Bolema, Rio Claro (SP), Ano 22, nº 32, 2009, p. 161 a 188

O Intuitivo e o Lógico no Conhecimento Matemático: análise de uma proposta pedagógica em relação a abordagens filosóficas atuais e ao contexto educacional da matemática[1]

The Intuitive and the Logical in Mathematical Knowledge: analysis of a pedagogical proposal from a viewpoint of new philosophical approaches and in the educational context of mathematics

Renata Cristina Geromel Meneghetti [2]

Resumo

Este trabalho tem por objetivo retomar a proposta apresentada em Meneghetti e Bicudo (2003), referente à constituição do saber matemático, e analisá-la sob dois enfoques: em relação às concepções de conhecimento matemático após crise fundamentalista da matemática e ao contexto educacional da matemática. A investigação do primeiro enfoque foi feita analisando atuais reivindicações para a filosofia da matemática e a do segundo se deu, primeiramente, por meio de uma reflexão teórica e, em seguida, focalizando a implementação da proposta no processo de elaboração de materiais didáticos para o ensino e aprendizagem da matemática. Finaliza-se a pesquisa apresentado os principais resultados da aplicação de um desses materiais.

Palavras-chave: Conhecimento Matemático. Aspecto Intuitivo. Aspecto Lógico. Filosofia da Matemática. Educação Matemática. Proposta Pedagógica.

---

[1] Resultados parciais referentes à primeira questão tratada neste trabalho foram apresentados em Meneghetti (2003) e referentes a segunda em Meneghetti (2006); e uma versão preliminar desta abordagem foi apresentada no XII CIAEM Meneghetti (2007).

[2] Doutora em Educação Matemática - UNESP - Rio Claro. Docente do ICMC- USP: Instituto de Ciências Matemáticas de Computação da Universidade de São Paulo. Coordenadora do Setor de Matemática do CDCC – Centro de Divulgação Científica e Cultural-USP- São Carlos. Caixa Postal 668-CEP:13560-970. E-mail: rcgm@icmc.usp.br

Abstract

In this paper, we consider Meneghetti & Bicudo's proposal (2003) regarding the constitution of mathematical knowledge and analyze it with respect to the following two focuses: in relation to conceptions of mathematical knowledge following the fundamentalist crisis in mathematics; and in the educational context of mathematics. The investigation of the first focus is done analyzing new claims in mathematical philosophy. The investigation of the second focus is done firstly via a theoretical reflection followed by an examination of the implementation of the proposal in the process of development of didactic materials for teaching and learning Mathematics. Finally, we present the main results of the application of one of those materials.

Keywords: Mathematical Knowledge. Intuitive Aspect. Logical Aspect. Philosophy of Mathematics. Mathematics Education. Pedagogical Proposal.

Introdução

Em Meneghetti (2001) e Meneghetti e Bicudo (2003) apresentamos uma análise a respeito da constituição do saber matemático, percorrendo algumas das principais correntes filosóficas da matemática de Platão ao início do século XX. Nessa análise, apontamos que, nesse percurso, exceto em Kant, o saber matemático ou foi considerado como objeto puro da razão, ou como objeto exclusivo da experiência ou da intuição. À luz desse estudo, defendemos a proposta de que no processo de constituição do conhecimento matemático não é possível atribuir maior valor ao aspecto intuitivo ou ao lógico, ou mesmo concebê-los como excludentes, portanto, defendemos que o intuitivo apóia-se no lógico e vice-versa, em níveis cada vez mais elaborados, num processo gradual e dinâmico, tomando a forma de uma espiral, sendo que, o equilíbrio entre esses aspectos deve estar presente em cada um dos níveis dessa espiral.

Dando continuidade a essa investigação, no presente trabalho pretendemos refletir sobre as seguintes questões: (1) Como podemos contextualizar tal proposta no âmbito das atuais reivindicações para a Filosofia da Matemática? (2) Qual o significado dela no contexto da Educação Matemática? A investigação da primeira pergunta foi feita analisando posições filosóficas da matemática a partir do início século XX; a da segunda se deu, em princípio, por meio de uma reflexão teórica e, na seqüência, através da implementação da proposta no processo de elaboração de materiais didáticos para o ensino e aprendizagem da matemática e por fim, fechamos discutindo os resultados da análise da aplicação de um desses materiais.

Considerações sobre o conhecimento matemático: a origem da proposta

Filósofos e matemáticos, desde a época de Platão, nem sempre estiveram de acordo quanto à natureza do saber matemático. A esse respeito, ao analisarmos as concepções do conhecimento geral e do conhecimento matemático nas principais correntes filosóficas, de Platão ao início do século XX, chegamos as seguintes considerações (MENEGHETTI; BICUDO, 2003).

Antes de Kant, na História da Filosofia da Matemática é possível obter duas posições: (a) aqueles que buscaram fundamentar o saber matemático inteiramente na razão, dizemos que nesse grupo há prevalência do aspecto lógico do conhecimento; e (b) aqueles que buscaram fundamentar o saber matemático exclusivamente na intuição ou na experiência, dizemos que nesse grupo é privilegiado o aspecto intuitivo do conhecimento (MENEGHETTI; BICUDO, 2003).

No primeiro caso podemos citar o realismo platônico, o idealismo de Descartes e o racionalismo de Leibniz. A característica comum a essas três correntes filosóficas é a valorização, na constituição do saber matemático, da razão em detrimento da intuição sensível. No segundo, destaca-se, por exemplo, os trabalhos de Newton, Locke, Berkeley e Hume. Para esses últimos filósofos a matemática está sujeita à experiência[3] (MENEGHETTI; BICUDO, 2003).

Uma posição intermediária é verificada em Kant, o qual empenhou-se em mostrar que o empirismo e o racionalismo isoladamente não dão conta do conhecimento científico, como segue.

Em Kant, o conhecimento é uma elaboração do sujeito, as coisas "em

[3] Em Meneghetti e Bicudo (2003) o leitor encontrará uma descrição dos principais pontos das filosofias mencionadas nesses dois grupos, sendo que uma descrição detalhada de cada uma delas encontra-se em Meneghetti (2001).

si" não são cognoscíveis[4]. Conhecer é uma função ativa do sujeito, não é receber algo que está aí, senão criar algo que se conhece, em termos kantianos, colocar algo. Para ele, não podemos conhecer, com necessidade e universalidade[5], portanto *a priori*, a não ser que nosso próprio espírito crie segundo seus níveis. Assim, para ele "[...] a razão só entende aquilo que produz segundo os seus próprios planos; [...]."(KANT, 1997, Prefácio 2ª edição, p. 18)

Na filosofia de Kant um objeto nos pode ser dado apenas por meio da *sensibilidade* que diz respeito à "[...] capacidade de receber representações (receptividada), graças à maneira como somos afetados pelos objetos".(KANT, 1997, p. 61)

A *sensação* refere-se ao efeito de um objeto sobre a capacidade representativa, na medida em que por ele somos afetados. A intuição[6] que se relaciona com o objeto, por meio da sensação, denomina-se *intuição empírica*. A representação de um *corpo* na intuição nada contém que possa pertencer a um objeto em si, ela é somente o fenómeno de alguma coisa, mediante a maneira sob a qual somos afetados por tal coisa. (KANT, 1997, p. 61)

O *fenómeno* é o objeto indeterminado de uma intuição empírica e é constituído de dois elementos: (i) a *matéria* (elemento físico) ou o conteúdo, que significa algo que se encontra no espaço e no tempo e que, por conseguinte, contém uma existência e corresponde à sensação (KANT, 1997, p. 586); e (ii) a *forma* da intuição, a qual possibilita que o diverso do fenómeno possa ser ordenado segundo determinadas relações. A matéria nunca pode ser dada de maneira determinada a não ser empiricamente, porém sua forma encontrar-se *a priori* no espírito, pronta a aplicar-se a ela e portanto pode ser considerada independentemente de qualquer sensação. (KANT, 1997, p. 62) Assim, a matéria procede do objeto conhecido, e a forma é imposta pelo sujeito.

