Os Números Racionais em Três Momentos da História da Matemática Escolar Brasileira[1]

The Rational Numbers in Three Moments of the History of Brazilian School Mathematics

Maria Laura Magalhães Gomes[2]

Resumo

Neste artigo, focalizamos a apresentação dos números racionais na matemática da escola secundária brasileira no século XX, até os anos 70, a partir da análise de alguns livros didáticos editados e utilizados nesse período. Destacamos três momentos: 1) as três primeiras décadas do século; 2) da Reforma Francisco Campos (1931) até o início dos anos 60; 3) os anos 60 e o início dos anos 70 – período de penetração e difusão do movimento da matemática moderna em nosso país. Assinalamos as diferenças entre os três momentos, buscando caracterizar a abordagem adotada em cada um deles.

Palavras-chave: Números Racionais. Livros Didáticos de Matemática. História da Matemática Escolar no Brasil.

Abstract

In this article we describe and analyze the approach given to the rational number concept in secondary school mathematics in Brazil through the examination of some textbooks published in the period from 1900 to1970. Three different moments are focused: 1) the first three decades of the twentieth century; 2) from 1931 to 1960; 3) the sixties and the first half of the seventies. We emphasize the differences found among those moments and try to characterize the prevailing approach in each one of them.

Keywords: Rational Numbers. Mathematics Textbooks. History of Brazilian School Mathematics.

---

[1] Este artigo resulta do projeto de pesquisa *Aspectos históricos da abordagem dos campos numéricos na matemática escolar brasileira*, desenvolvido no Departamento de Matemática da UFMG e apoiado financeiramente pela Fundação de Amparo à Pesquisa em Minas Gerais (FAPEMIG).
[2] Professora do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFMG. Endereço para correspondências: Departamento de Matemática – UFMG, Av. Antônio Carlos, 6627. Cidade Universitária. Pampulha. Belo Horizonte. MG. CEP 31270-901. laura@mat.ufmg.br

Introdução

Ao analisar os estudos que envolvem as relações entre a história da matemática e a educação matemática, Miguel e Miorim (2002a) identificam a constituição de histórias de aspectos ou áreas da educação matemática como uma das duas principais vertentes[3] segundo as quais se têm desenvolvido tais estudos nos contextos internacional e brasileiro desde, pelo menos, o século XVIII. Este artigo contempla uma das dimensões dessa vertente – "*a história do ensino de determinadas noções da matemática ou campos da matemática*" (MIGUEL; MIORIM, 2002a, p. 181), ao focalizar a apresentação dos números racionais na escola secundária brasileira no século XX, até os anos 70, isto é, até a época em que se tornaram dominantes, em nosso país, as idéias do movimento da matemática moderna. As fontes para a pesquisa que realizamos são alguns livros didáticos[4] de matemática escritos por autores brasileiros a partir do final do século XIX e utilizados em nosso país no período compreendido entre os primeiros decênios e os anos 70 do século passado.

Vários autores têm assinalado a relevância dos livros didáticos para a pesquisa em história da educação, particularmente no que diz respeito à história das disciplinas escolares. Por exemplo, Soares (1996) sublinha que os livros didáticos são uma fonte privilegiada para a compreensão da escolarização ou didatização dos saberes, isto é, do processo de sua seleção, segmentação e organização em seqüências, que é determinado e explicado pela evolução de políticas culturais, sociais e, conseqüentemente, educacionais.

Ainda no que diz respeito ao interesse da pesquisa nos livros didáticos, a análise de Magda Soares chama a atenção, também, para as alterações verificadas nos manuais escolares ao longo do tempo como reflexos da natureza dos conhecimentos disponíveis em cada momento, do nível de desenvolvimento em que eles se encontram e das expectativas da sociedade em relação a esses conhecimentos para a formação das novas gerações.

---

[3] A outra vertente referida pelos dois pesquisadores concerne às formas de participação da história da matemática no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

[4] Em que pese a complexidade da conceituação de livro didático – uma discussão relevante é apresentada, por exemplo, em Batista (1999) e em Choppin (2004) – , neste texto estamos entendendo, de maneira geral, livros didáticos de matemática como obras produzidas com uma finalidade específica – o ensino da matemática em qualquer tipo de instituição escolar. Usaremos indiferentemente os termos "manual", "compêndio", "livro escolar" ou "livro didático" para nos referirmos a essas obras.

Um argumento forte utilizado por Magda Soares e outros autores para justificar a pesquisa histórica nos livros didáticos é o fato de que essas obras podem ser consideradas como os principais portadores do currículo escolar quanto aos conteúdos das disciplinas, uma vez que vêm sendo a principal, quando não a única, referência para alunos e professores.

No caso do tema do presente estudo, os números racionais, o exame de alguns compêndios publicados e usados no período que estamos considerando revela diferenças acentuadas em relação à abordagem adotada pelos autores em três diferentes momentos: 1) as três primeiras décadas do século XX; 2) o período que se estende de 1931 até o início dos anos 60; 3) os anos 60 e os primeiros anos 70 – período de penetração e difusão do movimento da matemática moderna em nosso país.

Apresentamos, então, a seguir, uma tentativa de caracterização do enfoque dos racionais em livros didáticos representativos de cada um desses momentos.

No tempo dos exames preparatórios: os racionais nos livros de aritmética

Durante as três primeiras décadas do século XX, o ensino secundário brasileiro ainda se realizava sob a égide dos programas e pontos fixados pelo governo central para os exames preparatórios que possibilitavam o acesso aos cursos superiores (HAIDAR, 1972). No sistema dos preparatórios, que atravessou o Império e as primeiras décadas da República no Brasil, os candidatos ao ensino superior prestavam exames de acordo com a carreira a que aspiravam, e as disciplinas de conteúdo matemático eram ensinadas e exigidas separadamente em exames de aritmética, álgebra, geometria e trigonometria (VALENTE, 2004).

Nessa época, todo o ensino secundário e particularmente o estudo da matemática tinham caráter essencialmente propedêutico, e não se sublinhava o papel formativo dos conhecimentos tratados. No entanto, os preparatórios desempenharam um papel importante na incorporação da matemática à cultura clássico-literária que predominava nas elites intelectuais brasileiras no século XIX, pois foi por meio deles que a matemática deixou de representar um saber técnico, específico das academias militares, para passar a fazer parte da cultura escolar geral de formação do candidato ao ensino superior (VALENTE, 2003). Essa mudança de status está diretamente ligada à produção dos primeiros manuais escolares por autores brasileiros para uso nas escolas, nos cursos preparatórios, nos liceus e colégios (VALENTE, 1999).

Wagner Valente chama ainda a atenção para o fato de que, a partir das últimas décadas do século XIX, editaram-se, em nosso país, muitos livros didáticos de matemática, entre os quais se sobressai uma grande quantidade de textos de aritmética. Precisamente nessas obras, situava-se o primeiro aparecimento do tema que aqui nos interessa, o dos números racionais na matemática escolar secundária brasileira.

