, 1997).

desconforto que enfrentamos hoje: já não temos mais sentido, ou mesmo domínio algum sobre aquilo que ensinamos.

Se nossas práticas pedagógicas, nossas formas de ensinar, nossos modos de conceber o ensino, a aprendizagem, nossas maneiras de nos relacionarmos com os saberes que ensinamos são fundadas na cultura, nas tradições, significa que nossa concepção de ensino é atrelada ao que temos como concepção da própria construção e constituição dos conhecimentos. Vale, portanto, buscarmos compreender sobre a constituição tanto dos saberes que ensinamos, como das teorias que usamos no processo de ensino/aprendizagem.

Um dos objetivos do ensino é levar o aluno a construir sua própria relação com o saber que lhe é ensinado. Porém, antes de tudo, é preciso que o professor não só tome consciência da significação que ele mesmo dá ao saber que ensina, mas, sobretudo, que ele compreenda o que é o saber que é proposto ao ensino. Ou seja, é preciso retomar o sentido do saber. Se não é possível fazer matemática sem passar pelos registros de representação, como foi visto aqui, é preciso, então, saber como isso foi possível, como se constituiu esse método de representação, a epistemologia. Isso tudo, para retomarmos a significação do saber matemático que ensinamos.

Uma reflexão epistemológica, histórica[12], realizada com o professor, ou com o futuro professor, significa refletir sobre os fundamentos dos saberes, os jogos para a sua elaboração, as escolhas, os descartes. Isso para compreendermos as condições que legitimaram a atividade científica, ou seja, suas duas formas canônicas aplicadas ainda hoje: a forma lógico-matemática e a forma experimental. Para Bkouche (1997), é justamente esta reflexão epistemológica, histórica, tanto quanto a reflexão sobre a constituição do saber, que permite, antes de tudo, uma reflexão pedagógica. Desta forma, compreender os modos pelos quais nossa cultura pensou a construção dos saberes e os legitimou, significa pensar nos nossos modos de colocá-los em prática no âmbito escolar.

---

[12] Charlot (2002) afirma que professores de matemática, da França, que receberam uma formação em história da matemática mudaram significativamente suas práticas pedagógicas. No Brasil, a integração da história da matemática na formação de professores, embora carente de avaliações efetivas, dizem Baroni, Teixeira e Nobre (2004), é cada vez mais desejado. Isso porque se acredita que a história da matemática na formação de professores possibilitará o conhecimento da matemática do passado, uma melhor compreensão da própria matemática, e ainda, fornecerá métodos e técnicas de ensino, entre outros motivos. Contudo, vale remarcar que a discussão sobre o papel da história da matemática na formação de professores não é recente. Este fato vem sendo tratado, já algum tempo, em muitos dos encontros de Educação Matemática (MIGUEL; BRITO, 1996). O interessante nisso é ver que a discussão passa não, necessariamente, pela inclusão de uma disciplina de história de matemática, isolada das demais, no currículo de formação de professores, mas como dizem Miguel e Brito (1996), por uma participação orgânica no currículo. Isso significa dar aos conteúdos uma expressão de historicidade, ou melhor, fazer uso da história em sua forma de problematização com a cultura, a sociedade, a filosofia, as artes...

Enfim, daí meu retorno à história e à epistemologia para compreender os fundamentos do estudo dos registros de representação semiótica para a aprendizagem em matemática, desenvolvido por Raymond Duval. Logo, a questão da representação como modelização do conhecimento instaurada na Idade Clássica, que passa a reger toda a teoria do conhecimento ocidental; a definição de um sistema de representação que é fundado na razão e na dicotomia entre sujeito e objeto; a relação fundamental do signo com um significante e um significado, fundando a teoria binária dos signos e fazendo despontar estudos semióticos; sistemas semióticos de representação, criando uma diversidade de registros de representação, são os elementos que estão na base da teoria dos registros de representação semiótica, aplicada à aprendizagem matemática.

Não obstante, para Duval (1998a), o problema da aquisição dos conhecimentos no âmbito da história das ciências e da matemática está muito próximo daquele do individual, ou seja, da aprendizagem. Portanto, compreender o modo de elaboração dos conceitos matemáticos, implica em retomar sua significação, como também seus processos de aquisição e funcionamento.

Refletir, portanto, sobre o modo pelo qual se praticou e se legitimou um modelo de conhecimento, um modelo fundado num regime de representação, permite, enfim, de um lado compreender aquilo que fundamenta as teorias de aprendizagem, particularmente, aquela proposta por Duval. E, por outro lado, possibilita o acesso à história da matemática. Isto, enfim, para contribuir, pelo menos, com a atividade de formação de professores de matemática.