A intuição empírica nos permite apreender o objeto, representá-lo; mas é o entendimento que *pensa* esses objetos e é dele que provém os conceitos.[7] Contudo, na filosofia kantiana o pensamento tem sempre que se

[4] "É-nos completamente desconhecida a natureza dos objetos em si mesmo independentemente de toda esta receptividade da nossa sensibilidade." (KANT, 1997, p. 79)

[5] Em Kant um conhecimento é universal quando é válido em todo lugar e é necessário se ele for imprescindível.

[6] A intuição é uma operação, o ato do espírito que toma conhecimento diretamente de uma individualidade, ela nos dá conhecimento de um objeto particular, único.

[7] O conceito é uma unidade mental dentro da qual está compreendido um número indefinido de seres e de coisas.

referir, finalmente, a intuições, seja diretamente (*direct*), seja por rodeios (*inderecte*). (KANT, 1997, p. 61)

A matéria nos fornece intuição empírica, a forma *intuição pura*, a qual trata-se da forma pura[8] das intuições sensíveis, na qual todo o diverso dos fenómenos que se intui sob determinadas condições encontra-se absolutamente *a priori* no espírito.

Se por um lado Kant reconheceu que a experiência é insuficiente para fundamentar o conhecimento: "A sensibilidade não nos ensinará as coisas de forma confusa e obscura, na verdade, ela não nos ensinará nada a respeito das coisas [...]" (KANT, 1997, p. 60) Por outro lado, ele percebeu que "[...] estas condições subjetivas são, no entanto, substanciais na determinação da forma do objeto enquanto fenómeno." (KANT, 1997, p. 60)

Assim, os objetos nos são conhecidos pela experiência (como objetos dados), e, no entanto, esta deve regular-se pelos conceitos. (KANT, 1997, prefácio 2ª edição.) Portanto, nossos conceitos do entendimento devem estar fundamentados numa intuição correspondente. O conhecimento resulta, pois, da conjunção de intuições e conceitos.

Kant defendeu que a ciência não pode ser constituída por juízos analíticos[9], como queria Leibniz, pois se assim o fosse ela seria vã, seria pura tautologia, uma repetição do que já está contido nos conceitos dos sujeitos. Por outro lado, se a ciência fosse constituída por juízos sintéticos[10], por ligações de fatos, como queria Hume, não seria ciência, seria um costume sem fundamento, não teria validade universal e necessária.

Assim em Kant, todo conhecimento parte da experiência (trata-se aqui do que denominou de *sintético*); entretanto, o conhecimento deve tornar-se independente da experiência, pois a ciência deve ser universal e necessária (essas são as condições *a priori* do conhecimento). Os juízos científicos, em particular os da matemática, são, pois, de natureza *sintética e a priori*.

Portanto, percebemos nessa filosofia uma tentativa de se considerar,

---

[8] Kant chamou *puras* todas as reapresentações em que nada se encontra que pertença à sensação.

[9] Os juízos analíticos em Kant são aqueles nos quais o conceito do predicado está contido no sujeito. Esses juízos são verdadeiros em virtude de sua forma. Nada acrescenta ao sujeito, apenas o decompõe em seus elementos parciais.

[10] Os juízos sintéticos são aqueles nos quais o conceito do predicado não está contido no conceito do sujeito. Tais juízos são fundamentados na experiência (percepção sensível).

equilibradamente, na constituição do conhecimento, ambos os aspectos: o intuitivo e o lógico. Entretanto, apesar de tal tentativa, depois de Kant a experiência é novamente posta de lado, como aconteceu, em particular, com a Filosofia da Matemática.

No final do século XIX e início do XX, firmam-se três correntes filosóficas que pretendiam fornecer à matemática uma sólida fundamentação, a saber, o logicismo, o formalismo e o intuicionismo. O Logicismo se caracteriza pelo propósito de reduzir a matemática à lógica, destacando-se nesta linha os trabalhos de Frege e Russell (MENEGHETTI; BICUDO, 2003). Frege pretendia reduzir a aritmética à lógica e Russel tinha a pretensão de reduzir toda a matemática à lógica. Frege, por exemplo, concebeu o número como um objeto lógico, ideal, cujo acesso se dá unicamente por meio da razão. Quanto ao formalismo, o propósito de Hilbert foi o de unir o método logicista ao método axiomático, como forma de garantir a consistência nas investigações em matemática. No formalismo as coisas existem desde que novos conceitos e novas entidades possam ser definidos sem contradição(MENEGHETTI; BICUDO, 2003). No cerne do intuicionismo moderno, fundado por Brouwer, a matemática em sua formação abstrata é considerada puramente intuitiva e independente da lógica; nessa filosofia toda matemática pode ser derivada de séries fundamentais de números naturais meio de métodos construtivos intuitivamente claros (WILDER, 1965). Tais correntes, embora com propósitos diferentes, possuíam como características comuns: o abandono da experiência como fonte de conhecimento e o consenso do caráter absoluto do conhecimento matemático (SILVA, 1999). Entretanto, essas correntes falharam em seus propósitos (SNAPPER, 1979, TYMOCZKO, 1994, ERNEST, 1991), e a natureza do saber matemático passou a ser novamente questionada. Acreditamos que tal crise é produto de se considerar os aspectos intuitivo e lógico sempre como excludentes e, portanto, apontamos para a importância de concebê-los como complementares no processo da constituição do conhecimento matemático (MENEGHETTI; BICUDO, 2003, p.67), fato que se evidencia quando analisamos o desenvolvimento histórico do cálculo, o qual, como destacado em (MENEGHETTI; BICUDO, 2002), se solidificou mediante as contribuições tanto do empirismo como do racionalismo, sem ser possível atribuir maior valor a um ou a outro:

> "[...] embora de linhas filosóficas diferentes, tanto o trabalho de Newton como o Leibniz foram extremamente importantes para o desenvolvimento do cálculo. Suas contribuições, conjuntamente, colaboraram para a edificação desse campo de saber; isoladamente, mostraram-se insuficientes, uma vez que há conceitos envolvidos nos dois métodos que não foram totalmente clarificados." (MENEGHETTI; BICUDO, 2002, p. 114).

A proposta

Assim à luz desses estudos, defendemos que no processo de constituição do conhecimento matemático, não é possível atribuir maior valor ao aspecto intuitivo ou ao lógico, ou mesmo concebê-los como excludentes e que o intuitivo apóia-se no lógico e vice-versa, em níveis cada vez mais elaborados, num processo gradual e dinâmico, em forma de espiral. Entendemos que o equilíbrio entre os aspectos lógico e intuitivo deve estar presente em cada um dos níveis e que, nesses últimos, o caráter intuitivo e o lógico estão suscetíveis a mudanças, por exemplo, o que é lógico num nível pode passar a ser intuitivo num outro.