Escolhemos alguns desses livros, todos eles indicados pelos programas oficiais de ensino de matemática para o curso secundário, da segunda metade do século XIX até as primeiras décadas do século XX[5], como fontes para o exame do enfoque dos números racionais nesse momento. São eles Coqueiro (1897), Reis e Reis (1892), Vianna (1929) e Roxo (1928), livros que tiveram um número muito grande de edições. Vamos focalizar inicialmente os três primeiros manuais que acabamos de mencionar.

Logo às primeiras páginas, percebemos a convergência entre Coqueiro, Aarão e Lucano Reis e Vianna: todos eles começam pela mesma definição de grandeza – tudo o que é capaz de aumento ou diminuição. Vale a pena observar que exatamente essa definição aparece em dois trabalhos importantes do século XVIII – na *Explicação Detalhada do Sistema de Conhecimentos Humanos*, um dos textos que antecedeu a publicação do primeiro volume da *Enciclopédia* de Diderot e d'Alembert (DIDEROT; D'ALEMBERT, 1989) e nos *Elementos de Álgebra* de Leonhard Euler (EULER, 1984).

Depois de classificar as grandezas em contínuas ou descontínuas, os autores dos três livros apresentam a noção de medição de uma grandeza: trata-se da comparação dessa grandeza com outra grandeza de mesma espécie, já conhecida, a qual recebe o nome de unidade. Como explica Coqueiro (1897, p. 2), medir é, então, procurar "[...] saber quantas vezes a unidade escolhida se contém na grandeza que se quer medir". Finalmente, apresenta-se o conceito de número – a título de ilustração, citamos a definição de Reis e Reis (1892, p. 5), dos irmãos Aarão e Lucano Reis: "Número é o resultado da comparação de qualquer grandeza com a respectiva unidade". Assim, o número é definido sempre como o resultado da comparação da grandeza com a unidade, ou seja, existe uma grande ênfase em se atribuir à idéia de número o significado de <u>resultado da medição de uma grandeza.</u>

Essa conceituação de número é a que Euler adota no início de seus *Elementos de Álgebra*. Euler (1984, p. 2) afirma que a determinação ou a medida de todo tipo de grandeza reduz-se a,

---

[5] De acordo com Miguel e Miorim (2002b), Pitombeira (1996) e Valente (1999, 2004).

escolhida uma grandeza conhecida como unidade, “[...] determinar a proporção da grandeza em questão em relação a essa medida conhecida”, e acrescenta que, como a referida proporção é sempre expressa por números, “[...] um número não é senão a proporção de uma grandeza em relação a outra arbitrariamente escolhida como a unidade”

Coerentemente com essa opção para a apresentação da idéia de número, os autores passam, em seguida, a classificar os possíveis resultados da medição de grandezas. Essa classificação oferece dois tipos básicos de números: os racionais e os irracionais.

As grandezas e os números que expressam suas medidas são classificados segundo a existência ou não de uma medida comum entre a grandeza a ser medida e a grandeza adotada como unidade. No primeiro caso, obtêm-se os números comensuráveis ou racionais, e no segundo caso, os números incomensuráveis ou irracionais. A ênfase conferida à ligação entre número e medida de grandezas pode ser observada na preferência dos autores pelos adjetivos “comensurável” e “incomensurável” em relação aos qualificativos “racional” e “irracional”, que são os adotados atualmente[6].

Para ilustrar a caracterização dos números racionais e irracionais, empreendida a partir da existência ou inexistência de uma medida comum entre a grandeza a ser medida e aquela escolhida como unidade, vamos descrever detalhadamente a forma como Coqueiro a realiza. Apresentando a medição de uma grandeza contínua – o comprimento de um segmento AB – como a comparação desse comprimento com o de um segmento CD fixado como unidade, o autor destaca duas possibilidades. Na primeira, a unidade escolhida cabe um número exato de vezes na grandeza a ser medida, e obtém-se um número inteiro.

A segunda possibilidade corresponde ao caso em que, operada a comparação da grandeza a ser medida com a unidade, sobra da grandeza um resto menor que a unidade adotada, o qual precisa ser medido. Coqueiro continua: para isso, divide-se a unidade em um certo número de partes iguais e repete-se a operação com o objetivo de se verificar quantas vezes a unidade subdividida cabe no resto. Se ela não estiver contida um número exato de vezes no resto, continua-se o processo. Pode acontecer que se chegue a um resto contido exatamente no resto precedente. Nesse caso, o resto original terá por medida uma fração da unidade, e “[...] a medida

---

[6] Essa preferência se manifesta de dois modos nos autores que estudamos, quando classificam os números: as palavras “racional” e “irracional” não são sequer citadas (COQUEIRO, 1897; VIANNA, 1929), ou, então, são mencionadas após as palavras “comensurável” e “incomensurável” (REIS; REIS, 1892).

da grandeza se comporá de um número inteiro mais uma fração da unidade” (COQUEIRO, 1897, p. 3), o que o autor chama de um número fracionário**.**

A partir dessa explicação, Coqueiro define as grandezas comensuráveis: são aquelas tais que, tomando-se uma delas como unidade, o valor da outra pode ser expresso em relação a essa unidade por um número inteiro ou por um número fracionário. Diz-se que as grandezas têm, no primeiro caso, como medida comum a unidade, e, no segundo caso, uma divisão dessa unidade. Os números comensuráveis são os valores das medidas de grandezas comensuráveis e são, portanto, os números inteiros e os números fracionários. Tanto Coqueiro como Vianna e os irmãos Aarão e Lucano Reis mencionam, logo em seguida, o caso das grandezas incomensuráveis – aquelas que não admitem medida comum – e chamam de incomensuráveis os números que indicam seus valores.

A estruturação das obras de Coqueiro, Reis e Reis, e Vianna é muito semelhante. Após essa primeira abordagem dos números racionais na introdução, primeiro capítulo ou seção, todas elas se dedicam ao tratamento dos números inteiros, isto é, daqueles números que resultam da medição de grandezas no caso em que a unidade escolhida para essa medição cabe um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida.

Seguem-se, então, capítulos ou seções que focalizam a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão de inteiros[7], as noções sobre divisibilidade, os números primos, o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum. É somente depois desses tópicos que os autores retomam o tema dos números racionais, em capítulos ou seções cujos títulos contêm as expressões “números fracionários” ou “frações ordinárias”. Os demais conteúdos abordados são medidas, potências e raízes, matemática comercial e financeira, progressões e logaritmos; um item que merece destaque em todos os manuais são as aproximações numéricas, acompanhadas do estudo dos erros nelas cometidos.

O último compêndio que selecionamos para estudar o enfoque dos números racionais nesse primeiro momento é o livro *Lições de Aritmética*, escrito por Euclides Roxo e adotado no Colégio Pedro II de 1923 a 1929 (VALENTE, 2004), depois de uma mudança nos programas de ensino do colégio. Esse livro, tornado referência nacional para o ensino da aritmética escolar, foi utilizado também pelos candidatos a admissão nas Escolas Politécnica, Militar e Naval. Valente

[7] É importante observar que todos os manuais de diferentes épocas que examinamos para esta pesquisa empregam a expressão “números inteiros” para referir-se aos números naturais com o acréscimo do zero.

