Bolema, Rio Claro (SP), Ano 22, nº 32, 2009, p. 123 a 146

Infinito: uma realidade à parte dos alunos do Ensino Secundário

Infinite: a reality apart from High School students

Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro Sampaio[1]

Resumo

Nesta investigação procurou-se identificar e caracterizar as concepções que os alunos do ensino secundário possuem sobre o infinito através da análise de um questionário respondido por 829 estudantes deste nível de ensino provenientes de 7 escolas. Formulou-se a questão de investigação: "há diferenças em relação às variáveis ano escolar e interpretação da noção de infinito, entre os alunos do ensino secundário?" e verificou-se que relativamente a alguns conceitos associados ao infinito, o 12º ano apresenta melhores resultados que os restantes anos de escolaridade, no entanto quando se passa para a comparação de cardinais de conjuntos infinitos não há diferenças significativas entre os diferentes anos de escolaridade, tratando-se de um conceito não intuitivo.

Palavras-chave: Infinito Actual. Infinito Potencial. Ensino Secundário.

Abstract

In this research we tried to identify and characterize the conceptions of secondary students about the infinity through the analyses of a questioner answered by 829 students of 7 high schools. Were formulated the investigation question: Is there any difference in school year and conceptions of infinity, between the high school students?, and we verified that some associated ideas with the infinity are best understood by the 12º class, but with the infinity cardinal's correspondences there are no significance differences between the different school years, because it is a non intuitive concept.

[1] Licenciada em Ensino de Matemática. Mestre em Educação: Tecnologia Educativa. Departamento de Matemática da Escola EB 2,3/S Padre Martins Capela, Terras de Bouro, Portugal. E-mail: patisampaio@gmail.com

Keywords: Actual infinity. Potential infinity. Secondary school.

1. Introdução

O infinito tem motivado filósofos, teólogos, poetas e matemáticos, ao longo de vários séculos. Não se trata de uma simples questão de lógica, mas antes de uma questão que sempre necessitou de imaginação. A distinção entre *infinito potencial* e *infinito actual* remonta a Aristóteles e foi ressuscitada no século XIX com a teoria dos conjuntos infinitos de Georg Cantor que são apresentados como *infinitos actuais*.

Apesar de Aristóteles ter negado o *infinito actual*, alimentou as especulações acerca do tema. Para ele o *infinito potencial* era apenas uma construção da mente humana necessária para resolver problemas que envolvessem grandezas contínuas infinitamente pequenas ou números infinitamente grandes, enquanto que o *infinito actual* já admitia a existência de entidades de dimensão não finita, susceptíveis de formalizações. Segundo Aristóteles (1996 [350 a.C.], livro III, p. 71-88), o que está para além da compreensão, só pode existir potencialmente porque está para além da realidade. Ele admitiu o *infinito potencial* e negou qualquer possibilidade de tratar racionalmente o *infinito actual*. Ao longo dos tempos surgiram vários paradoxos envolvendo o tema do infinito. Um dos mais conhecidos é o de *Aquiles*, de Zenão de Eleia. O *infinito actual* só foi aceite como objecto de estudo na Matemática quando se conseguiu explicar racionalmente os paradoxos que o envolviam. Foi a partir de 1869 que os trabalhos de Cantor provocaram grandes mudanças quanto à concepção de infinito.

Cantor, natural de S. Petersburgo, doutorado em Berlim, com a sua teoria de conjuntos (*Mengenlehre*) ou teoria das multiplicidades (*Mannigfaltigkeitslehre*) aceitou o *infinito actual* e desenvolveu uma teoria que explicava os diferentes conjuntos infinitos, a teoria dos números cardinais transfinitos baseada num tratamento matemático ao *infinito actual*. Como os números 1, 2, 3, 4… não permitem a contagem dos elementos dos conjuntos infinitos, Cantor criou um novo tipo de número: o transfinito. Existe depois do finito, um transfinito que pode ser definido de forma precisa. Ao conjunto numerável atribui o menor cardinal transfinito $\aleph_0$ e ao contínuo atribuiu um número transfinito maior. As teorias de Cantor para a teoria de conjuntos revolucionaram então a Matemática. O *infinito actual* finalmente tinha sido incorporado na Matemática. Notemos que um *infinito actual* é aquele que pode ser concebido como uma entidade *completa*, ou seja, todos os seus elementos podem ser pensados num acto único.

Segundo Hilbert (1926, p. 236), "a clarificação definitiva da natureza do infinito tornou-se necessária, não apenas por interesse especial das diversas ciências particulares, mas antes para a honra do próprio conhecimento humano". Sendo um tema tão controverso ao longo da história e inserido no percurso escolar de um aluno de Matemática, decidiu-se analisar as diferenças em relação às variáveis ano escolar e interpretação da noção de infinito, entre os alunos do ensino secundário. Com este intuito realizou-se um *Estudo sobre as concepções de infinito* em 829 alunos dos 10º, 11º e 12º anos de escolaridade em sete estabelecimentos de ensino públicos. Este estudo, descritivo transversal, baseou-se na análise das respostas obtidas por estes alunos a um questionário sobre o infinito (MOORE, 1983, BORG; GALL, 1989).

2. Estudo

Neste estudo pretendeu-se analisar as concepções que os alunos possuem sobre o infinito. Para tal elaborou-se um questionário constituído por seis questões, de resposta aberta, múltipla escolha e verdadeiro/falso. No total, 829 alunos do ensino secundário público responderam ao questionário em contexto de sala de aula. Foi estabelecida a questão de investigação: "Há diferenças nas respostas correctas em relação às variáveis ano de escolaridade e interpretação da noção de infinito, entre os alunos do ensino secundário?".

As escolas envolvidas neste projecto são todas do norte de Portugal, ficando localizadas em Barcelos, Braga, Guimarães, Caldas de Vizela e Paredes. No total participaram sete instituições educacionais. A escolha destas escolas prendesse com o conhecimento de docentes de Matemática que trabalham nessas instituições e se disponibilizaram a passar os questionários aos alunos nas suas aulas.