A intuição está sendo tomada como um conhecimento de apreensão imediata. Admite-se que há intuições que nos permitem apreender as características particulares dos objetos e outras que nos permitem apreender o caráter geral dos mesmos e ainda, que há intuições que se relacionam com o objeto através da sensação (*intuição sensível*)[12] e outras que obtemos somente por meio da razão (*intuição intelectual*)[13].

Chauí (1994, p. 63-64) esclarece que, por meio da intuição sensível obtemos o conhecimento direto e imediato das qualidades sensíveis do objeto (tais como, cor, sabor, paladar, textura, dimensão) ou de estados internos ou mentais (como lembranças, desejos, sentimentos). Já a intuição intelectual nos fornece o conhecimento direto e imediato dos princípios da razão, das relações necessárias entre seres ou idéias, da verdade de uma idéia ou de um ser.

---

[12] No sentido kantiano mencionado anteriormente.

[13] Essa intuição, como posto em Descartes (1989, p.78), refere-se a um conceito da mente pura e atenta que nasce apenas à luz da razão.

Já a lógica está sendo considerada como uma linguagem formal, por meio da qual sistematizamos (formalizamos) o conhecimento e o mesmo adquiri caráter de necessidade e universalidade. Essa é uma concepção que se inspira em Frege (1959), mas difere-se desta visto que ele considerou a lógica como uma linguagem **puramente** formal, a qual não necessita ser suplementada por qualquer razão intuitiva e, no nosso caso, estamos entendendo que a lógica e a intuição apóiam-se mutuamente.

Tem-se ainda a concepção de conhecimento como construtível e falível. Falível no sentido de não ser absoluto, estando sempre suscetível a revisões; e construtível, concebendo o conhecimento matemático como uma elaboração do sujeito, a qual se dá mediante o equilíbrio entre os aspectos intuitivos e lógicos, tal como posto acima.

A proposta frente às atuais reivindicações para a filosofia da matemática

Como fruto da crise ocasionada pelo fracasso das correntes fundamentalistas do final do século XIX e início do XX, novas propostas surgiram na direção de se compreender o saber matemático; ao analisarmos algumas dessas posições podemos perceber que:

(i) Enquanto as correntes filosóficas da matemática dominantes no final do século XIX e início do XX buscavam reduzir o conhecimento matemático a um único aspecto (seja ele lógico, intuitivo ou formal), hoje se procura analisar a matemática como parte da criação humana e, como tal, sujeita a erros e correções. Esse fato pode ser percebido em diversos trabalhos tais como (HERSH; LAKATOS; THOM; GRABINER; WILDER apud TYMOCZKO, 1985); (KITCHER, 1984, PUTMAN, 1975 apud ERNEST, 1994). Seguem algumas dessas posições.

Para Hersh (1985) a Matemática não pode ser concebida como uma ciência apoiada em verdades absolutas, pois, nossa experiência real com a matemática apresenta incertezas em abundância. Para esse autor uma filosofia mais adequada e mais convincente da matemática deveria levar em consideração o significado e a natureza matemática.

Lakatos (1985) considera que a matemática não é radicalmente separada das ciências naturais, nas quais o conhecimento é a posteriori e falível. Por outro lado, a matemática também não é uma ciência apenas empírica. Esse autor vê a matemática como uma ciência "quase-empírica"[14]. Uma teoria deste tipo inicia quando seus assuntos ainda não estão determinados, tendo por objetivo chegar aos princípios básicos. O conhecimento é falível, sendo as afirmações básicas um conjunto especial de teoremas, tradicionalmente, sentenças de observações ou resultados experimentais, e suas regras de inferências podendo ser formuladas com menos precisão. Ainda sugere que teoremas da matemática informal sejam falsificadores potenciais para teorias formais. Segundo ele, se insistirmos que uma teoria formal seja a formalização de alguma teoria informal então, uma teoria formal deverá ser "refutada" se um de seus teoremas for negado pelo correspondente teorema na teoria informal. (LAKATOS, 1985, p. 39)

Thom (1985) também defende que o conhecimento matemático não é absoluto, ele afirma que as formas matemáticas embora possuam existências que são independentes da mente que as consideram e diferentes das existências concretas no mundo externo, tais existências sutilmente e profundamente relacionam-se com esse mundo. Para esse autor não há nenhuma definição rigorosa de rigor, uma prova é rigorosa se obtém aprovação dos principais especialistas da época, portanto, trata-se de um rigor local.[15]

Segundo Grabiner (1985) a matemática cresce por dois caminhos: não somente por incrementos sucessivos, mas também por revoluções ocasionais. Para ele somente se aceitarmos, no presente, possibilidades de erros, poderemos esperar que o futuro nos traga um aperfeiçoamento fundamental para nosso conhecimento.

Já Wilder (1985) busca descrever a matemática como um sistema cultural envolvente, acredita que algumas de nossas perplexidades filosóficas podem ser respondidas pela aprendizagem de como a matemática muda, ou seja, como ela veio a ser o que é hoje, considerando o que foi no passado.

---

[14] Uma teoria quase-empírica pode ou não ser empírica. No sentido usual tal teoria será empírica somente se seus teoremas básicos forem afirmações básicas particulares (espaço-temporalmente).

[15] Sobre isso ele ainda alerta que, o que as teses fundamentalistas prometem, mas não cumprem, é um rigor global fornecido de uma vez por todas para todas as matemáticas e que, entretanto, tudo que nossa experiência real revela é um rigor local.

(ii) A experiência que foi deixada de lado nas três correntes filosóficas do final do século XIX e início do XX, passou a ser, a partir de então, reconhecida, novamente, como importante na constituição do conhecimento matemático.

Por exemplo, para Hersh (1985) a possibilidade de corrigir erros é, exatamente, dada em confronto com a experiência.

Sobre isso Lakatos (1985) destaca a seguinte afirmação de Weyle: "[...] Uma matemática verdadeiramente realista deverá ser concebível, como um ramo da construção teórica do mundo real [...]."

Há ainda a colocação de Thom (1985) que as formas matemáticas têm existências que sempre se relacionam com o mundo externo, embora algumas vezes sejam diferentes daquelas presentes nesse mundo.

(iii) Na concepção do conhecimento como falível, a importância do aspecto intuitivo também é destacada.

Para Hersh (1985) a verificação de uma prova em matemática é em primeiro lugar uma parte do raciocínio intuitivo. Esse autor entende por "raciocínio intuitivo", ou "raciocínio informal", aquele que depende de uma base implícita do entendimento e no qual lidamos com conceitos e não com símbolos.

Na teoria de Lakatos (1985) o conhecimento intuitivo é importante, não para prover fundamentação, mas para fornecer falsificadores, pois como vimos esse autor sugere que teoremas da matemática informal sejam falsificadores potenciais para teorias formais.

(iv) Ademais, destaca-se também a concepção da matemática como produto cultural (WILDER, 1985, BISHOP, 1988 apud ERNEST, 1994); e a importância das revoluções científicas em seu desenvolvimento. (GRABINER, 1985).