(2004) assinala que o que diferenciava essa obra dos livros de aritmética anteriormente adotados no Brasil, entre os quais figuram os três manuais que estudamos[8], era, sobretudo, a apropriação do livro *Leçons d'Arithmétique théorique et practique,* do francês Jules Tannery, realizada pelo professor Roxo.

A edição original da obra de Tannery é de 1894. No prefácio da nova edição que publicou em 1910[9], e que provavelmente foi a usada por Roxo, Tannery salienta ter procurado sistematizar melhor a ligação da noção de fração à de medida ou relação (TANNERY, 1926).

No primeiro capítulo de seu livro, Euclides Roxo se diferencia de Coqueiro, Reis e Reis, e Vianna, pois, em lugar de começar pelas idéias de grandeza e medição de grandezas para, a partir delas, conceituar o número como o resultado da medição de uma grandeza e em seguida classificar os números de acordo com a existência ou não de uma medida comum entre a grandeza a ser medida e a unidade escolhida para medi-la, como fazem esses autores, prefere introduzir a idéia de número pela consideração de uma coleção de objetos distintos. Euclides Roxo, nesse capítulo inicial, não chega sequer a mencionar a medição de grandezas, aproximando-se do enfoque eleito por Jules Tannery em seu livro.

Entretanto, após nove capítulos em que trata os mesmos tópicos referentes aos números inteiros presentes nos livros dos três autores que comentamos, no capítulo X, denominado "Frações Ordinárias", Roxo apresenta a mesma definição de grandeza dos livros anteriores – grandeza é tudo o que é susceptível de aumento ou diminuição. E é nesse capítulo, que se inicia após 122 páginas, que o autor focaliza a medição de grandezas, utilizando o comprimento de uma reta limitada, isto é, um segmento, para apresentar os três possíveis resultados da medição, chamados números inteiros, frações e números incomensuráveis. Essas denominações aparecem após a seguinte conceituação de fração: "Fração é, pois, a medida de uma grandeza que contém uma ou mais das partes iguais em que se dividiu a unidade" (ROXO, 1928, p. 124).

Novamente, a abordagem de Roxo (1928) é muito parecida com a que Tannery (1926) realiza no capítulo correspondente de seu livro, o de número VI. Tannery (1926) trabalha com a idéia de medida de comprimentos e, como Roxo, considera, nesse capítulo, somente os

---

[8] Embora somente tenhamos tido acesso a uma edição do livro de Vianna datada de 1929 e, portanto, posterior à primeira edição do livro de Roxo, nessa edição consta um parecer sobre a obra datado de 1882, o que atesta a anterioridade da publicação original do livro de Vianna em relação ao de Roxo. Observe-se que as edições dos livros de Coqueiro e dos irmãos Reis que utilizamos são do século XIX.

[9] Esse prefácio figura na edição que consultamos, a qual é a de 1926.

comprimentos que podem ser medidos por números inteiros ou frações, adiando o tratamento do caso em que isso não ocorre para capítulos posteriores. Todavia, devemos notar que o autor francês não apresenta a conceituação de grandeza presente em todos os livros brasileiros que analisamos senão muito mais à frente em sua obra, no capítulo "Medida de Grandezas", que começa à página 470[10].

Valente (2004) chama a atenção para o sucesso da obra de Euclides Roxo que, não apenas foi referência para o ensino no Colégio Pedro II até 1929, como também passou a ser utilizada mais amplamente no Brasil por todos aqueles que precisavam ser aprovados no exame preparatório de aritmética. O pesquisador assinala o estabelecimento do livro como uma nova referência para o ensino da aritmética, e destaca que ele representou:

> [...] o esforço de reduzir o papel predominante de uma lógica demonstrativa, dedutiva, vigente na matemática tradicional, substituindo-a por uma compreensão mais significativa, isto é, por uma compreensão que buscava ajuda na intuição (VALENTE, 2004, p. 91).

Como procuramos observar, em relação aos autores que o precederam e cujas obras de aritmética aqui comentamos, Roxo apresenta diferenças quanto à apresentação inicial da idéia de número. Além disso, ele não mais se utiliza das expressões "medida comum', "grandezas comensuráveis" e "grandezas incomensuráveis", optando por separar as possibilidades de resultados de grandezas nos três seguintes casos: 1) a medida é um número inteiro, quando a grandeza que se quer medir é um múltiplo da unidade; 2) a medida é uma fração, quando a grandeza é um múltiplo de uma parte alíquota da unidade; 3) a medida é um número incomensurável, quando a grandeza não é múltiplo de nenhuma parte alíquota, por menor que seja, da unidade.

Contudo, Roxo (1928), em seu livro, mantém a definição antiga de grandeza e a denominação "número incomensurável", e não faz uso dos termos "número racional" e "número irracional". Tannery (1926), por sua vez, utiliza, em seu capítulo XII, a expressão "números irracionais", observando em nota de rodapé que, embora fosse habitual o termo "números incomensuráveis", seria bom reservar o epíteto "incomensuráveis" para as grandezas.

Verificamos, assim, que embora introduza algumas modificações em relação às aritméticas mais antigas e se utilize, parcialmente, do enfoque da obra de Tannery, Roxo ainda

---

[10] Tannery (1926) comenta que essa definição é, sem dúvida, muito vaga em sua generalidade, mas assinala que, apesar disso, tentará dela tirar partido para ligar as noções de grandeza e número.

preserva boa parte da apresentação de seus antecessores. As alterações promovidas por Euclides Roxo fazem com que as *Lições de Aritmética*, primeiro livro do autor que figura na lista de suas obras apresentada por Pitombeira (2003), possam ser vistas como um manual de um período de transição entre os dois primeiros momentos da história da matemática escolar brasileira que focalizamos neste estudo.

Lembremos que colocamos o início do segundo momento que estamos considerando em 1931, ano em que se empreende a primeira tentativa de organização nacional da educação do Brasil por meio da Reforma Francisco Campos. A partir dessa reforma, os conteúdos matemáticos da escola secundária, até então ensinados por livros e professores específicos para aritmética, álgebra, geometria e trigonometria, passam a integrar uma única disciplina nos currículos, com o nome de matemática. Para abordar os números racionais nos livros didáticos brasileiros nesse segundo momento, precisamos apresentar, ainda que de forma sucinta, os antecedentes dessa mudança.