Escolas	**Localidade**	**Ano lectivo**			**Total**	**%**
		10º	**11º**	**12º**		
Escola Secundária Martins Sarmento	Guimarães	191	48	128	367	44,3
Escola Secundária de Paredes	Paredes	0	72	56	128	15,4
Escola Secundária Francisco Holanda	Guimarães	27	48	1	76	9,2
Escola Secundária de Vizela	Vizela	52	23	0	75	9,0
Escola Secundária de Barcelos	Barcelos	0	0	75	75	9,0
Escola Secundária Carlos Amarante	Braga	45	22	0	67	8,1
Escola Secundária de Vilela	Paredes	20	15	6	41	4,9
		335	228	266	829	100,0

Quadro 1: Distribuição dos alunos por escolas e anos lectivos.

Através do quadro 1 podemos verificar que estiveram envolvidos 335 alunos do 10º ano, 228 do 11º ano e 266 do 12º ano, isto é, 40% dos estudantes são do 10º, 28% do 11º e 32% do 12º. Donde podemos afirmar que apesar de não estarem distribuídos uniformemente pelos três anos de escolaridade a percentagem de estudantes do 11º e 12º anos é muito semelhante e a do 10º ano é ligeiramente superior. Tal como seria de esperar, estiveram envolvidos mais indivíduos do sexo feminino que do masculino. Cerca de 59% são alunas e cerca de 41% são alunos, o que traduz a realidade das nossas escolas, ou do nosso país, uma vez que existem mais pessoas do sexo feminino do que do masculino.

A idade dos estudantes varia entre os 15 e os 25 anos, estando maioritariamente compreendida entre os 15 e os 19, isto é, 98,4% dos alunos têm idades correspondentes a este intervalo. Apenas 13 (1,6%) estudantes apresentam uma idade superior a 19 anos.

2.1 Caracterização do questionário

Com o intuito de analisar as concepções que os alunos possuem sobre o infinito procedeu-se à elaboração de um questionário sobre o tema. Tendo por base as investigações realizadas em Portugal por João e Rodrigues (1990) sobre a evolução do conceito de infinito ao longo da progressão escolar, usando um questionário proposto a 655 alunos dos 8º, 9º e 11º anos de escolaridade do distrito de Leiria; por Rodrigues (1994) sobre as concepções de infinito em cerca de 150 futuros professores de Matemática de diversas escolas superiores de educação e universidades e por Martinho (1996) sobre uma análise das concepções de infinito de uma turma (11 alunos) do 10º ano de Métodos Quantitativos em Guimarães; foi elaborado um questionário sobre o infinito composto por seis questões.

Também se teve em conta as investigações realizadas no estrangeiro sobre o tema, que neste caso, contrariamente a Portugal, são imensas. Assim, considerou-se a investigação realizada por Tirosh e Stavy (1991) em 200 alunos sobre a comparação do infinito físico e o matemático em alunos dos 7º, 8º, 10º e 12º anos; por Waldegg (1996) sobre a coerência das respostas dadas a questões relacionadas com o infinito numa amostra de 95 estudantes do ensino secundário da área de ciências; por Singer e Voica (2003) sobre as percepções do infinito de 172 alunos com uma idade compreendida entre 10 e 19 anos; por Igliori e Silva (1998) que compararam as respostas dadas por 36 estudantes que frequentavam o 1º ano do Curso de Computação com as de 14 alunos finalistas do Curso de Matemática num questionário sobre a concepção de números reais; por Tall (1980a, 1992, 2001) sobre as concepções de infinito, limites e números reais.

O questionário é composto por seis questões abordando diversos temas relacionados com o infinito (quadro 2).

Questão		Item	Tema
1	Aberta	Resposta curta	Infinito potencial
2	Aberta	Resposta curta	Noção de infinito
3	Dicotómica	Valor lógico	Concepções aprendidas no 3º ciclo
4	Aberta	Resposta curta	Limites e séries
5	Aberta	Resposta curta	Número de elementos de um conjunto
6	Múltipla escolha	Múltipla escolha	Cardinal de um conjunto

Quadro 2: Categorização das questões do questionário.

2.2 Questão 1

A primeira questão refere-se a uma competição impossível, à qual ganha quem pronunciar o número mais elevado. Vejamos um pequeno excerto do texto:

> "Meu pai olhou em volta com superioridade (…) e principiou:
> — Um bilião de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões de biliões …
> (…) O príncipe Otão aproximou-se, e preparava-se para lhe colocar a medalha no peito, quando Gianni Binacchi bradou:
> — Mais um!
> A multidão precipitou-se no hemiciclo e ergueu este último em triunfo.
> (…) — Se tivesse dito mais dois, ganhava eu (pai)."

Uma grande maioria dos alunos (63,4%) respondeu acertadamente, ou seja, conseguiu perceber que o pai não tinha razão, isto é, para ganhar não bastaria ter dito mais dois. É de salientar que esta percentagem foi aumentando com o ano de escolaridade, ou seja, 60,6% para os alunos do 10º ano, 64,5% para os do 11º ano e 66,2% para os do 12º ano.

Quanto ao número de alunos que responderam que o pai tinha razão, em percentagem, os estudantes do 10º e 11º anos comportaram-se da mesma forma e a percentagem de alunos do 12º ano foi praticamente metade da destes anos, ou seja, 9,8%. Denotando-se aqui, em conjugação com os resultados anteriores, uma interpretação mais correcta do texto por parte dos indivíduos que frequentavam o 12º ano de escolaridade.

Por fim, é necessário referir que 20,9% dos alunos não responderam à questão (talvez devido à extensão do texto).

	Percentagem de respostas			
	10º	**11º**	**12º**	**Grupo total**
O pai tem razão	18,5%	18,4%	9,8%	15,7%
O pai não tem razão	60,6%	64,5%	66,2%	63,4%
Não respondeu	20,9%	17,1%	24,0%	20,9%

Quadro 3: Percentagem de respostas dadas à primeira parte da questão 1.