Assim, pode-se dizer que as posições filosóficas da matemática, que surgiram pós-correntes fundamentalistas do final do século XIX e início do XX, buscam explicar o saber matemático reconhecendo (ou recuperando) outros aspectos importantes em sua constituição, tais como: a falibilidade; os caracteres intuitivo, experimental e temporal; os aspectos históricos, culturais e os advindos com as revoluções científicas.

Com essa análise verificamos que a proposta abordada nesse trabalho vai ao encontro do atual movimento na Filosofia da Matemática de se reconhecer a importância dos aspectos empíricos e intuitivos na constituição do saber matemático; e também da refutação de que o conhecimento matemático constitui um conhecimento absoluto.

A proposta e o contexto educacional da matemática

Atualmente diversos trabalhos têm destacado aspectos que relacionam Filosofia da Matemática com a Educação Matemática, mostrando que tais campos científicos podem influenciar-se uns aos outros no desenvolvimento do saber matemático (THOMPSON, 1984, STEINER, 1987, FIORENTINI, 1995, MIGUEL, 1995, MENEGHETTI; BICUDO, 2002, BICUDO; GARNICA, 2003).

Steiner (1987), por exemplo, em sua primeira tese, defende que posições filosóficas e teorias epistemológicas concernentes à matemática têm sempre influenciado significativamente idéias que guiam e condicionam princípios em Educação Matemática. Além disso, para esse autor: (i) conceitos para o ensino e aprendizagem da matemática - mais especificamente: objetivos, sumários, livros textos, currículos, metodologias de ensino, princípios didáticos, teorias de aprendizagem, modelos e teorias em Educação Matemática, apóiam-se (quase sempre num caminho implícito) num ponto de vista filosófico e epistemológico particular da matemática; (ii) as concepções de matemática e ensino de matemática dos professores tanto quanto a percepção da matemática pelos alunos, também se apóiam num ponto de vista filosófico e epistemológico particular da matemática.

Para Thompson (1984) as concepções de conhecimento matemático, e a maneira pela qual os professores tipicamente apresentam o conteúdo, fortemente sugerem que os pontos de vista, crenças e preferências dos professores, sobre a matemática influenciam suas práticas instrucionais. Este fato é reforçado por Dossey (1992) ao afirmar que “A concepção de matemática sustentada pelo professor de matemática tem um impacto forte no modo como a matemática é caracterizada em sala de aula.” (DOSSEY, 1992, p. 39, tradução nossa)

Para Fiorentini (1995) o modo de ensinar sofre influências dos valores e das finalidades que o professor atribui ao ensino de matemática e a relação professor-aluno, de sua concepção de matemática, do homem, da sociedade e do mundo. Nesse sentido, argumenta esse último autor, certamente o professor que concebe a matemática como ciência exata, logicamente organizada, pronta e acabada, terá uma prática pedagógica diferente daquele que a concebe como uma ciência viva, dinâmica e historicamente construída pelos homens, atendendo a determinados interesses e necessidades sociais.

Com isso percebe-se que uma filosofia da matemática pode auxiliar a prática profissional do professor, o que é posto de forma elucidativa por Miguel (2003, p. 4) ao argumentar que o professor, no ato de ensinar, freqüentemente se depara com problemas de natureza epistemológica e filosófica, e é exatamente nesse momento que "[...] o diálogo com a Filosofia da Matemática e, mais amplamente, com a Filosofia Geral, poderia revelar-se profícuo e esclarecedor."

Nesse sentido entendemos que a proposta ora analisada, que, inicialmente, surgiu por meio de uma análise, no decorrer da história, de diversas posições filosóficas a respeito da constituição do saber matemático, pode ser pensada como uma proposta para a Educação Matemática, ou ao menos, nos fornecer alguns indicativos nesta direção. A partir dessa concepção, abaixo segue uma discussão de outros pontos que dão suporte à proposta.

A questão do equilíbrio entre os aspectos lógico e intuitivo, pode ser respaldada em autores que, em outras situações, já haviam enfatizado a importância do equilíbrio ou da complementaridade em alguns aspectos da Educação Matemática ou mesmo referente à própria atividade matemática.

Por exemplo, Steiner (1987, p.11) critica características dicotômicas e modismos na Educação Matemática, em particular na história da reforma do currículo, que oscilou entre posições polares, tais como: habilidade x entendimento, construção de estrutura x resolução de problemas. Para esse autor, **conceitos que aparentemente são dicotômicos, quando propriamente entendidos e aplicados podem reforçar-se mutuamente**.

Otte (1993), ao abordar a ciência de modo geral e algumas vezes focalizar a atividade matemática, defende a complementaridade sob diversos modos, tais como: entre objeto e meio, conceito e objeto, intencionalidade e comunicação, função e estrutura, forma e história. Esse autor ainda aponta que tal conceito está presente em outras áreas do conhecimento, sendo fundamental a qualquer didática da matemática. No que se refere aos aspectos lógico e intuitivo, ele também defende que esses conceitos não podem ser considerados separadamente, entendendo que ambos fazem parte da mesma função cognitiva, "[...] ou seja, a de dar a certeza (embora elas realizem essas funções diferentemente) [...]." (OTTE, 1993, p. 301).

Há ainda algumas reflexões que podem ser traçadas a respeito da proposta e do construtivismo, como segue.

A proposta e o construtivismo

Como verificamos anteriormente, Kant (1724-1804) já havia dito que conhecer é uma função ativa do sujeito e que não podemos conhecer, com necessidade e universalidade, portanto *a priori*, a não ser que nosso próprio espírito crie segundo seus níveis, e que, portanto, "[...] a razão só entende aquilo que produz segundo os seus próprios planos [...]." (KANT, 1997, Prefácio 2a edição, p.18). Essa concepção está no cerne do construtivismo, sendo comum tanto à teoria de Piaget quanto à de Vygotsky; havendo, entretanto, nesta última o particular interesse em analisar as influências do contexto histórico-cultural.[16]

Na Educação Matemática, foi a partir de 1980 que o construtivismo estabeleceu suas raízes. Essa corrente primeiramente surgiu com uma versão denominada "

Construtivismo Radical", com inspiração na teoria de Piaget[17], foi promovido por Ernst von Glasersfeld, defendendo que todo conhecimento, inclusive o matemático, é construtível e falível. Tal concepção tem por base os

[16] As considerações dessa última frase foram feitas com base no estudo das seguintes referências: Freitag (1990, 1991), Severino (1998), Moysés (1997).

[17] Na metáfora da evolução biológica, de acordo com a qual o organismo envolvido precisa se adaptar ao meio para sobreviver. Nesse sentido, o desenvolvimento da inteligência humana também passaria por um processo de adaptação com o objetivo de se ajustar às circunstâncias e permanecer viável.

dois seguintes princípios: (i) o conhecimento é ativamente construído pelo indivíduo cognicente, não passivamente recebido pelo meio ambiente; (ii) o ato de conhecer é um processo adaptativo que organiza um mundo experimental e que não há como descobrir um mundo independente e preexistente fora da mente do conhecedor. Nesse tipo de construtivismo todo conhecimento é subjetivo, pois nós seres humanos, somos organismos fechados no que se refere a informações. A linguagem e outras formas de comunicação apenas ajudam na construção de realidades subjetivas em função de ajustar nossas experiências a situações que compartilhamos. (ERNEST, 1991, 1994).

