Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008, p. 1 a 22



ARTIGOS

# O que Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender sobre Frações, quando Tentamos lhes Ensinar Frações

## What our Students May Not be Learning about Fractions when we Try to Teach Them Fractions

Antonio José Lopes[1]

**Resumo**

Este artigo retoma intervenções da lista de discussões da SBEM para advogar pela permanência das frações no currículo do ensino fundamental. Fundamentado em resultados de pesquisas na área de Educação Matemática e nos dados coletados da experiência de sala de aula do autor, apresento uma perspectiva diferenciada daquela que existe hoje, e que é adotada pela maioria dos livros didáticos e professores de matemática.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Frações. Currículo. Pensamento Proporcional.

**Abstract**

This article revisits interventions posted on the SBEM discussion list advocating for the maintenance of fractions in the elementary education curriculum. Based on research results in the field of Mathematics Education, and data collected during the author's experiences in the classroom, a perspective is presented that differs from the predominant one adopted by the majority of textbooks and mathematics teachers today.

**Key-words:** Mathematics Education. Fractions. Curriculum. Proportional Thinking.

[1] Educador matemático, professor da Escola Vera Cruz, doutorando em Didática da Matemática pela Universidade Autônoma de Barcelona.

O título deste artigo está longe de ser original, foi inspirado em dois debates, ocorridos com quase três décadas de intervalo, sem que a princípio os protagonistas do debate recente soubessem do teor do artigo que gerou o primeiro.

A primeira vez que tomei contato com uma crítica vigorosa ao ensino de frações foi através da leitura da conferência "Do We Still Need Fractions in the Elementary Curriculum"[2] proferida por Peter Hilton no ICME IV, realizado no ano de 1980 em Berkeley, EUA.

Já na introdução daquele vigoroso artigo, P. Hilton ameniza o impacto do título:

Naturalmente, a questão não deve ser interpretada tão literalmente - certamente nós devemos ensinar frações como parte do currículo elementar. Mas é minha convicção que nós não devemos ensinar frações do modo que tem sido ensinadas e ainda são ensinadas. Realmente, se a questão fosse "Nós ainda precisamos ensinar frações como elas são ensinadas hoje, na maioria dos programas elementares"?, então a questão pode ser interpretada literalmente e minha resposta seria "não, na verdade, nós nunca deveríamos ter ensinado frações deste modo".

Curiosamente, no debate recente, que ocupou algumas semanas da lista da SBEM[3], alguns posicionamentos se aproximaram da visão defendida por P. Hilton:

> (..) tenho insistido em retirar as frações COMO TEMA, ... sempre disse que as frações poderiam ser vistas dentro de probabilidades, razões, ... eu falava das frações TAL E QUAL elas aparecem nos livros didáticos ... Repito BANI-LAS refere-se estritamente a que elas não seriam um CAPITULO dos livros didáticos... não abririam uma unidade... elas simplesmente "apareceriam" onde tivessem que aparecer, NESTES CONTEXTOS "matemáticos" (..) (fragmentos de mensagem do professor Carlos Vianna, janeiro 2007)

[2] Há uma tradução deste artigo na página www.matematicahoje.com.br/telas/educ_mat/artigos/

[3] http://listas.rc.unesp.br/mailman/listinfo/sbem-l

Em seu artigo, Peter Hilton apontou cinco defeitos do currículo em relação às frações:

- Aplicações enganosas
- Confusão com a função dos decimais
- Ausência de cuidado com definições e explicações
- Desonestidade de apresentação
- Paixão pela ortodoxia

Concluiu desenvolvendo o que entendia serem os ingredientes para um bom curso de frações.

Seguirei um roteiro semelhante, até porque os defeitos apontados por P. Hilton permanecem nos currículos atuais. Mas o propósito maior deste texto é o de abrir a discussão sobre possibilidades não convencionais para o ensino das frações, que podem contribuir para uma aprendizagem significativa e um enriquecimento das idéias matemáticas que coabitam o campo conceitual das estruturas multiplicativas em que a proporcionalidade é a idéia forte (VERGNAUD, 1991).