A outra parte da questão 1, sobre quem poderia ganhar o concurso, obteve cerca de 50% de respostas "ninguém" e "quem disser o número mais elevado", apresentando a primeira uma percentagem superior (28,2%). Para quem respondeu acertadamente que ninguém poderia ganhar o concurso, ocorreram vários tipos de respostas. Vejamos algumas:

> Sujeito A - "Não porque alguém poderia intervir e dizer *mais três* ou *mais quatro* e assim sucessivamente. E ninguém poderia ganhar o concurso porque os números são infinitos e ia haver sempre alguém que dissesse um número maior."

> Sujeito B - "Este pai não tem razão, pois é uma competição infinita. Eles estariam ali muito tempo, pois ninguém consegue chegar ao fim de uma competição infinita. Acho que ninguém poderá ganhar o concurso, pois haverá sempre alguém que diga mais um."

> Sujeito C - "Não era necessário ser mais dois, bastava apenas dizer uma quantidade infinitamente pequena que assim adicionada ao número, seria um número superior que tinha sido dito. Ninguém poderia ganhar pelo facto de não se conhecer o limite dos números e pelo facto de qualquer pessoa poder dizer mais um."

> Sujeito D - "Para ganhar não bastava ter dito mais dois. Só poderia ganhar alguém se o concurso tivesse um tempo limite, porque senão estaríamos sempre a contar e nunca chegaríamos ao maior número."

Para quem considerou que o concurso era válido e que o ganharia quem dissesse o número mais elevado (21,4%), há que salientar que, destes, cerca de 26% responderam que ganharia o último a responder, verificando-se que está presente a noção que os números naturais, reais, …, formam um conjunto infinito.

> Sujeito E - "O pai não tem razão porque existe sempre um número [natural] acima do que foi dito (k+1), deste modo se ele pronunciasse (k+2) mais dois, o outro colocava mais um (k+2+1), o que era maior. Deste modo, quem ganhava era o último a pronunciar-se."

Houve também quem referisse que Gianni Binacchi iria sempre ganhar o concurso, tendo interpretado o texto não em termos matemáticos, mas reflectindo sobre valores humanos, salientando a sua persistência.

Sujeito F - “Não porque se o pai tivesse dito mais 2, o outro concorrente (Gianni Binacchi) teria dito mais três, pois o outro concorrente respondia sempre depois do pai, logo diria sempre um número acima do número do pai.”

Uma percentagem relativamente elevada (10,7%), considerou que o pai teria razão, isto é, para ganhar o concurso bastaria ter dito mais dois, o que traduz uma ausência da noção de infinito. É de salientar que esta percentagem vai diminuindo à medida que se avança no ano de escolaridade, ou seja, é de 14,0% no 10º ano, 11,0% no 11º ano e de 6,4% no 12º ano.

O quadro 4 resume os dados obtidos nesta questão, categorizando as respostas em cinco hipóteses: “ninguém”, “quem disser infinito”, “quem disser o número mais elevado”, “o pai” e “Gianni Binacchi”. De ressaltar a ausência de resposta por parte de 20,2% dos alunos (talvez devido à extensão do texto).

	Percentagem de respostas			
	10º	**11º**	**12º**	**Grupo total**
Ninguém	25,0	31,5	29,4	28,2
Quem disser infinito	11,1	18,0	16,5	14,7
Quem disser o número mais elevado	22,7	24,6	16,9	21,4
O pai	14,0	11,0	6,4	10,7
Gianni Binacchi	6,3	5,3	2,6	4,8
Não respondeu	20,9	9,6	28,2	20,2

Quadro 4: Percentagem de respostas dadas à segunda parte da questão 1.

2.3 Questão 2

O leque de palavras que os alunos do ensino secundário associam ao infinito é muito variado, tendo sido contabilizadas 44 designações diferentes. As três mais referidas são: “sem fim”, “universo” e “muito grande”, representando 76,4% do total de respostas dadas. No caso dos 10º e 11º anos, a expressão “sem fim” salienta-se das outras duas, enquanto que no 12º ano não há diferenças na percentagem de respostas dadas.

Pela análise da enorme lista de palavras associadas ao infinito (quadro 5), há algumas que iremos focar. Por exemplo, os alunos associam os “números” ao infinito, o que é facilmente compreensível, já que desde o 3º ciclo que eles sabem que os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são infinitos. Também o termo "incontável" se associa a esta ideia de contagem que não termina, podendo ser associada à noção que os conjuntos numéricos já mencionados são infinitos. Seguindo esta linha de pensamento, o termo "ilimitado" está associado a algo sem limites, que não termina.

	Número de respostas			
	10º	11º	12º	Grupo total
Sem fim	127	84	62	273
Universo	80	48	58	186
Muito grande	53	56	65	174
Números	30	23	32	85
Ilimitado	21	28	29	78
Inatingível	27	26	22	75
Incontável	21	20	20	61
Indefinido	20	18	22	60
Biliões de biliões ...	32	13	10	55
Longínquo	16	16	11	43
Horizonte	25	3	10	38
Além	11	15	12	38
Eternidade	21	8	6	35
Céu	8	9	16	33
Contínuo	19	4	4	27
Inimaginável	13	3	9	25
Todo	17	2	4	23
Recta	12	7	4	23
Sempre	8	10	0	18
Mar	5	4	9	18
Impossível	3	6	6	15
Multidão	5	3	6	14
Muito pequeno	1	2	10	13
Amor	3	4	5	12
Matemática	4	2	6	12

Quadro 5: Ideias que os alunos associam ao infinito.

Por fim, temos de referir ainda algumas palavras que não aparecem no quadro 5, uma vez que contabilizaram menos de 10 respostas, a saber: circunferência, vazio, areia, plano, π, sabedoria, tempo, deserto, abstracto, incompreensível, subjectivo, vida, intervalo, assímptotas, hipérbole, parábola, luz, aberto e invisível.

2.4 Questão 3

Esta questão referia-se a conceitos aprendidos no 3º ciclo do ensino básico e, de um modo geral, os alunos responderam acertadamente. O quadro 6 indica a percentagem de respostas correctas dadas à questão 3 pelos estudantes de acordo com o seu ano de escolaridade.