A linha filosófica do construtivismo radical sofreu inúmeras críticas devido seu caráter empírico e sua falta de objetividade.

A versão denominada Construtivismo Social surge como uma evolução do construtivismo radical na tentativa de solucionar suas incoerências. Essa versão concebe o conhecimento matemático como uma construção social, segunda a qual: (i) a base do conhecimento matemático é o conhecimento lingüístico, convenções e regras, e a linguagem é uma construção social; (ii) processos sociais interpessoais são necessários para tornar um conhecimento matemático individual subjetivo, após publicação, aceito como um conhecimento matemático objetivo; (iii) a objetividade, por si própria, é compreendida como social. Ernest (1991, 1994).

O conhecimento subjetivo presente no construtivismo radical aparece também no construtivismo social. Entretanto, nesta versão de construtivismo o sujeito não é mais visto isoladamente, uma vez que a objetividade depende de processos sociais. Nessa linha de pensamento, o conhecimento subjetivo refere-se à criação pessoal do indivíduo, e o objetivo é utilizado no sentido de ser um conhecimento aceito socialmente.

Diante disso, entendemos que a proposta ora apresentada pode ser considerada construtivista, ao conceber o conhecimento como construtível e falível.[18]

Assim, percebemos uma semelhança entre a forma com que esta proposta aborda os aspectos lógico e intuitivo (apoio mútuo em níveis cada vez mais elaborados) com o que é posto no construtivismo social concernente

[18] Termos já especificados anteriormente ao apresentarmos a proposta.

a relação da criação dos conhecimentos subjetivos e objetivos em matemática, ou seja, segundo Ernest (1991) o conhecimento matemático subjetivo relaciona-se com o conhecimento objetivo por meio de um ciclo criativo, através do qual cada um contribui para a renovação do outro.

Nesse ciclo, o conhecimento matemático subjetivo, após um minucioso exame intersubjetivo, reformulação e aceitação, seguindo a heurística de Lakatos[19], tornar-se conhecimento objetivo. O conhecimento objetivo, por sua vez, é internalizado e reconstruído individualmente durante o aprendizado, tornando-se conhecimento subjetivo individual. Utilizando esse conhecimento, o indivíduo cria e publica novos conceitos, completando, desse modo, o ciclo.[20] Vale salientar que os aspectos subjetivo e objetivo (SO) do construtivismo social são distintos dos aspectos intuitivos e lógicos (IL) referidos neste trabalho. Entretanto, entendemos que há alguns pontos de intersecções entre SO e IL, visto que, o conhecimento intuitivo é uma criação pessoal do indivíduo e, portanto, é subjetivo; e o conhecimento objetivo é um conhecimento que atinge um caráter lógico (ou seja, uma linguagem formal).

Já a questão dos níveis no processo de constituição do conhecimento, defendidos pela proposta em questão, pode encontrar respaldo cognitivo em Vygostsky (1991). Considerando conceitos como generalizações, esse autor argumenta que à proporção que o intelecto se desenvolve, velhas generalizações são substituídas por generalizações de tipos cada vez mais elevadas – processo que leva à formação dos 'verdadeiros conceitos'. A aquisição de conceitos novos e mais elevados transforma o significado dos conceitos inferiores. Uma vez que já tenha sido incorporada em seu pensamento, a nova estrutura conceitual gradualmente expande os conceitos mais antigos, à medida que estes se inserem nas operações intelectuais de tipo mais elevado. (VYGOTSKY, 1991, p. 71, 72 e 95).

---

[19] Por um processo de conjecturas e refutação de assuntos ainda indeterminados vai-se buscando princípios básicos como resultado de especulações audaciosas que tem sobrevivido a testes e críticas severas. (LAKATOS, 1985).

[20] Para esse autor há dois aspectos chaves na construção de conhecimentos subjetivos, a saber: (a) uma construção ativa do conhecimento, normalmente de conceitos e hipóteses, com base nas experiências e conceitos prévios do indivíduo. Tal construção proporciona uma base para sua compreensão e serve como guia para as ações futuras; (b) um papel essencial desempenhado pela experiência na interação com os mundos físico e social.

Uma vez traçadas essas considerações, surge um questionamento sobre como implementar a proposta no contexto da Educação Matemática. Uma das formas encontradas, que trataremos a seguir, foi utilizá-la no processo de elaboração e desenvolvimento de materiais didáticos para o ensino e aprendizagem da matemática.

Elaboração e estruturação de materiais didáticos para o ensino e aprendizagem da matemática

Vinculados a um projeto mais amplo[21], que tinha por finalidade o desenvolvimento de materiais didáticos para o Ensino das Ciências da Natureza e da Matemática, formamos um grupo de pesquisa de ensino de matemática constituído de professores de matemática do ensino fundamental e médio, e de alunos e professores de cursos de licenciatura em matemática do ICMC-USP e do departamento de matemática da UFSCar (Universidade Federal de São Carlos). Tal grupo, mediante discussões e reflexões a respeito de problemas pertinentes ao ensino e aprendizagem de matemática, tinha por propósito desenvolver materiais alternativos para o ensino fundamental e médio de matemática, através da elaboração de atividades, na maioria das vezes, utilizando materiais experimentais ou jogos, de forma a proporcionar a construção por parte dos alunos dos conceitos envolvidos.

Inicialmente, o trabalho consistiu no levantamento, junto aos professores da rede (integrantes do grupo), de temas que apresentavam maiores dificuldades de ensino. Números Inteiros, Números Racionais e Geometria foram os temas levantados nessa fase. Buscamos desenvolver os materiais por meio de atividades experimentais ou em forma de jogos, que proporcionassem a construção por parte dos alunos dos conceitos envolvidos, tais atividades foram estruturadas na proposta ora defendida. Desta forma, seguindo uma abordagem em espiral, desenvolveu-se os temas segundo três

[21] Projeto "Instrumentação para o ensino interdisciplinar das ciências da natureza e da Matemática", CDCC (Centro de Divulgação Científica e Cultural de São Carlos)/ CNPq – FINEP e VITAE – processo n. 550857/01-0. O desenvolvimento da parte de matemática deste projeto teve como uma das coordenadoras a autora desse trabalho.

níveis: elaboração, consolidação e expansão de conceitos[22]. Em cada um desses níveis buscou-se o equilíbrio entre os aspectos lógico e intuitivo do conhecimento. Entretanto, entende-se que se trata de materiais abertos, pois se concebe o conhecimento como algo em constante evolução e adaptação, sendo que, no que se refere aos níveis de desenvolvimento do tema, julga-se o primeiro como essencial e os demais como elaborações cada vez mais profundas[23].