Os números racionais na disciplina matemática antes do movimento da matemática moderna

O cenário da educação brasileira registrou, a partir da década de 20 do século passado, inquietações e movimentos de reforma, reflexo das tensões entre uma estrutura voltada para a formação das elites e as necessidades de uma sociedade em acelerado processo de industrialização e urbanização (PITOMBEIRA, 2003). Nesse ambiente efervescente, Euclides Roxo, diretor do Colégio Pedro II desde 1925 e participante ativo dos debates educacionais, tendo abraçado as idéias do primeiro movimento internacional pela modernização do ensino da matemática[11], liderado pelo matemático alemão Felix Klein (1849-1925), lutou intensamente pela renovação dos métodos de ensino (VALENTE, 2004). A proposta de modernização encaminhada por Roxo e aprovada pela Congregação do Colégio Pedro II em 1928 tinha como sua característica mais evidente a criação de uma nova disciplina denominada matemática, na qual se reuniriam os ensinos até então isolados da aritmética, da álgebra e da geometria, a partir de 1929 (MIORIM, 1998; PITOMBEIRA, 2003, VALENTE, 2004).

A aprovação dessa proposta representou um elemento decisivo para a introdução do ensino moderno em todas as escolas secundárias brasileiras, concretizada depois da Reforma Francisco Campos, em 1931, a qual acatou, para o ensino secundário, todas as idéias da proposta adotada no Colégio Pedro II.

Essa reforma, primeira iniciativa de organização nacional da educação em nosso país, marca uma mudança fundamental e definitiva quanto à educação matemática brasileira, até então essencialmente propedêutica: a instituição, nos currículos escolares, de uma única disciplina denominada matemática. A grande mudança integrava o projeto de um ensino secundário de caráter formativo defendido pelos decretos do ministro Francisco Campos (MIORIM, 1998).

Valente (2004) enfatiza que a Reforma Francisco Campos instituiu nacionalmente a disciplina escolar matemática. Embora tenha modificado novamente a organização escolar brasileira, a Reforma Gustavo Capanema, realizada em 1942, manteve a matemática como disciplina única no ensino secundário[12]. Depois dessas duas reformas, publicaram-se no país muitas coleções de livros didáticos, que reuniram os conteúdos das quatro disciplinas matemáticas anteriores para constituir os compêndios para o ensino da matemática. Essas coleções, cuja produção tem origem nas décadas de 30 e 40, costumam chamar a atenção, na capa, na folha de rosto e nas apresentações ou prefácios, para o fato de estarem em consonância com as determinações legais das reformas.

Mudanças posteriores na legislação educacional preservaram a matemática como uma única disciplina e não parecem ter afetado significativamente os tópicos e sua apresentação nos manuais brasileiros, particularmente no que diz respeito à abordagem dos números racionais, até que as idéias do movimento da matemática moderna se disseminassem e fossem apropriadas em nosso país, caracterizando o terceiro momento que focalizamos neste artigo.

Para o estudo do enfoque dos números racionais no segundo momento – da Reforma Francisco Campos até o início dos anos 60, examinamos livros didáticos destinados ao primeiro

---

[11] De acordo com Miorim (1997), esse movimento se desencadeou a partir da constituição da Comissão Internacional para o Ensino da Matemática, conhecida atualmente por sua sigla em inglês – ICMI, *International Comission on Mathematical Instruction* – em 1908, no Congresso Internacional de Matemática realizado em Roma.

[12] Dassie et. al. (2004) comentam que as reformas Campos e Capanema fizeram parte do mesmo contexto de tentativa de renovação do ensino de matemática, mas a segunda representou o desfecho de uma forte reação às inovações propostas, desde 1929, no Colégio Pedro II, as quais se refletiram na Reforma Francisco Campos.

ano do primeiro dos dois ciclos em que a escola secundária se dividiu desde 1931[13] – o curso ginasial – em edições publicadas entre 1934 e 1959.

A primeira coisa que chama a atenção do leitor dessas obras é seu conteúdo, que abrange, além dos tópicos de aritmética, pelo menos também alguns tópicos de geometria. Dois dos manuais que analisamos apresentam ainda tópicos de álgebra. Nas partes dedicadas à aritmética, procuramos identificar com particular interesse a presença ou ausência da definição de grandeza, da conceituação de número como resultado da medição de grandezas e da definição de fração ligada à medição de comprimentos. Verificamos que nenhum dos livros emprega mais as expressões "números comensuráveis" e "números incomensuráveis", mas que existe uma grande variedade em relação aos aspectos que acabamos de mencionar. O quadro a seguir sintetiza os resultados da análise que realizamos.

Livro	**Edição**	**Conteúdo**	**Presença da definição de grandeza**	**Conceituação de número como resultado da medição de grandezas**	**Definição de fração ligada à medição de comprimentos**
Thiré e Mello e Souza (1934)[14]	7ª	Aritmética, álgebra e geometria	Não	Não	Não
Roxo et. al.[15] (1943)[16]	Não consta	Aritmética e geometria	Sim	Sim	Sim
Maeder (1940)	9ª	Aritmética e geometria	Sim	Sim	Sim
Stávale (1940)	15ª	Aritmética, álgebra e geometria	Sim	Sim	Não

---

[13] A Reforma Francisco Campos instituiu um primeiro ciclo (ginasial) de 5 anos e um segundo ciclo (complementar) de 2 anos; a Reforma Gustavo Capanema reorganizou o ensino secundário em um ciclo ginasial de 4 anos e um colegial de 3 anos. A partir de 1971, com a entrada em vigor da Lei 5692/71, os quatro anos de escolarização correspondentes ao curso ginasial passaram a constituir as quatro últimas séries do 1º grau (PIMENTA; GONÇALVES, 1992).

[14] Este é o primeiro da coleção de cinco livros denominada inicialmente *Matemática* (nos dois primeiros volumes) e posteriormente *Curso de Matemática* (do 3º ao 5º volume).

[15] A grafia deste livro reproduz uma das duas formas diferentes com que o sobrenome Mello/ Melo aparece nos dois compêndios citados desse segundo autor (THIRÉ; MELLO E SOUZA,1934; ROXO *et. al.*, 1943). Trata-se da mesma pessoa – Júlio César de Mello (ou Melo) e Souza, que também publicou muitas obras com o pseudônimo Malba Tahan.

[16] É o primeiro livro da coleção de quatro volumes intitulada *Matemática Ginasial*.

Stávale (1943)	2ª	Aritmética e geometria	Não	Sim	Sim
Sangiorgi (1953)	4ª	Aritmética e geometria	Não	Não	Não
Maeder (1955)	16ª	Aritmética e geometria	Sim	Sim	Não
Lacaz Neto (1959)	Não consta	Aritmética e geometria	Sim	Sim, para numero natural. Não, para frações.	Não

Vamos fazer observações mais detalhadas sobre a abordagem dos números racionais a partir das indicações do quadro.

Em primeiro lugar, abordemos a questão da definição de grandeza. Constatamos que os autores que a apresentam fazem-no de maneiras variadas: Maeder (1940) e Stávale (1940) optam pela antiga definição – grandeza é tudo aquilo que pode aumentar ou diminuir; Roxo et. al. (1943), e Maeder (1955), conceituam grandezas como entes abstratos entre os quais se pode definir a igualdade e a soma; Lacaz Neto (1959, p. 14) tem ainda outra definição – “[...] grandeza é tudo aquilo que podemos medir, isto é, comparar com outra grandeza para determinarmos, pelo menos aproximadamente, quantas vezes uma contém a outra”. É interessante notar que Stávale (1943) tem posição diferente da que apresentara no manual anterior que analisamos. Na obra mais recente, ele escreve que a noção de grandeza é intuitiva, não se define.