3. Indica o valor lógico das seguintes afirmações, assinalando com um X a resposta correcta.

		Respostas correctas %			
		10º	**11º**	**12º**	**Grupo total**
1.	Todo o segmento de recta contém um conjunto infinito de pontos.	58	55	53	56
2.	3,14	61	62	70	64
3.	Todo o plano contém um número infinito de pontos.	74	72	75	74
4.	0,0(9) > 0,0999999999999	**49**	**39**	53	**47**
5.	Entre quaisquer dois pontos de uma recta é sempre possível existir outro.	79	80	83	80
6.	1,(3) é uma dízima infinita periódica.	80	83	88	84
7.	Toda a recta contém um conjunto infinito de pontos.	87	90	88	88
8.	0,(7) – 0,777777 = 0	60	60	70	63

Quadro 6: Percentagem de respostas correctas na questão 3.

Para se distinguir melhor, os valores negativos obtidos estão assinalados a negrito. De facto, a única questão que teve uma percentagem negativa de respostas correctas foi a 3.4 que se referia às dízimas infinitas periódicas, isto é, mais de metade dos alunos consideraram que 0,0(9)<0,0999999999999. É de salientar que os estudantes do 12º ano obtiveram valores positivos, nesta questão, ainda que muito próximos da negativa.

2.5 Questão 4

A questão 4.1 obteve apenas uma taxa de não respostas de 3,2%, sendo mais notória no 10º ano de escolaridade. Maioritariamente os alunos responderam negativamente à questão, dizendo que $200 \neq 100 + 50 + 25 + 12,5 + 6,25 + 3,125 + \ldots$, isto é, 64,1% dos estudantes consideraram esta divisão sucessiva do número 200 como um processo que não termina, inacabado, isto é, aferindo o *infinito potencial* e apenas 32,7% consideraram o processo *acabado*, considerando a soma como um todo, já que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{200}{2^n}=200,\ n\in\mathbb{N}$.

4.1 Será que posso afirmar que 200 = 100 + 50 + 25 + 12,5 + 6,25 + 3,125 + …?

	Percentagem de respostas			
	10º	11º	12º	Grupo total
Não	67,5	60,5	62,8	64,1
Sim	27,5	38,6	34,2	32,7
Não respondeu	5,0	0,9	3,0	3,2

Quadro 7: Percentagem de respostas obtidas à questão 4.1 pelo ano de escolaridade.

Vejamos algumas respostas dadas pelos alunos.

Sujeito G - "Sim, mas porque a parcela seguinte diminui para metade, o que faz com que chegando a um número ele seja tão pequeno que todos somados, ao fim de infinitas somas, dê 200. Se as reticências forem até ao infinito."

Sujeito H - "Não porque a soma $\frac{200}{2}+\frac{\frac{200}{2}}{2}+\frac{200}{2\times 4}+\frac{200}{2\times 8}+\ldots$ dará um número que arredondado é 200. O valor da soma não é 200, apenas tende para 200."

Sujeito I - "Não porque o total desta soma indeterminada nunca vamos poder saber, já que qualquer número pode ser dividido por dois. Esta soma só irá terminar quando se atingir o valor zero, coisa que nunca acontecerá."

Sujeito J - "Não porque iríamos ficar sempre a dividir números, porque ao contrário do que os antigos gregos pensavam, que existia uma partícula indivisível (o átomo), essa partícula não existe porque todos os números são divisíveis."

A questão 4.2 obteve uma taxa de não respostas muito acentuada no 10º ano, 21,8%, facilmente explicável já que o estudo de limites só é introduzido no 11º ano e aprofundado no 12º ano. O cálculo de $\lim_{n\to+\infty}\frac{200}{2^n},\ n\in\mathbb{N}$ muito comum no último ano de escolaridade do ensino secundário pode tornar-se muito difícil para quem não aprendeu ainda este conceito. Desta forma, apesar da percentagem de alunos do 10º ano que não responderam à questão ser muito alta, a percentagem baixa para 11,6% dos alunos quando considerado o grupo total.

A divisão sucessiva do número 200 da forma como está descrita no enunciado do questionário tende para 0 e os estudantes que acertaram cifram os 37,9% no 10º ano, 64,5% no 11º ano e 82,0% no 12º ano, o que evidencia diferenças substanciais, aumentando consideravelmente o número de respostas correctas à medida que se eleva o ano de escolaridade. Se considerarmos os 829 alunos, os resultados obtidos são positivos, tendo 59,4% deles acertado.

4.2 Para que valor tende esta divisão sucessiva do número 200?

	Percentagem de respostas			
	10º	**11º**	**12º**	**Grupo total**
Zero	37,9	64,5	82,0	59,4
Mais infinito	15,5	14,9	6,8	12,5
Menos Infinito	8,1	6,6	4,5	6,5
Entre dois e duzentos	11,6	4,8	0,7	6,3
Um	5,1	4,4	1,5	3,7
Não respondeu	21,8	4,8	4,5	11,6

Quadro 8: Percentagem de respostas obtidas à questão 4.2 pelo ano de escolaridade.

Pela análise do quadro 8 verifica-se que 29,0% dos indivíduos responderam que esta divisão sucessiva do número 200 tendia para mais infinito, menos infinito, um ou para um valor entre dois e duzentos, sendo estes valores mais acentuados no 10º ano e muito menos no 12º ano.

2.6 Questão 5

A questão 5 é constituída por quatro alíneas e refere-se ao número de elementos que um conjunto possui, tendo sido já abordada no ensino básico. A percentagem de respostas correctas é muito semelhante nas duas primeiras questões que se referem a conjuntos finitos e está acima dos 90%. Quanto à questão 5.3 há um pequeno decréscimo, no entanto a percentagem de respostas correctas contínua muito elevada. Já relativamente à questão 5.4, apura-se uma gradação crescente à medida que se avança o ano de escolaridade sendo 22,4% de respostas correctas para o 10º ano, 31,6% para o 11º ano e 42,1% para o 12º ano, isto é, os valores são sempre inferiores a 50%, denotando-se uma enorme lacuna na compreensão do conceito de intervalo de números reais.

A primeira das quatro alíneas desta questão referia-se ao cardinal do conjunto vazio tendo os alunos respondido zero elementos em 96% dos casos. Realça-se o facto de 20 (2,4%) alunos distribuídos pelos três anos de escolaridade terem respondido que o conjunto vazio possui infinitos elementos e 4 (0,5%) terem afirmado que possuía um elemento. Nesta questão, 1,1% dos estudantes não respondeu.