Algumas considerações metodológicas na fase de elaboração dos materiais

É sabido, mediante experiência e resultados científicos (VYGOTSKY, 1991, p. 72), que o ensino direto de conceitos é impossível e infrutífero, o mesmo pode se dizer com respeito à introdução de propostas alternativas sem fundamentações teóricas e metodológicas adequadas. Muitas vezes o uso de recursos didáticos não familiares ao educador provoca resistências para sua adoção. Sem compreender a concepção de ensino-aprendizagem e identificar a ideologia subjacente às novas propostas curriculares, o professor não constrói significados que permitem sua identificação com seus pressupostos e, portanto, dificilmente as novas orientações modificam sua prática docente. Foi este o principal motivo que nos levou a envolver os professores na fase de elaboração dos materiais, segue o depoimento de uma das professoras sobre sua participação no projeto:

> "Foi com muita alegria que aceitei o convite para trabalhar nesse projeto, que vem ao encontro de uma metodologia de ensino que gosto e acredito, a construção do conhecimento pelo próprio aluno, através de atividades propostas e dirigidas pelo professor [...]." (Depoimento da professora Liza)[24]

[22] Dessas atividades algumas foram selecionadas para serem reproduzidas e comporem o acervo da experimentoteca do CDCC -para empréstimo aos professores do ensino fundamental e médio. Há também duas cópias completas do material disponíveis nos Laboratórios de Ensino do ICMC-USP e no da UFSCar (Departamento de Matemática).

[23] Isso implica que não se precisa necessariamente trabalhar os três níveis de uma só vez e que também é possível desenvolver outros níveis além dos sugeridos.

[24] A professora em questão leciona em uma escola do ensino médio da rede pública e também no ensino fundamental de uma cooperativa educacional, ambas localizadas em São Carlos.

Quanto ao produto final, eles consideraram que o material teria um ótimo potencial para o ensino e aprendizagem da matemática, como posto na seqüência do depoimento acima:

> "[...] Tendo sempre em mente as dificuldades encontradas por nós professores, principalmente os da rede estadual, em sala de aula, os materiais até então propostos são em geral simples de serem aplicados, e contemplam as maiores dificuldades dos alunos, sejam eles do ensino fundamental ou médio". (Depoimento da professora Liza)

A estratégia metodológica de envolver os professores do ensino fundamental e médio na fase de elaboração de materiais mostrou-se bastante pertinente pois, ao se considerar as experiências que esses professores traziam concernentes as suas aulas, foi possível uma maior identificação deles com os materiais didáticos elaborados, além de nos proporcionar um contato mais direto com a problemática do ensino-aprendizagem de matemática.

Além disso, ao participarem e ao se questionarem sobre as dificuldades de seus alunos, esses professores foram também levados a refletir sobre suas práticas em sala de aula, como também um outro relato aponta:

> "Enquanto professora, a minha participação na elaboração dos materiais pedagógicos, me proporcionou crescimento profissional e uma reflexão sobre a minha prática; eu já utilizava materiais pedagógicos elaborados por mim, mas pude inovar e trocar experiências com outros profissionais." (relato profª. Lu)[25].

Observemos que esse ponto de refletir sobre a prática é muito destacado em referências de educadores preocupados com a formação do professor, tal como posto por Gómez (1992):

> O profissional competente actua refletindo sobre a acção, criando uma nova realidade, experimentando, corrigindo e inventando através do diálogo que estabelece com essa mesma realidade [...] (GÓMEZ, 1992, p. 110).

---

[25] A professora Lu atua no ensino público – níveis fundamental e médio.

Sobre a aplicação de um dos materiais

Nessa fase pretendíamos analisar a estruturação do material didático que teve como suporte a proposta pedagógica aqui defendida. Para uma intervenção em sala de aula escolhemos o material de números racionais.[26]

Seguindo a estruturação descrita anteriormente, esse material é constituído de 14 kits pedagógicos, divididos em três categorias: introdução, consolidação e expansão de conceitos. A primeira dessas categorias tem por objetivo o desenvolvimento de atividades voltadas para introdução do conceito de frações e operações com frações, ela é constituída de quatro kits pedagógicos, que abordam a idéia intuitiva de fração, conceitos de equivalência entre frações e as operações fundamentais entre frações (adição, subtração, multiplicação e divisão). Esses kits são compostos por atividades em que os alunos têm o apoio de materiais manipuláveis (um deles, por exemplo, envolve a sobreposição e comparação de fichas representando diferentes frações de um inteiro). A segunda categoria visa consolidar os conceitos abordados na fase anterior e engloba seis jogos pedagógicos, cujas regras e dinâmicas são, em geral, familiares aos alunos; tais como jogo da memória, jogo do mico, jogo de bingo, de cartas etc. Esses jogos exploram os conceitos de representação numérica e gráfica de frações, ordenação e equivalência entre frações. A terceira etapa objetiva expandir o conhecimento de frações e relacionar suas diversas formas de apresentação, ela é constituída de 3 kits pedagógicos (dominó, bingo das restas fracionárias e trilha das pedras). Nesses exploram-se associação da representação fracionária, com sua respectiva forma decimal ou percentual; localização das frações na reta numérica, correlacionando-as com sua forma decimal; efetuação de operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação de frações.

A intervenção foi feita numa 5ª série, ciclo II do ensino fundamental, de uma escola pública na cidade de São Carlos (SP), na sala de aula de uma das professoras que havia participado da fase de elaboração dos materiais e que concordou em nos ceder uma turma de alunos para que realizássemos

[26] Visto que esse material havia sido bastante discutido pelo grupo, como também aplicado em sala de aula por estagiários de prática de ensino no ano anterior (aplicação piloto) e, portanto, já havia passado por algumas correções.

esse estudo. Fizemos uma pesquisa qualitativa através de um estudo de caso (PÁDUA, 1996, p. 71). O trabalho de campo teve duração de seis semanas, num total de 23 horas/aula e seguiu as seguintes etapas: (a) estabelecimento do contrato didático; (b) realização de um diagnóstico inicial, para verificar os conhecimentos prévios dos alunos com respeito ao conteúdo a ser trabalhado; (c) aplicação do material; (d) efetuação de um novo diagnóstico e (e) avaliação da aplicação do material. A aplicação do material se deu vinculada aos estágios supervisionados da disciplina "Prática de Ensino de Matemática", sob a responsabilidade da autora deste artigo. O material foi aplicado pelo estagiário A (que vamos denominar professor - aplicador), com acompanhamento de dois outros estagiários, os quais desempenharam o papel de observadores participantes (LÜDKE, ANDRÉ, 2003, p. 28) e colaboraram com a coleta (registro) dos dados. Sob orientação do professor-aplicador, os alunos desenvolveram as atividades em grupo, no final de cada aula promoveu-se uma discussão geral com a classe para fechamento das atividades. Os dados foram analisados por meio dos diagnósticos (inicial e final) dos alunos, dos relatórios elaborados pelos estagiários, dos depoimentos dos alunos e do professor-aplicador.

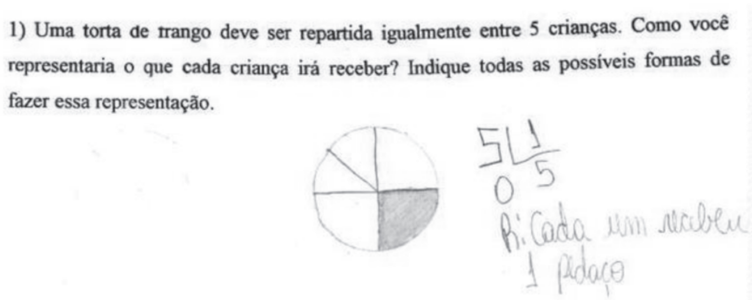
Com intuito de se manter, em cada uma das etapas, o equilíbrio entre os aspectos intuitivo e lógico do conhecimento, após a aplicação de cada kit ou conjunto de kits, foi trabalhado com os alunos fichas de atividades em que se abordava o conteúdo de maneira mais formal. A intenção era de que a cada etapa, ou parte da etapa, trabalhada fosse feito um fechamento e uma sistematização das atividades. Essa foi uma conduta adotada pelo professor (aplicador) durante todo tempo da aplicação. Uma análise mais detalhada dessa intervenção poderá ser encontrada em Meneghetti e Nunes (2006)[27], abaixo destacaremos apenas os principais pontos dos resultados dessa análise.