O segundo ponto para o qual queremos chamar a atenção é a conceituação de número como resultado da medição de grandezas, a qual parece continuar a prevalecer no momento a que estamos nos referindo. De fato, cinco dos oito compêndios que estudamos a adotam integralmente; um (LACAZ NETO, 1959) a elege parcialmente, isto é, utiliza-a para números naturais, mas não para frações; dois não a apresentam.

Cabe agora um comentário sobre o uso da expressão “números racionais” nesses oito livros didáticos para o primeiro ano ginasial. Observamos anteriormente que nos manuais de aritmética, quando o adjetivo “racionais” era aplicado aos números, isso se fazia como segunda opção para qualificá-los, já que os autores preferiam a expressão “números comensuráveis”.

Nesse segundo momento, é interessante notar que, dos oito livros pesquisados, somente um[17] emprega a expressão “números racionais” – trata-se do manual de Roxo et. al. (1943), no qual encontramos a frase “Os números inteiros e fracionários são números racionais” (ROXO et.

al., 1943, p.245). Não tivemos acesso a todos os demais livros das coleções de manuais das quais aqui analisamos o primeiro volume. Entretanto, pudemos verificar a presença da expressão "números racionais" no livro do terceiro ano[18] da coleção de Thiré e Mello[19] e Souza (nesse volume, com a participação, também, de Euclides Roxo), bem como no volume da 2ª série de Osvaldo Sangiorgi, em que o termo é associado à medição de grandezas comensuráveis[20]. De qualquer modo, os autores não manifestam muita preocupação, nesse momento, em acentuar o termo "números racionais".

Finalmente, uma diferença fundamental se faz notar nesse conjunto de manuais em relação ao modo de apresentar as frações escolhido por todos autores dos livros do primeiro momento aqui focalizado. De fato, enquanto as obras de Coqueiro, Reis e Reis, Vianna e Roxo apresentam as frações de forma ligada à medição de comprimentos, dentre os oito compêndios que selecionamos para representar o segundo momento, esse enfoque só se mantém em três: Roxo et. al. (1943), Maeder (1940) e Stávale (1943). Entretanto, mesmo esses autores, como os demais, não utilizam mais a expressão "números comensuráveis", preponderante no momento anterior. O abandono desse termo parece refletir, na matemática escolar brasileira, o desligamento operado ao longo do tempo entre a noção de fração e a medição de comprimentos. De forma mais geral, podemos assinalar a progressiva desvinculação entre grandeza e número.

Vejamos como se define a fração sem a explicitação de uma conexão direta com a medição de segmentos nos cinco demais livros. A idéia que prevalece é a da fração como uma ou mais partes iguais de uma "unidade". Contudo, em três dos compêndios (THIRÉ; MELO E SOUZA, 1934; MAEDER, 1955; LACAZ NETO, 1959), a palavra "fração" designa precisamente essa uma ou mais partes, enquanto que nos outros dois (STÁVALE, 1940; SANGIORGI, 1953), a fração é o <u>número</u> que indica uma ou mais partes iguais em que a unidade é dividida. É interessante, ainda, assinalar as diferentes representações de unidade escolhidas pelos autores: um segmento (THIRÉ; MELO e SOUZA, 1934), uma laranja (STÁVALE, 1940), um tablete de chocolate (SANGIORGI, 1953), uma régua de madeira (MAEDER, 1955).

---

[17] Os sete outros livros utilizam-se, em geral, da expressão "números fracionários".
[18] Trata-se de Roxo et al. (1935).
[19] Em todos os livros dessa coleção de cinco volumes, o nome de Melo e Souza aparece grafado como Mello e Souza. Veja-se a nota de número 14.
[20] Escreve o autor: "A relação entre duas grandezas comensuráveis é expressa mediante um número denominado racional" (SANGIORGI, 1959, p. 54).

Assim, embora nesse momento da matemática escolar brasileira alguns autores de livros didáticos ainda mantenham a ligação entre números fracionários e medição de comprimentos, percebe-se nitidamente uma mudança de abordagem. Para os autores dos livros de aritmética do momento anterior, a fração também é uma ou algumas das partes iguais em que se divide a unidade. Todavia, o modelo de unidade é, invariavelmente, um segmento de reta. As modificações dos livros didáticos em relação à apresentação dos números racionais verificadas no segundo momento apontam, portanto, na direção da dissociação entre número e medição de grandezas e, particularmente, na direção de um progressivo abandono do segmento de reta como o protótipo preferido de grandeza/unidade. Configura-se, desse modo, uma alteração marcante, a qual diferencia a abordagem dos números, e, particularmente, dos números racionais, entre os dois momentos históricos que focalizamos até agora.

No entanto, ainda que tenhamos podido perceber e assinalar, com o passar do tempo, algumas modificações nos manuais, pelo menos naquilo que diz respeito ao tratamento dado aos números racionais, de acordo com Pfromm Netto et al. (1974), os livros didáticos brasileiros de matemática refletiram certa estabilidade na apresentação dos conteúdos até a década de 50 do século XX.

Mudanças profundas na matemática escolar brasileira se realizariam, de fato, a partir da penetração e difusão, em nosso país, do ideário propagado pelo segundo movimento internacional de renovação do ensino da matemática, iniciado na Europa e nos Estados Unidos, e amplamente conhecido como o movimento da matemática moderna. Trata-se do terceiro momento considerado neste texto, em que observaremos alterações significativas na abordagem dos conteúdos matemáticos da escola secundária em geral, e, particularmente, na de nosso tema, os números racionais. Comentamos no que se segue as modificações que se operaram nos livros didáticos nesse terceiro momento.

Os números racionais durante o movimento da matemática moderna

Começamos por situar, de forma sucinta e simplificada, o movimento da matemática moderna no Brasil. A entrada definitiva das propostas de renovação em nosso país deu-se, a partir de 1961, com a constituição, em São Paulo, do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM). Propunha-se, sobretudo, modificar a matemática da escola secundária mediante sua aproximação da matemática ensinada nas universidades – um elemento central da proposta era a ênfase nas estruturas matemáticas. Assim, o adjetivo “moderna” para qualificar a matemática referia-se, em boa parte, à incorporação, ao ensino elementar, de temas desenvolvidos na matemática científica a partir da segunda metade do século XIX. O adjetivo “moderno”, todavia, trazia outras conotações, tais como a de atualização do ensino de forma a adequá-lo às exigências de uma sociedade em acelerado desenvolvimento técnico e a de sintonia com os avanços nas pesquisas nos campos da psicologia e da didática, as quais, acreditava-se, deveriam alimentar o ensino da matemática. A expressão “matemática moderna”, assim, carregava uma forte valoração positiva em nosso país (BÚRIGO, 1990).