Na questão 5.2, 96,3% dos estudantes responderam que o conjunto era formado por quatro elementos e mais uma vez, alguns alunos (15, ou seja, 1,8%) consideraram que o conjunto era infinito. Nesta questão, 1,9% não respondeu.

Na questão 5.3, decidimos analisar o tipo de respostas que os alunos dariam quanto ao número de elementos de um conjunto infinito. Pois bem, obteve-se quatro tipos de respostas: "infinito", "mais de cinco", "cinco" e "impossível de contar". Considerar que um conjunto com reticências é infinito foi o mais comum (89,2%). No entanto, é de salientar que alguns alunos apenas disseram "mais de cinco" (2,1%), outros afirmaram que o conjunto possuía "cinco" elementos (5,5%) e houve quem respondesse que era "impossível de contar" (1,4%). Acrescenta-se ainda que não há grandes diferenças entre os três anos de escolaridade, denotando-se uma pequena subida quanto às respostas correctas dadas pelo 12º ano, mas muito ligeira. Por fim, 1,8% dos alunos não responderam à questão.

A questão 5.4 foi a que gerou mais controvérsia dentro deste grupo, quer pelo elevado número de respostas erradas, quer pela sua diversidade. Apenas 259 dos 829 alunos responderam correctamente que o intervalo $[1,3]$ apresenta infinitos elementos, ocorrendo uma grande diferença entre os três anos de escolaridade, isto é, 22,4% para o 10º ano, 31,6% para o 11º ano e

42,1% para o 12º ano, embora todas inferiores a 50%.

Resulta pela observação do quadro 9 que alguns estudantes (1,3%) responderam que este intervalo tem muitos elementos, outros (1,2%) consideraram que era impossível contar os seus elementos, ou que o conjunto não possuía elementos (0,5%) ou apenas afirmaram que o intervalo possuía todos os números entre 1 e 3 (14,5%).

Mais intrigantes foram as outras três respostas que quase 50% (49,1%) dos alunos escreveram: "um", "dois" e "três". Alguns alunos (1,6%) consideraram o número "1,3" ao invés do intervalo $[1,3]$ tendo respondido que este conjunto só possuía um elemento. Outros (28,3%) consideraram os números 1 e 3 tendo respondido dois elementos e por fim, 19,2% dos alunos responderam que este intervalo possuía três elementos: 1, 2 e 3. Nesta última resposta eles foram capazes de imaginar o número natural entre o 1 e o 3, mas não conseguiram pensar nos infinitos números reais que existem entre o 1 e o 3, enfatizando a incompreensão do conceito de intervalo de números reais aprendida no 9º ano de escolaridade e desenvolvida ao longo do ensino secundário.

5.4 Quantos elementos tem o conjunto $[1,3]$?

	Percentagem de respostas			
	10º	**11º**	**12º**	**Grupo total**
Infinito	22,4	31,6	42,1	31,2
Muitos	1,2	0,0	2,6	1,3
Todos os números entre 1 e 3	15,8	8,8	17,7	14,5
Três	18,5	25,4	14,6	19,2
Dois	34,0	28,9	20,7	28,3
Um	2,1	2,2	0,4	1,6
Zero	0,6	0,9	0,0	0,5
Impossível de contar	3,0	0,0	0,0	1,2
Não respondeu	2,4	2,2	1,9	2,2

Quadro 9: Percentagem de respostas obtidas à questão 5.4 pelo ano de escolaridade.

2.7 Questão 6

A última questão do questionário é a mais importante e refere-se directamente aos cardinais de diversos conjuntos. O quadro 10 mostra a percentagem de respostas correctas dadas pelos estudantes de acordo com o ano de escolaridade. Acrescenta-se que a taxa de abstenção é muito baixa variando entre os 1,6% e os 3,5% dependendo da alínea.

6. Considera os conjuntos A e B e indica uma relação entre os seus cardinais, assinalando com um X a resposta correcta.

	A	B	Respostas correctas %			
			10º	11º	12º	Grupo total
1.	Todos os pontos de uma recta	Todos os pontos de um quadrado	30	37	23	30
2.	Todos os pontos de um segmento de recta	Todos os pontos de uma recta	21	**20**	**16**	**19**
3.	Todos os pontos pertencentes ao intervalo $[0,1]$	Todos os pontos pertencentes ao intervalo $[0,2]$	23	**18**	**18**	**20**
4.	O conjunto dos números naturais	O conjunto dos números naturais pares	25	28	21	25
5.	O conjunto dos números racionais	O conjunto dos números irracionais	32	30	35	32
6.	O conjunto dos números naturais	O conjunto dos números racionais	33	36	30	32
7.	O conjunto dos números inteiros	O conjunto dos números naturais	38	46	52	45
8.	O conjunto dos números racionais	O conjunto dos números reais	60	54	54	56

Quadro 10: Percentagem de respostas correctas obtidas à questão 6.

O primeiro dado a assinalar é que a percentagem de respostas correctas é muito baixa. Apenas a questão 6.8 obteve valores positivos para os três anos de escolaridade e a questão 6.7 para o 12º ano. Para melhor se distinguir os resultados, os valores positivos foram sombreados e os valores inferiores ou iguais a 20% foram assinalados a negrito. Nesta última situação estão os 11º e 12º anos de escolaridade nas questões 6.2 e 6.3.

Para melhor identificar as diferenças entre os três anos de escolaridade, elaborou-se um gráfico de barras que resume os dados do quadro 10. Pela observação do gráfico 1, verifica-se que a percentagem de respostas correctas relativamente a cada ano de escolaridade varia conforme a questão não havendo qualquer padrão.