Dessa experiência, o professor-aplicador relata como positivo na estruturação do material, o fato de oferecer aos estudantes oportunidades diferentes para trabalharem os conceitos envolvidos, uma vez que um mesmo conceito é retomado em diversos níveis e sob novas abordagens.

[27] Essa fase de aplicação foi desenvolvida com auxílio de projeto de iniciação científica da FAPESP (processo 02/03046-7).

Um dos pontos observados com respeito ao processo de intervenção foi que se estabeleceu em sala de aula um clima favorável ao surgimento de ricas situações de ensino-aprendizagem, o que, a nosso ver, se deu principalmente devido à adoção por parte do professor-aplicador de uma postura na linha construtivista, ou seja, sempre questionando os alunos, levando-os a refletir sobre seus próprios raciocínios, expondo e discutindo suas idéias com o grupo, incentivando-os a construir por si próprios os conceitos envolvidos.[28]

Quanto à aprendizagem dos alunos, percebeu-se que houve um progresso, fato que pôde ser comprovado pela comparação o desempenho deles na avaliação diagnóstica inicial (média da turma 4,3) e final (média da turma 7,0) e também por meio de uma avaliação continuada, a qual se deu através de observação do desempenho dos alunos durante todo o processo da intervenção. Percebeu-se, pela análise do diagnóstico inicial, que no começo os alunos apresentavam muitas dificuldades, tanto conceituais quanto referentes a notações, como pode ser visto no exemplo abaixo:



Com o tempo isso foi mudando, em seu diário de bordo o professor-aplicador relata que os alunos passaram a efetuar adições, multiplicações, simplificações de frações, atitudes que dificilmente foram encontradas no diagnóstico inicial.

A título de exemplificação, abaixo temos uma ilustração de operações (subtração e adição de frações com mesmo denominador) que uma aluna não

[28] Segundo D'Ambrósio e Steffe (1994, p. 23) é chamado de professor construtivista aquele que estuda a construção matemática de seus alunos e que interage com eles num espaço de aprendizagem, baseado num modelo de Matemática do aluno.

conseguiu realizar na avaliação diagnóstica inicial, mas conseguiu efetuar na avaliação diagnóstica final, ou seja, após a intervenção:

Questão 9 (situação problema diagnóstico inicial e final): Durante o café da manhã, Dudu comeu $\frac{1}{2}$ (metade) de um pão com geléia e $\frac{1}{3}$ (um terço) de outro pão com manteiga. Quanto de pão Dudu comeu no café da manhã?

Figura 5 (Resolução no diagnóstico inicial)

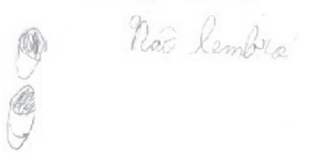
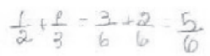


Figura 6(Resolução no diagnóstico final)



Com isso percebemos que além dos alunos conseguirem efetuar as operações, houve mudança na forma deles representarem os conceitos abordados, o que, segundo (MAURI, 2003, p. 95) denota uma alteração em seus esquemas de conhecimento[29]. Vale ainda ressaltar que, segundo essa última autora, um dos objetivos fundamentais da educação escolar é a modificação dos esquemas de conhecimento dos alunos, pois aprender algo equivale à elaboração de uma representação pessoal do conteúdo em estudo (MAURI, 2003, p. 86)

Essa constatação de progresso, no que se refere à aprendizagem dos alunos, também foi apontada nos depoimentos dos alunos no último dia de aula, tal como esta: "Não tem como não gostar das atividades. O que mais gostei foi que a turma aprendeu mais sobre frações". (aluno L)

Ademais, ficou também evidente a importância da postura adotada pelo professor- aplicador, a qual estava em consonância com o suporte teórico

[29] Para essa autora o esquema de conhecimento é a representação que uma pessoa tem, em um determinado momento, sobre uma parcela da realidade.

no qual o material fora estruturado[30], como ele próprio relatou em depoimento após aplicação:

"Eu penso que, da forma como foi estruturado, o material traz uma rica fonte de atividades com as quais, mantendo uma postura na linha construtivista, o professor pode levar/orientar seus educandos à construção dos conceitos matemáticos envolvidos."

Assim, chegamos à conclusão que a proposta metodológica que estrutura o material, aliada a uma postura em consonância com seu suporte teórico, mostrou-se eficiente, do ponto de vista didático-pedagógico, por favorecer aos alunos a construção dos conceitos matemáticos envolvidos.

Considerações finais

Com essa análise verificamos que a proposta sugerida vai ao encontro do atual movimento na Filosofia da Matemática, de se reconhecer a importância dos aspectos empíricos e intuitivos na constituição do saber matemático e também da refutação de que o conhecimento matemático constitui um conhecimento absoluto.

Entende-se que a proposta, que surgiu por meio de uma análise de diversas posições filosóficas a respeito da constituição do conhecimento matemático, possa trazer contribuições à Educação Matemática visto que, como destacamos, diversos trabalhos têm enfatizado aspectos que relacionam Filosofia da Matemática com a Educação Matemática, e em particular, alguns deles têm apontado formas de como uma filosofia da matemática pode influenciar a prática profissional do professor. Além disso, percebemos que a questão do equilíbrio abordada pela proposta ganha respaldo nas colações de autores que criticam características dicotômicas em Educação Matemática, bem como na própria atividade matemática. Nessa linha, foi ainda apontada uma semelhança da proposta, no que se refere ao apoio do aspecto lógico no intuitivo e vice-versa (no processo de elaboração do conhecimento) com o que é posto no construtivismo social concernente a relação da criação dos

[30] Segundo Kilpatrick (1995), é, de fato, fundamental haver uma harmonia entre os vários componentes (etapas) de um estudo.

conhecimentos subjetivo e objetivo em matemática. Destacou-se ainda que a questão dos níveis pode encontrar respaldo cognitivo em Vygostsky (1991).

Na seqüência abordamos a utilização da proposta no processo de elaboração e desenvolvimento de materiais didáticos para o ensino e aprendizagem da matemática; fase em que envolvemos professores do ensino fundamental e médio, considerando suas experiências em sala de aula, mais especificamente, as dificuldades de seus alunos no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo abordado. Isso proporcionou ao material elaborado um maior potencial didático-pedagógico e aos professores uma maior identificação com materiais que eles poderiam usar junto aos seus alunos, além de criar oportunidades de reflexão sobre suas práticas e sobre o ensino-aprendizagem da matemática.

A aplicação de um desses materiais foi também focalizada, a análise dessa aplicação permitiu-nos verificar que a proposta metodológica, sob a qual os materiais foram estruturados, proporcionou aos alunos a construção dos conceitos matemáticos envolvidos, além de auxiliar o professor quanto a sua conduta no desenvolvimento das atividades em sala de aula.