Referências

BARONI, R. L. S., TEIXEIRA, M. V.; NOBRE, S. R. A investigação científica em história da matemática e suas relações com o programa de pós-graduação em educação matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação matemática:** pesquisa em movimento**.** São Paulo: Editora Cortez, 2004. p. 164-185.

BKOUCHE, R. **Quelques grandes problématiques de l'histoire de la geometrie**. Lille: Irem de Lille, 1988.

__________. Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques. **The learning of mathematics,** v. 17, n. 1, p.1-16, 1997.

CHARLOT, B. Formação de professores: a pesquisa e a política educacional. In: PIMENTA, S. G.; GHEDIN, E. (Org.). **Professor reflexivo no Brasil:** gênese e crítica de um conceito. São Paulo: Cortez, 2002. p. 89-108.

CROSBY, A. W. **A mensuração da realidade:** a quantificação e a sociedade ocidental 1250-1600. Tradução de Vera Ribeiro. São Paulo: Editora Unesp/Cambridge, 1999.

DESANTI, J. T. Les idéalités mathématiques. Seuil, 1968.

DESCARTES. **Oeuvres.** Edition Adam et Tannery. Tome VI (pages 39/488) “Regulae ad directionem ingenii.” Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 1986.

DUVAL, R. Écarts sémantiques et cohérence mathématique. **Annales de didactique et de Sciences Cognitives**. Estrasburgo: Irem de Estrasburgo, v. 1, p. 7-25, 1988a.

_________. Graphiques et équations: l’articulation de deus registres. **Annales de Didatique et de Sciences Cognitives.** Estrasburgo: Irem de Estrasburgo, v. 1, p. 235-253, 1988b.

__________. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.** Estrasburgo: Irem de Estrasburgo, v. 5, p. 37-65, 1993.

__________. **Sémiosis et pensée humaine:** registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berna: Peter Lang, 1995.

__________. Signe et objet (I): trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**. Estrasburgo: Irem de Estrasburgo, v. 6, p. 139-163, 1998a.

___________. Signe et objet (II): questions relatives à l’analyse de la connaissance. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.** Estrasburgo: Irem de Estrasburgo, v. 6, p. 165-196, 1998b.

___________. Décrire, visualiser ou raisonner: quel “apprentissages premiers” de l’activité mathematique? **Annales du Colloque de Didactiques des Mathématiques-ARGENTORATUM.** Estrasburgo: Irem de Estrasburgo, 2003a, p. 1-30.

___________. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003b. p. 11-33.

ECO, U. **As formas do conteúdo**. 3. ed. São Paulo: Perspectiva, 2001.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 2. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1997.

FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de professores de matemática:** explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2003.

FLORES-BOLDA, C. R. **Geometria e visualização:** desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração. 1997. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação) -

Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997.

FLORES, C. R. **Olhar, saber, representar: e**nsaios sobre a representação em perspectiva. 2003. 188 f. Tese (Doutorado em Educação) - Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

FOUCAULT, M. **As palavras e as coisas**. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1992.

FREGE, G. **Lógica e filosofia da linguagem**. Tradução de Paulo Alcoforado. São Paulo: Cultrix, 1978.

GAUKROGER, S. **Descartes:** uma biografia intelectual. Tradução de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Contraponto, 2002.

LADRIÈRE, J. **A articulação do sentido**. Tradução de Salma Tannus Muchail. São Paulo: EPU/EDUSP, 1977.

___________. Représentation et connaissance. In: **Encyclopaedia Universalis**. Éditeur à Paris, 1985, corpus 15, p. 904-906.

LEFEBVRE, M. **Images, écritures et espace de médiation:** étude anthropologique des pratiques graphiques dans une communauté de mathématiciens. 2001. 224 f. Thése (Doctorat en Sciences de l'Information et de la Communication) - Université Louis Pasteur, Strasbourg I, Strasbourg, França, 2001.

MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

MIGUEL, A.; BRITO, A. J. **A história da matemática na formação do professor de matemática. Caderno CEDES**, São Paulo, v. 40, p. 47- 61, 1996. História e Educação Matemática.

NETTO, J. T. C. **Semiótica, informação e comunicação:** diagrama da Teoria do Signo. 5. ed. São Paulo: Perspectiva, 2001.

PASCAL, G. **O pensamento de Kant.** Tradução de Raimundo Vier. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 1985.

PEIRCE, C. S. **Semiótica.** São Paulo: Perspectiva, 2000.

SERFATI, M. La question de la "chose". **Actes du Colloque Inter-Irem, Histoire et Épistémologie des Mathématiques.** Estrasburgo: Irem de Estrasburgo, 1987, p.309-335.

___________. **La constitution de l'écriture symbolique mathematique**. 432 p. Thèse (Doctorat en Philosophie) - l'Université Paris I, 1997.