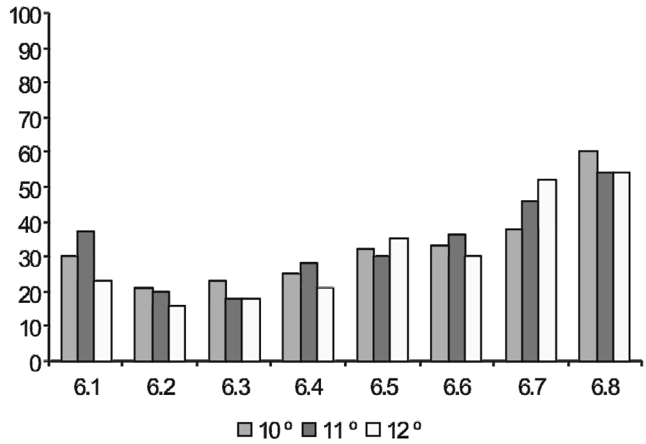

Gráfico 1: Percentagem de respostas correctas à questão 6.

3. Discussão dos resultados

Pela análise da percentagem de respostas correctas obtidas nas seis questões que compõem o questionário respondido por 829 alunos do ensino secundário, pode-se verificar que a pergunta que suscitou mais dúvidas, ou melhor, uma percentagem de respostas incorrectas mais elevada foi a questão 6, que abordava directamente a comparação da cardinalidade de conjuntos infinitos. Deste modo, pode-se concluir que “o estabelecimento de uma bijecção entre um conjunto infinito e uma sua parte própria é o obstáculo mais difícil de superar para compreender os conjuntos infinitos” (WALDEGG, 1996, p. 107). A única comparação de cardinais que obteve uma percentagem de respostas correctas superiores a 50% foi entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números reais, em que 56% dos estudantes consideram que $\#\mathbb{Q}<\#\mathbb{R}$, mas neste caso a intuição não os induz em erro já que $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

Ao verificar as respostas correctas obtidas na questão 6, que são muito baixas, não se estabeleceu qualquer relação com o ano de escolaridade, ou seja, o *infinito actual* não é um conceito que *amadurece* com o tempo, mas ao invés, tem de ser trabalhado para ser aprendido (SINGER; VOICA, 2003).

A noção de inclusão é intuitiva e é aprendida ainda no ensino básico, já a de cardinalidade, que fundamenta a teoria de conjuntos de Cantor, não é intuitiva, entrando em conflito, frequentemente, com a de inclusão e não é obrigatoriamente aprendida no ensino secundário (FISCHBEIN, 1978). Fischbein foi o pioneiro no estudo sobre as intuições do infinito. Daí a confusão que se gera ao afirmar, por exemplo, que o conjunto dos números naturais pares é uma parte própria do conjunto dos números naturais e, no entanto, ambos apresentam o mesmo cardinal. Para compreender a ideia de cardinalidade de um conjunto infinito é necessário aceitar o *infinito actual*, tema muito controverso ao longo da história da Matemática.

> A mudança para um pensamento matemático mais avançado envolve uma transição difícil, desde uma posição onde os conceitos têm uma base intuitiva baseada na experiência, até outra em que eles se especificam em definições formais e as suas propriedades reconstruídas através de deduções lógicas. (TALL, 1992, p. 1)

A primeira questão abordava o *infinito potencial* já que retratava um processo sem fim. Para quem considerasse a série dos números naturais, é sempre possível obter o sucessor do número em causa, ou seja, ninguém poderia ganhar o concurso. Pela análise das respostas dadas verificámos que apesar da maioria dos alunos saber que $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito, a forma como responderam à questão foi muito variada, não se expressando de uma forma matematicamente correcta e utilizando o termo "infinito" indevidamente.

Das respostas dadas pelos estudantes, verificou-se que eles, numa esmagadora maioria, apenas consideraram o conjunto dos números naturais e muito poucos referiram que a soma não teria de ser obrigatoriamente de uma unidade, bastaria que fosse uma quantidade superior ao número em causa podendo ser bastante pequena, infinitesimal. Os alunos quando pensam num número, em geral, não consideram os infinitesimais (MORENO; WALDEGG, 1991, WALDEGG, 1996).

Na segunda questão verificamos que muitos estudantes associam a expressão "sem fim" ao infinito, o que demonstra que o conceito de *infinito potencial* é intuitivo, ao invés do conceito de *infinito actual* que tem de ser trabalhado, gerando muitas vezes situações conflituosas com a nossa intuição. Este último conceito está associado à ideia de totalidade, ou seja, não se refere a um processo sem fim, mas a um processo *alcançado*. Em contraste com os 273 estudantes que responderam "sem fim" estão os 23 que responderam "todo", o que confirma a ideia do *infinito potencial* ser intuitiva e a do *infinito actual* não o ser. Já Rodrigues (1994) tinha concluído que as respostas dadas, e neste caso em futuros professores de Matemática, revelam uma concepção de infinito limitada apenas ao *potencial*.

> Um processo (na sua origem, potencialmente infinito) considera-se agora *acabado* e os limites, *alcançados*. Esta é a forma que o matemático pensa hoje no *conjunto de todos os números*, sem que tenha a necessidade de numerar ou pensar cada um deles, individualmente. Este infinito chama-se *infinito actual*. (WALDEGG, 1996, p. 109)

Foram obtidas 44 ideias diferentes de infinito, demonstrando a falta de precisão do termo, isto é, "sob o nome *infinito* está associada a ideia de potencial e, às vezes, de infinitos actuais; infinitamente grandes e pequenos; referência a quantidades e espaços; na Matemática, relacionado com diferentes contextos como séries, geometria, limites; sob concepções estáticas e dinâmicas; …" (ERRÁZURIZ, 1991, p. 110-111)

Pela análise da terceira questão averiguamos que 88% dos alunos consideram que toda a recta contém um conjunto infinito de pontos, mas apenas 80% dos estudantes consideram que entre quaisquer dois pontos de uma recta é sempre possível existir outro, deste modo há 8% de indivíduos que apresentam uma inconsistência. Não obstante, a percentagem de alunos que considera que um plano contém um conjunto infinito de pontos diminui para 74% e a que considera que um segmento de recta contém um conjunto infinito de pontos já é de 56%.