Finalmente, entendemos que, embora outros estudos ainda possam ser traçados, essas duas experiências (elaboração e aplicação de materiais didáticos) mostraram-nos uma possibilidade de implementação da proposta na prática educativa da matemática.

Referências

BICUDO, M. A.; GARNICA, A. V. M. A. Filosofia da matemática e sua constituição multifacetada: apontamentos sobre algumas de suas questões geradoras. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Filosofia da educação matemática:** concepções e movimento. Brasília: Plano Editora, 2003.

CHAUÍ, M. **Convite à filosofia**. São Paulo: Ática, 1994.

D’AMBRÓSIO, B.; STEFFE, L. P. O ensino construtivista. **Em Aberto**, Brasília, ano 14, n. 62, p. 23-32, 1994.

DESCARTES, R. **Discurso do método**. Brasília: Universidade de Brasília; São Paulo: Editora Ática, 1989.

DOSSEY, J.A. The nature of mathematics: its role and its influence. In: GROUWS, D. A. **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992. cap. 2. p. 39-48.

ERNEST, P. **The philosophy of mathematics education**. Bristol: Farmer, 1991.

ERNEST, P. (Ed.) **Mathematics, education and philosophy:** an international perspective. London: Farmer, 1994.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Revista Zetetiké**, Campinas, SP, ano 3, n. 4, p. 1-37, 1995.

FREGE, G. **The foundations of arithmetic**. Oxford: Blackwell, 1959.

FREITAG, B. Razão teórica e razão prática: Kant e Piaget. **ANDE. Revista da Associação Nacional de Educação**, São Paulo, v. 15, p. 55-68, 1990.

FREITAG, B. **Piaget e a filosofia**. São Paulo: Editora UNESP, 1991.

GRABINER, J. V. Is mathematical thru time dependent? In: TYMOCZKO, T. (Ed.) **New directions in the philosophy of mathematics**: an anthology. Boston: Birkhäuser, 1985. p. 201-214.

GÓMEZ, A.P. O pensamento prático do professor: a formação do professor como profissional reflexivo. In: NÓVOA, A. (Org.) **Os professores e a sua formação**. Lisboa: Dom Quixote; Instituto de Inovação Educacional, 1992.

HERSH, R. Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. In: TYMOCZKO, T. (Ed.) **New directions in the philosophy of mathematics**: an anthology. Boston: Birkhäuser, 1985. p. 9-20.

KANT, I. **Crítica da razão pura**. 4. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1997.

KILPATRICK. J. Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a educação matemática como campo profissional e científico. Traduzido por Rosana C.S. Miskulim et al. **Zetetiké**, Campinas, v. 4, n. 5, p. 99-120, jan./jun.1996.

LAKATOS, I. A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics. In: TYMOCZKO, T. (Ed.) **New directions in the philosophy of mathematics**: an anthology. Boston: Birkhäuser, 1985. p. 29-48.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 2003.

MAURI, T. O que faz com que o aluno e a aluna aprendam os conteúdos escolares. In: COLL, C. et al. **O construtivismo na sala-de-aula**. São Paulo: Ática, 2003.

MENEGHETTI, R. C. G. **O intuitivo e o lógico no conhecimento matemático:** uma análise a luz da história e da filosofia da matemática, 2001. 141 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2001.

MENEGHETTI, R. C. G. Pensando uma filosofia da educação matemática, à luz da história e da filosofia da matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2003, Santos, SP. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2003. p. 1-20. 1 CD-ROM.

MENEGHETTI, R. C. G. Uma proposta pedagógica para educação matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2006, Águas de Lindóia. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2006. p. 1-21. 1 CD-ROM.

MENEGHETTI, R. C. G. Apresentação e discussão de uma proposta pedagógica para educação matemática, In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 11., 2007, Santiago de Querétaro. **Anais...** México: Comitê Interamericano de Educadión Matemática & Grupo Internacional Comission on Matemathical Instrutuction, 2007. p. 1-13.

MENEGHETTI, R. C. G.; BICUDO, I. O que a história do desenvolvimento do cálculo pode nos ensinar quanto questionamos o saber matemático, seu ensino e seus fundamentos. **Revista Brasileira de História da Matemática = An International Journal on the History of Mathematics,** Rio Claro, SP, n. 3, p. 103-117, abr. 2002.

MENEGHETTI, R. C. G.; BICUDO, I. O. Uma discussão sobre a constituição do saber matemático e seus reflexos na educação matemática. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, SP, ano 16, n. 19, p. 58-72, 2003.

MENEGHETTI, R. C. G.; NUNES, A. C. A. Aplicação de uma proposta pedagógica no ensino dos números racionais. **Educação Matemática em Revista: Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, São Paulo, ano 13, n. 20/21, p. 77-86, 2006.

MIGUEL, A. A. Constituição do paradigma do formalismo pedagógico clássico em educação matemática. **Revista Zetetiké**, Campinas, SP, ano 3, n. 3, p. 7-39, 1995.

MIGUEL, A. A. Filosofia da educação matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Filosofia da educação matemática:** concepções e movimento. Brasília: Plano, 2003.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática**. Campinas, SP: Papirus, 1997.

OTTE, M. **O formal, o social e o subjetivo:** uma introdução à filosofia e à didática da matemática**.** São Paulo: Editora UNESP, 1993.

PÁDUA, E. M. M. **Metodologia da pesquisa:** abordagem teórico-prática. Campinas, SP: Papirus, 1996.

SEVERINO, A. J. Produção de conhecimento, ensino/aprendizagem e educação. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 11., 1998. **Painéis.** Disponível em: http://www.interface.org.br/revista3/ensaio1.pdf. Acesso em: 12 set. 2006.

SILVA, J. J. Filosofia da matemática e filosofia da educação matemática. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 45-58.

SNAPPER, E. The three crises in mathematics: logicism, intuicionism and formalism. **Mathematics Magazine**, Washington, DC, v. 52, n. 4, p. 207-216, 1979.

STEINER, H. J. Philosophical and epistemological aspects of mathematics and their interaction with theory and practice in mathematics education. **For the Learning of Mathematics**, Quebec, v. 7, n. 1, p.7-13, 1987.

THOM, R. Modern mathematics: an educational and philosophic error*?* In: TYMOCZKO, T. (Ed.) **New directions in the philosophy of mathematics**: an anthology. Boston: Birkhäuser, 1985. p. 67-78.

THOMPSON, A. G. The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. **Education Studies in Mathematics,** Dordrecht, n. 15, p. 105-127, 1984.

TYMOCZKO, T. (Ed.) **New directions in the philosophy of mathematics**: an anthology. Boston: Birkhäuser, 1985.

TYMOCZKO, T. Structuralism and post-modernism in their the philosophy of mathematics. In: ERNEST, P. (Ed.) **Mathematics, education and philosophy:** an international perspective. London: Farmer, 1994. p. 49-55.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 1991.

WILDER, R. The evolution of mathematical practice: the cultural basis of mathematics. In: TYMOCZKO, T. (Ed.) **New directions in the philosophy of mathematics**: an anthology. Boston: Birkhäuser, 1985. p. 185-200.

WILDER, R.L. **Introdution to the foudations of mathematics**. 2.ed. New York; London; Sydney: Wiley International Edition- John Wiley & Sons. Inc., 1965.

Aprovado em maio de 2008.
Submetido em fevereiro de 2008.