O movimento da matemática moderna teve enorme impacto na matemática escolar brasileira, pela realização de inúmeros cursos para professores e, em grande parte, pela publicação e ampla circulação de uma enorme quantidade de manuais que, muito freqüentemente, declaravam-se adeptos do então novo ideário pelo uso do adjetivo “moderno” em seus títulos. Criaram-se as coleções denominadas “curso moderno de matemática”, estabelecendo-se, de acordo com Pfromm Netto et al. (1974), um novo padrão para o ensino no nível ginasial.

Um traço característico essencial do conjunto de idéias defendidas pelos modernistas e incorporadas aos livros didáticos foi a proposta de unificação da matemática no ensino pela introdução de elementos como a linguagem dos conjuntos, as estruturas algébricas e o estudo das relações. De modo geral, a abordagem dos números se modificou de maneira radical, passando a aritmética

> [...] a ser concebida como o estudo dos campos numéricos, sendo a ordem de apresentação desses campos feita segundo o critério da menor para a maior complexidade estrutural dos mesmos (FIORENTINI et al. 1992, p. 46)[21]

Para focalizar a apresentação dos números e, especialmente, dos números racionais nos livros didáticos deste terceiro momento, selecionamos cinco manuais produzidos e publicados com o propósito de subsidiar o ensino da matemática na primeira série do ginásio, isto é, no primeiro ano da escolarização secundária. A opção por livros destinados a esse ano da escolarização buscou acompanhar o tipo de manual analisado, neste texto, para o estudo do

[21] Essa forma de apresentação, como pode ser facilmente verificado num rápido exame de diversas coleções editadas, pelo menos, até a década de 90 do século passado, foi mantida nos livros didáticos mesmo após o declínio do movimento da matemática moderna no Brasil.

momento anterior. Os livros escolares escolhidos foram Castrucci e Bóscolo (1966), Morandi (1971), Di Pierro Netto ([19--]), Quintella (1967) e Sangiorgi (1966).

A leitura do sumário de todas essas obras mostra os conteúdos organizados de forma semelhante, distribuídos em capítulos ou unidades que focalizam quatro grandes temas: números naturais e operações; divisibilidade; números fracionários e operações; grandezas e medidas. Esses temas são praticamente os mesmos abordados nos livros didáticos do segundo momento. Nota-se, contudo, em todos os livros do terceiro momento, uma das marcas mais fortes do movimento da matemática moderna – a presença das noções sobre conjuntos – diferença nítida entre esses manuais e os dos momentos anteriores. A colocação dessas noções na abertura dos livros é o preâmbulo para a introdução do número de forma bem diferente da adotada pelos autores dos dois momentos anteriores. De fato, as grandezas e sua medição se ausentam quase totalmente[22], agora, das páginas dos manuais, para ceder lugar à apresentação do número[23] como uma propriedade comum a todos os conjuntos[24] que têm a mesma quantidade de elementos. Vejamos como os autores estudados se pronunciam sobre o tema.

Sangiorgi (1966, p. 8) escreve:

> Número é uma idéia que associamos a certos conjuntos que têm em comum, uma mesma propriedade. Que é o número três? É a propriedade comum a todos os conjuntos de três objetos.

Di Pierro Netto ([19--], p. 33) prefere dizer que "[...] aos conjuntos que podem ser colocados em correspondência biunívoca ou correspondência um a um, atribui-se o mesmo número".

Para Quintella (1967, p. 16),

> A característica comum aos dois conjuntos, de estarem em correspondência biunívoca independentemente da forma, da natureza e da disposição de seus elementos, é que nos dá a idéia de número natural.

Castrucci e Bóscolo (1996, p. 25), após o mesmo tipo de considerações sobre dois conjuntos em correspondência biunívoca, apresentam do seguinte modo o conceito de número:

---

[22] De todos os livros estudados, somente Quintella (1967) alude à medição de grandezas. Porém, isso só ocorre à página 162, no capítulo sobre frações, quando o primeiro emprego apresentado para as frações é o de medida de um segmento (o segundo é o de quociente de uma divisão).

[23] Trata-se do número natural, mas nem todos os autores usam explicitamente essa terminologia ao conceituar o número.

[24] Os conjuntos referidos são finitos, mas isso não é explicitado nos textos, e pode apenas ser inferido a partir dos exemplos de conjuntos que são apresentados.

> Número, que é uma idéia associada a um conjunto através da operação de contar, constitui também um atributo comum a conjuntos que podem ser colocados em correspondência biunívoca.

E o último dos autores cujo livro da primeira série ginasial analisamos neste terceiro momento, Morandi (1971), no item intitulado “Noção de Número Natural”, no primeiro capítulo de seu manual, ao referir-se a um conjunto A e a seus conjuntos equivalentes – os conjuntos que podem ser postos em correspondência biunívoca com A – assim se expressa:

> Entre um conjunto e outro, os elementos podem ter cores diferentes, gostos diferentes, formas diferentes, etc. mas, sendo os conjuntos equivalentes, eles têm todos uma propriedade comum, que é a mesma quantidade de elementos, dada pela correspondência biunívoca dos elementos. A esta *quantidade comum* dos elementos de conjuntos equivalentes chamamos de **número natural** (MORANDI, 1971, p. 18, itálicos e negritos do autor).

Observa-se, em todos os autores que estudamos, a preocupação com a explicitação de um conceito – o de correspondência biunívoca entre conjuntos, para a apresentação da noção de número natural. Nos manuais do passado, percebe-se que a idéia de número como propriedade de uma coleção de objetos também está presente; entretanto, a linguagem empregada é totalmente diferente, e não inclui a expressão “correspondência biunívoca”, adotada unanimemente nos livros do terceiro momento.

O aparecimento dos números racionais em todos os livros do terceiro momento ocorre somente após uma série de seções, capítulos ou unidades em que se focalizam a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão no conjunto dos números inteiros (naturais reunidos ao zero), com ênfase especial nas propriedades de tais operações e, posteriormente, as noções de divisibilidade, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum. É após essa seqüência que surge, nos livros didáticos, o capítulo que trata dos números racionais. Seu título varia: alguns autores continuam preferindo os termos “números fracionários” ou “frações ordinárias” – tal é o caso de Sangiorgi (1966), que escolhe a primeira dessas alternativas, e de Morandi (1971) e Quintella (1967), que adotam a segunda. Di Pierro Netto ([19--]) e Castrucci e Bóscolo (1966), porém, optam, respectivamente, pelos títulos “O conjunto dos números racionais” e “Números racionais”.

Todos os cinco livros começam pela abordagem das frações. Em relação ao momento histórico anterior aqui estudado, nota-se uma diferença fundamental – enquanto antes do movimento da matemática moderna, como vimos, dominava a idéia da fração como uma ou mais partes iguais em que se divide uma “unidade”, agora, ainda que essa idéia seja apresentada, ela é, de certa maneira, menos valorizada, ao aparecer, em alguns manuais, como uma noção intuitiva ou vulgar. Com efeito, observemos que, por exemplo, Osvaldo Sangiorgi, na abertura de seu capítulo sobre números fracionários, escreve:

> Você tem a primeira idéia de número fracionário quando, repartindo um objeto (que nesse instante representa a unidade) em um número qualquer de partes iguais, considera uma ou algumas dessas partes (SANGIORGI, 1966, p. 161).