Se compararmos os resultados obtidos na terceira questão com os da sexta verificamos que apesar de 56% dos alunos considerarem que um segmento de recta contém um conjunto infinito de pontos, apenas 19% afirmam que o cardinal do conjunto de pontos de um segmento de recta é igual ao cardinal do conjunto de pontos de uma recta, referindo, maioritariamente

(65%), que a recta possui mais pontos que um segmento de recta. Já Martinho (1996), Singer e Voica (2003) tinham concluído que os estudantes consideram que um segmento de recta possui um número infinito de pontos porque não são possíveis de contagem, mas é finito porque tem princípio e fim, contrariamente à recta, que é infinita, não tem princípio nem fim. A configuração e as dimensões das regiões geométricas tornam-se um obstáculo para a concepção de conjuntos de pontos contidos nelas.

A quarta questão estava relacionada com as noções de limites e séries infinitas. Era pedido aos alunos que considerassem a soma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{200}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Maioritariamente (64,1%) os estudantes consideraram que esta divisão sucessiva do número 200 se tratava de um processo que não termina, inacabado, isto é, inferiram apenas o *infinito potencial*, não considerando que a soma era 200. Apenas 32,7% consideraram o processo *acabado*, constatando a soma como um todo. Se tomarmos esta ideia intuitiva de que falta sempre algo para atingir 200, estamos a entrar no domínio da Análise não standard através dos infinitesimais.

Através da quinta questão pretendia-se comparar as ideias dos alunos relativas ao número de elementos que diversos conjuntos possuem sem formalizar a questão, isto é, não comparando cardinais. E tal como Igliori e Silva (1998) concluíram "o processo de elaboração do conceito de número real é conflituoso, uma vez que esse conceito traz no seu bojo noções que, durante séculos, criaram dificuldades de ordem filosófica". Verificou-se, tal como já referimos, que a maioria dos alunos (56%) considera que um segmento de recta contém um conjunto infinito de pontos e nesta questão, apenas 31,2% dos estudantes afirmaram que o intervalo $[1,3]$ contém um número infinito de elementos.

Outro facto curioso trata-se dos 36% de estudantes que consideraram $\pi = 3{,}14$, número que lhes é familiar, associado a uma dizima infinita não periódica, mas normalmente utilizado na forma de arredondamento. Deste modo, o uso das aproximações e da calculadora deve ser sempre contrabalançado com o valor exacto de um número (Igliori; Silva, 1998). É necessário prevenir a confusão que se gera entre um número e as suas aproximações que, para alguns alunos, têm o mesmo significado.

Os alunos concebem conjuntos infinitos, compreendendo que existem vários, no entanto, atribuem-lhes propriedades contraditórias relacionadas com as suas intuições. Estes manejam mais facilmente o conceito de *infinito potencial* do que o conceito de *infinito actual*.

4. Conclusão

Historicamente, os filósofos distinguiram entre *infinito potencial* (para cada número inteiro existe sempre um maior) e *infinito actual* (existe um conjunto de números inteiros). Já na actualidade, o *infinito actual* é aceite pela maioria dos matemáticos segundo a teoria de Cantor sobre números cardinais em termos de estabelecimento de correspondências um a um entre conjuntos. Aliás um conjunto infinito é definido, desde Dedekind, como aquele que tem uma bijecção com uma sua parte própria.

Relativamente a conceitos aprendidos no ensino básico como conjuntos infinitos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$), dízimas infinitas, números irracionais, intervalos de números reais, e a conceitos aprendidos no ensino secundário como limites, sucessões e séries infinitas, os alunos do 12º ano apresentam melhores resultados que os estudantes dos restantes anos de escolaridade. No entanto, relativamente à comparação de cardinais de conjuntos infinitos não há diferenças entre os três anos de escolaridade, ocorrendo uma tendência para extrapolar as concepções sobre conjuntos finitos para conjuntos infinitos, confirmando-se que o infinito não é uma noção intuitiva. A contradição surge pela tentativa de impor as ideias formadas com experiências finitas ao infinito, tendo essas imagens conceptuais de ser confrontadas com diferentes teorias para não causarem conflitos quando se dá uma alteração do contexto.

Um indivíduo pode em diferentes ocasiões ter intuições aparentemente conflituosas e simultaneamente não se aperceber dos conflitos cognitivos, mas noutras ocasiões os conflitos cognitivos podem ocorrer sem nenhuma razão aparente. As intuições do infinito são ricas nessas contradições. Para evocar um conflito cognitivo é necessário evocar simultaneamente dois factores mutuamente conflituosos. Segundo Fischbein (1978, p. 155), "duas interpretações contraditórias podem coexistir por um longo período de tempo sem o sujeito se aperceber da contradição”.

Nesta investigação debruçamo-nos sobre as concepções que os alunos possuem relativamente ao *infinito actual cardinal*, presentemente aceite pela maioria dos matemáticos, mas é necessário realçar que existe mais do que uma noção de infinito, tal como Tall (1992, p. 17) define:

> *Existe mais de uma noção de infinito*. O símbolo , usado em frases como “o limite à medida que *n* tende para o “, representa a ideia de infinito *potencial*… Existem pelo menos três noções de “infinito actual”: *infinito cardinal* (extensão da noção de contagem por comparação de conjuntos – a forma de infinito favorita dos matemáticos), *infinito ordinal* (o conceito proposto por Cantor em termos de comparação de conjuntos *ordenados*), e a noção de infinito não standard (generalizando a noção de *medir* dos números reais para um campo ordenado maior). Para simplificar eu denomino este infinito não standard de *medir o infinito*.

A investigação mostra-nos que há uma série de conflitos cognitivos na aprendizagem de conceitos matemáticos mais complexos como o infinito. Não existe um conceito único de infinito. Aliás há várias noções de infinito dependendo da teoria em que nos apoiamos. Contar, ordenar e medir são três características comuns aos números que estão associadas aos infinitos cardinais, ordinais e não standard e todos eles apresentam propriedades que entram em conflito com as experiências finitas e entre si.