Todavia, após algumas páginas em que são focalizados aspectos das frações – representação numérica, nomes dos termos, representações por figuras geométricas divididas em partes iguais, das quais algumas são coloridas, frações próprias, impróprias e aparentes, o autor declara ao seu leitor, estudante da primeira série ginasial, que ele agora já está “amadurecido” para receber uma definição “geral” de número fracionário que “apanhe” todos os casos estudados[25]. O texto enfatiza que, em todos esses casos de números fracionários, participam dois números inteiros, um dos quais (o denominador) não pode ser zero. Define-se, então, o número fracionário como um par ordenado de números inteiros, em que o segundo número não é zero.

Para dar outro exemplo da maior valorização conferida a essa idéia do par de números inteiros que constitui a fração em relação à idéia anteriormente prevalecente de fração como uma ou mais partes iguais da unidade, recorremos a Morandi (1971, p. 127) que, na ordem contrária à adotada por Sangiorgi, primeiramente define a fração como “[...] um número representado por um par ordenado de números inteiros a e b e indicado pelo símbolo (a, b) ou a/b, para $b \neq 0$”, para depois acrescentar que “[...] vulgarmente entende-se por fração uma ou mais partes iguais de um inteiro”.

Observa-se, claramente, portanto, neste terceiro momento, uma mudança da escolha da ênfase a ser conferida dentre os vários aspectos que integram a epistemologia dos números racionais: em conformidade com as idéias do movimento da matemática moderna, passa a realizar-se, a partir de agora, a apresentação formal da fração ou número fracionário por meio de um par ordenado de números inteiros.

Ao mesmo tempo, parece completar-se o processo, iniciado no momento anterior, de desvinculação entre a noção de fração e a medição de comprimentos, pois, entre os cinco livros analisados, somente o de Ary Quintella faz referência à associação entre fração e medida de comprimentos.

---

[25] Todas as aspas são do autor e essa conversa com o leitor situa-se à página 168 do manual.

Por outro lado, quatro das cinco obras apresentam, no livro correspondente ao primeiro ano da escola secundária, a classe de equivalência de uma fração como o conjunto das frações a ela equivalentes. Os autores de duas delas, Quintella (1967) e Castrucci e Bóscolo (1966), utilizam esse conceito para apresentar o número racional como o número definido pela classe de equivalência de uma fração. Todavia, os autores das outras três coleções optam por apresentar o número racional como qualquer número que pode ser colocado na forma de fração p/q, sendo p e q inteiros quaisquer e q diferente de zero.

Cabe ainda assinalar que a importância atribuída às propriedades das operações com os números, no interior das concepções que norteiam o movimento da matemática moderna, leva os livros didáticos a enfatizar uma vantagem do conjunto dos números racionais: a divisão é sempre possível, desde que o divisor não seja zero. Destaca-se, em quase todos[26] os livros que estudamos, a idéia de ampliação do campo numérico dos naturais para um conjunto no qual a operação de divisão, com exceção do caso do divisor nulo, goza da propriedade do fechamento.

Examinando os oito manuais do momento anterior analisados neste trabalho, percebemos que apenas dois – Roxo et al. (1943) e Stávale (1943) sublinham a idéia de que a introdução dos números fracionários possibilita a realização da divisão com uma única exceção. A ênfase sobre a idéia de ampliação do campo numérico configura-se, pois, como mais uma das características da abordagem dos racionais no terceiro momento.

Um percurso com ênfases variadas ao longo do tempo

Embora não pretendamos ter realizado uma análise completa da abordagem dos números racionais nos livros didáticos destinados ao ensino secundário brasileiro até os anos 70 do século passado, pudemos, neste estudo, identificar e caracterizar muitas das alterações pelas quais passou essa abordagem.

Em linhas gerais, verificamos que, no primeiro momento, a conceituação do número como o resultado da medição de uma grandeza coloca a ênfase no aspecto do racional como expressão da medição de uma grandeza que tem uma medida comum com a grandeza escolhida como unidade. Essa expressão é um número inteiro ou fracionário, chamado preferencialmente

[26] A única exceção é representada pelo manual de Scipione.

número comensurável. Note-se que essa conceituação tem caráter formal, depende de uma noção um tanto imprecisa de grandeza e se apóia fortemente sobre a medição de comprimentos.

No segundo momento, os livros continuam, ainda que com menos ênfase, a conceituar o número como o resultado da medição de uma grandeza. Entretanto, enfraquece sensivelmente a ligação entre a noção de fração e a medição de comprimentos; não se usa mais a denominação "números comensuráveis"; a fração é, sobretudo, uma ou mais das partes iguais em que se divide a unidade, unidade essa que não é mais sempre representada por um segmento de reta. Observa-se, ainda, tanto a ausência de uma definição para os números racionais quanto a inexistência dessa denominação em quase todos os livros analisados.

No terceiro momento, ausenta-se definitivamente dos livros a noção de grandeza. O número (natural) é apresentado como uma propriedade comum a dois conjuntos entre os quais se pode estabelecer uma correspondência biunívoca. A idéia da fração como uma ou mais partes iguais em que se divide a unidade é desvalorizada em favor de uma apresentação da fração a/b que enfatiza o par ordenado de inteiros a e b, com b diferente de zero. Aparece, assim, outra vez, uma abordagem formal que, porém, é completamente diferente daquela realizada no primeiro momento.

Ao mesmo tempo, desaparece a associação entre a noção de fração e a medição de comprimentos e manifestam-se, diferentemente do que acontecia no momento anterior, preocupações em definir o número racional. De acordo com as idéias defendidas no contexto do movimento da matemática moderna, adota-se, para isso, um enfoque formal: ou o racional é apresentado como o número definido pela classe de equivalência de uma fração, ou é definido como qualquer número que possa ser colocado na forma p/q, sendo p e q inteiros quaisquer e q não-nulo. Simultaneamente, enfatiza-se a idéia de que o conjunto dos racionais representa a ampliação do campo numérico dos naturais de forma que seja sempre possível a divisão, exceto no caso em que o divisor é zero.

Podemos notar, portanto, que com o passar do tempo foram variando as escolhas sobre os aspectos dos racionais a serem postos em evidência, de acordo, certamente, com as propostas pedagógicas de que a matemática escolar brasileira se apropriou em cada momento. Vale observar, ainda, que em vista das características apontadas para o tratamento dos racionais nos três períodos, no primeiro e no terceiro momentos, predomina uma linguagem mais formal do que a que se adota no segundo.

Levando em conta que os livros didáticos têm sido, como já dissemos, os principais portadores do currículo escolar quanto ao conteúdo lecionado nas escolas, o estudo aqui empreendido nos dá uma boa idéia sobre a forma como os números racionais foram apresentados aos estudantes pertencentes a várias gerações em nosso país.

A complexidade dos números racionais na matemática escolar tem sido ressaltada na literatura de pesquisa em Educação Matemática após o terceiro momento enfocado neste trabalho. Em particular, Kieren (1976), chama a atenção para o fato de que no currículo escolar, é comum desenvolver as idéias sobre os números racionais de forma restrita a uma de suas interpretações. No caso dos livros que analisamos, evidenciou-se, nitidamente, a cada momento, a preferência por uma determinada interpretação, o que possivelmente teve reflexos na compreensão dos conceitos e na formação de concepções entre estudantes e professores.

Ainda que seguramente não tenhamos logrado apreender todos os aspectos envolvidos nas formas escolhidas pelos autores de livros didáticos para a apresentação dos racionais nos três momentos, pudemos verificar, neste estudo, mais uma vez, que muita variedade se oculta por trás da aparente homogeneidade dos conteúdos da matemática escolar ao longo do tempo.

Referências

BATISTA, A. A. G. Um objeto variável e instável: textos, impressos e livros didáticos. In: ABREU, M. (Org.). **Leitura, história e história da leitura**. Campinas: Mercado de Letras; Associação de Leitura do Brasil; São Paulo: Fapesp, 1999. p.529-575.

BÚRIGO, E. Z. Matemática moderna: progresso e democracia na visão de educadores brasileiros dos anos 60. **Teoria e Educação**, Porto Alegre, n. 2, p. 255-265, 1990.

CASTRUCCI, B.; BÓSCOLO, A. **Matemática para o ciclo ginasial**. São Paulo: F.T.D., 1966. v.1.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa,** São Paulo, v.30, n. 3, p. 549-666, set./dez. 2004.

COQUEIRO, J. A. **Tratado de arithmetica**. Para uso dos collegios, lyceos e estabelecimentos de instrucção secundaria. Rio de Janeiro: Casa Mont'Alverne, 1897.

DASSIE, B. A.; ROCHA, J. L.; SOARES, F. S. Ensino de Matemática no século XX – da Reforma Francisco Campos à Matemática Moderna. **Horizontes**, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 7-15, jan./jun. 2004.

DI PIERRO NETTO, S. **Matemática para a escola moderna**. Curso Ginasial. São Paulo: IBEP, [19--]. v.1.

DIDEROT, D. ; D'ALEMBERT, J. **Enciclopédia ou Dicionário Raciocinado das Ciências, das Artes e dos Ofícios** / por uma Sociedade de Letrados: discurso preliminar e outros textos. Edição Bilíngüe. Tradução de Fúlvia Maria Luiza Moretto. São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista, 1989.

EULER, L. **Elements of algebra**. New York: Springer-Verlag, 1984. Reprinted from *Elements of Algebra*, Fifth Edition, London, 1840.

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-Posições**, São Paulo, v. 3, n. 1 [7], p. 39-54, mar.1992.

HAIDAR, M. L. M. **O ensino secundário no Império brasileiro**. São Paulo: Grijalbo; EDUSP, 1972.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R. (Ed.). **Number and measurement:** papers from a research workshop. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, 1976. p. 101-144.

LACAZ NETO, F. A. **Matemática destinado para 1ª série**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1959.

MAEDER, A. M. **Curso de Matemática:** 1ª série. Curso Ginasial. 16. ed. São Paulo: Melhoramentos, 1955.

MAEDER, A. M. **Lições de Matemática:** 1º ano, 1ª série. 9. ed. São Paulo: Melhoramentos, 1940.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. História da Matemática: uma prática social de investigação em construção. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n. 36, p. 177-203, dez. 2002a.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **Os logaritmos na cultura escolar brasileira**. Rio Claro: Editora da SBHMAT, 2002b.

MIORIM, M. A. As influências do primeiro movimento de modernização do ensino de matemática no Brasil. In: ENCONTRO LUSO-BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA; SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 2., 1997, Natal. **Anais...** Natal: UFRN, 1997. p. 273-286.

MIORIM, M. A**. Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MORANDI, H. **Matemática. Método Moderno**. Curso Médio – Ciclo Ginasial. (1ª série). 2. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1971.

PFROMM NETTO, S.; ROSAMILHA, N.; DIB, C. J. **O livro na educação**. Rio de Janeiro: Primor; INL, 1974.

PIMENTA, S. G.; GONÇALVES, C. L. **Revendo o ensino de 2º grau:** propondo a formação do professor. São Paulo: Cortez, 1992.

PITOMBEIRA, J. B. Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino da matemática. In: VALENTE, W. (Org.). **Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2003. p. 86-158.

PITOMBEIRA, J. B. O cálculo na escola secundária brasileira – algumas considerações históricas. In: FERREIRA, E. S. (Org.). **História e educação matemática**. Campinas: Papirus, 1996. p. 62-80 (Cadernos CEDES).

QUINTELLA, A. **Matemática para a primeira série ginasial**. 122. ed. São Paulo: Nacional, 1967.

REIS, A.; REIS, L. **Curso elementar de mathematica** – theorico, pratico e applicado. Aritmética. Cálculo de valores. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional, 1892.

ROXO, E. **Lições de Arithmetica**. 7. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1928.

ROXO, E.; THIRÉ, C.; MELO E SOUZA, J. C. **Curso de Matemática**. 3º ano. 2. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1935.

ROXO, E.; THIRÉ, C.; MELO e SOUZA, J. C. **Matemática Ginasial**. 1ª série. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1943.

SANGIORGI, O. **Matemática 1**. Curso moderno para cursos ginasiais. 8. ed. rev. São Paulo: Nacional, 1966.

SANGIORGI, O. **Matemática para a primeira série ginasial**. 4. ed. São Paulo: Nacional, 1953.

SANGIORGI, O. **Matemática para a segunda série ginasial**. 45. ed. rev. São Paulo: Nacional, 1959.

SOARES, M. Um olhar sobre o livro didático. **Presença Pedagógica**, Belo Horizonte, v. 2, n. 2, p. 53-63, nov./dez. 1996.

STÁVALE, J. **Elementos de matemática**. Primeiro volume para a primeira série do curso ginasial. 2. ed. São Paulo: Nacional, 1943.

STÁVALE, J. **Primeiro ano de matemática**. 15. ed. São Paulo: Nacional, 1940.

TANNERY, J. **Leçons d'Arithmétique théorique et practique**. 9 e éditon revue. Paris: Librairie Armand Colin, 1926.

THIRÉ, C.; MELO e SOUZA, J. C. **Matemática**. 1º ano. 7. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1934.

VALENTE, W. R. (Org.). **O nascimento da matemática do ginásio**. São Paulo: Annablume; Fapesp, 2004.

VALENTE, W. R. A disciplina Matemática: etapas históricas de um saber escolar no Brasil. In: OLIVEIRA, M. A. T.; RANZI, S. M. **História das disciplinas escolares no Brasil:** contribuições para o debate. Bragança Paulista: EDUSF, 2003. p. 217-254.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930)**. São Paulo: Annablume; FAPESP, 1999.

VIANNA, J. J. L. **Elementos de arithmetica**. 24. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1929.