> Os números são utilizados pelo menos com três propósitos na vida quotidiana — contar, ordenar e medir. No final do século passado, Cantor estendeu os dois primeiros ao introduzir cardinais e ordinais infinitos e tais interpretações são bem aceites na nossa cultura formal matemática. No entanto, há ocasiões em que estas extensões do conceito de número não são as mais apropriadas. (TALL, 1980b, 271)

Algumas propriedades do infinito consideradas *falsas* segundo a perspectiva dos cardinais podem ser *verdadeiras* num infinito não standard. Ao contrário dos cardinais infinitos, na Análise não standard, os conjuntos, por exemplo, 2 e não são *iguais*, o primeiro tem mais elementos que o segundo, tal como a intuição de uma criança indica. Deste modo, apesar das intuições sobre o infinito dos estudantes do ensino secundário serem conflituosas com a teoria dos cardinais infinitos, algumas destas concepções intuitivas apresentam propriedades consoantes com o infinito não standard. Tomemos outro exemplo. A nossa intuição diz-nos que num segmento de recta do dobro do tamanho de outro há o dobro dos pontos no primeiro relativamente ao segundo, isto porque a nossa intuição nos conduz a uma medição e não a uma contagem.

Recomenda-se que em investigações futuras se analise as concepções de infinito também segundo a Análise não standard, não se resumindo à teoria dos cardinais.

Tendo por objectivo alcançar um nível de pensamento mais elevado, pode ser elaborada uma webquest como "Escher e a procura do infinito" disponível na web pelo URL: http://patisampaio.no.sapo.pt, através da qual os alunos podem consultar um vasto leque de recursos sobre Maurits Escher e o infinito, contribuindo assim para a construção do conhecimento. Tendo em conta a complexidade do tema e a história controversa que circunda o infinito, a utilização de variadas fontes permite compreender melhor o passado para tentar responder ao desafio presente.

Referências

ARISTÓTELES. **Física**. Texto revisado y traduzido por J. L. Calvo Martinez. Madrid: Consejo superior de investigaciones científicas, 1996 [350 a.C.] (Coleccion hispanica de autores griegos e latinos)

BORG, W.; GALL, M. **Educational research:** an introduction. 5th ed. New York: Longman, 1989.

CANTOR, G. (1883a [1873]). Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels. In **Acta Mathematica.** nº 2. p. 305-310.

ERRAZURIZ, R. A 3-dimension conceptual space of transformation for the study of the intuition of infinity in plane geometry. In: *PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION* CONFERENCE, 15., 1991, Assisi, Italy. **Proceedings...** Assisi, Italy: Dipartimento di Matematica Dell'università di Genova, International Group For The Psychology Of Mathematics Education, 1991. v. 3, p. 109 - 119.

FISCHBEIN, E. Intuition and mathematical education. **2nd International Conference**

for the Psychology of Mathematics Educational, Osnabrueck, Germany, p. 148–176, 1978.

HILBERT, D. Sobre o infinito. In: HILBERT, D. **Fundamentos da geometria**. Lisboa: Gradiva. 2003[1898-99]. p. 234-255. (Mathematische Annalen, 95).

IGLIORI, S.; SILVA, B. A. **Conhecimento de concepções prévias dos estudantes sobre números reais:** um suporte para a melhoria do ensino-aprendizagem**.** In Reunião da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 21, 1998, Caxambu-MG. Atas em CD da 21a. Reunião da ANPED, 1998.

JOÃO, O.; RODRIGUES, M. Modelos construídos pelos alunos sobre o conceito de infinito. **Profmat 90**, Caldas da Rainha, Associação de Professores de Matemática, 1990.

MARTINHO, M. **O infinito através da obra de M. C. Escher**: uma experiência sobre as concepções acerca do infinito numa turma de métodos quantitativos. 1996. Dissertaçao - Universidade do Minho, Lisboa, 1996.

MOORE, G. **Developing and evaluating educational research**. New York: Harper Collins, 1983.

MORENO, L. E.; WALDEGG, G. The conceptual evolution of actual mathematical infinity. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, n. 22, p. 211-231, 1991. Disponivel em: http://www.springerlink.com/content/k882w23j31313428/ Acesso em: 31 jan. 2006.

RODRIGUES, M. **O conceito de infinito em futuros professores de matemática.** 1994. Dissertaçao - Universidade de Aveiro, Portugal, 1994.

SINGER, M.; VOICA, C. Perception of infinity: does it really help in problem solving? In: INTERNATIONAL CONFERENCE THE DECIDABLE AND THE UNDECIDABLE IN MATHEMATICS EDUCATION, 2003, Brno, Czech Republic. 2003. p. 252-256. Disponível em: http://math.unipa.it/~grim/21_project/21_brno03_Singer.pdf Acesso em 25 mar. 2006.

TALL, D. Mathematical intuition. In: INTERNATIONAL PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION CONFERENCE, 4., 1980a, Berkeley. p. 170 - 176. Disponível em: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1980d-int-lims-pme.pdf. Acesso em: 10 out. 2006.

TALL, D. The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 11, p. 271– 284, 1980b. Disponível em: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1980b-infmeasuring-num.pdf Acesso em: 16 out. 2006.

TALL, D. The transition to advanced mathematical thinking: function, limits, infinity and proof. In: GROWS, D. **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992. p. 495–511. Disponível em: http://www.warnick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992e-trans-to-amt.pdf Acesso em: 22 feb. 2006.

TALL, D. A child thinking about infinity. **Journal of Mathematical Behaviour**, Elsevier Science Inc., n. 1, vol. 20, p. 7-19, 2001. Disponível: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001l-childs-infinity.pdf Acesso em: 10 oct. 2006.

TIROSH, D.; STAVY, R. The relationship between mental models in mathematics and science. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 15., 1991, Assisi, Italy. **Proceedings...** Assisi, Italy: Dipartimento di Matematica Dell'università di Genova, International Group for The Psychology of Mathematics Education, 1991. v. 3, p. 286 - 293.

WALDEGG, G. Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. **Revista Mexicana de Investigación Educativa**, México, v. 1, n. 1, p. 107-122, 1996. Disponível em: http://www.comie.org.mx/v1/revista/visualizador.php?articulo=ART00183&criterio=http://www.comie.org.mx/documentos/rmie/v01/n001/pdf/rmiev01n01scC00n07es.pdf Acesso em: 15 abr. 2006.

Aprovado em abril de 2008.
Submetido em janeiro de 2008.