**Marcas do século passado.**

Vasculhando minha biblioteca de livros antigos encontrei esta pérola autodenominada como "aplicações" das frações.

> *"Dois meninos treparam numa laranjeira e chuparam os 2/3 das laranjas que havia. Na laranjeira ficaram os 4/5 do que havia menos 14 laranjas. Quantas laranjas os meninos chuparam?"*
>
> (Extraído de "Exercícios de Matemática" de Cecil Thiré. 1932¸ 2ª ed. Livraria Francisco Alves).

Este tipo de situação-problema recebeu pesadas críticas nas últimas décadas: Peter Hilton as chamou de *aplicações enganosas*; Mme. Krygowska[4] de *problemas pseudopráticos*; Malba Tahan em seu clássico Didática da Matemática (1961), cunhou o termo *algebrismo*; para mim não passa de uma aberração pseudo-didática.

[4] Mme. Anna Zofia Krygowska, educadora matemática polonesa, presidente de honra da Comisión Internationale pour l'Etude et l'Amelioration de l'Enseignement des Mathematiques - CIEAEM.

O grave desta pretensa “contextualização” é que problemas como este podem ser encontrados em muitas coleções de materiais didáticos disponíveis no mercado em pleno 2007, em especial no segmento de 1ª a 4ª séries. Não é raro encontrar enunciados do tipo: “*João comeu 3/17 avos de um bolo, seu irmão comeu 5/9 do que restou .. quanto sobrou para sua irmã ?”*. Segundo Freudenthal “As frações complicadas e as operações com elas são invenções do professor só podem ser entendidas em nível superior”.

Na linha das aberrações que persistem há mais de um século, destaco a insistência em dar valor a uma nomenclatura inútil e por se referir a conceitos obsoletos como, por exemplo, as frações aparentes, antes mesmo que os alunos tenham consolidado o conceito de frações próprias. Sim, ainda se perde tempo precioso das crianças, ensinando frações aparentes. Imagine a cabeça de um aluno de 9-10 anos quando alguém tenta lhe convencer que existem frações que se parecem com frações, mas são números inteiros. E o que se faz com tal informação? De produtivo NADA. Quando muito se pede aos alunos que definam ou identifiquem frações aparentes, numa prova que trata de frações aparentes. Não faz sentido gastar tempo produtivo das aulas de matemática com definições deste tipo. Falar de frações aparentes e até mesmo de frações impróprias, tão logo se está introduzindo as idéias sobre frações é um atentado à intuição dos alunos.

Tentei encontrar uma explicação plausível para este tipo de ocorrência nos programas escolares. Lanço aqui a hipótese de que tal abordagem expressa um desejo de autores e professores em fazer com que as crianças aceitem precocemente uma idéia, que não é nada simples ou intuitiva, a de que frações representam números racionais.

Outro problema grave relacionado ao ensino de frações é a prescrição de regras e macetes para realizar operações.

> “*Para dividir uma fracção por uma fracção, multiplica-se a fração dividendo pela fracção divisor invertida*” (Elementos de Aritmética, FTD, 1920).

> “*Para dividir um número racional por outro número racional diferente de zero, basta multiplicar o primeiro pelo inverso do segundo*” (Pensar e Descobrir, FTD, 2007)

Mais adiante discutiremos este ponto, em especial as operações de multiplicação e divisão.

## Procuram-se frações no dia a dia

Considero aceitável que os professores investiguem e orientem seus alunos a pesquisar como se utilizam as frações no seu cotidiano. Estou me referindo ao uso fora dos livros de matemática. O que vamos constatar é o que já vem sendo discutido há pelo menos duas décadas. O uso direto das frações tende a se tornar cada vez mais raro[5]. Representações analógicas cedem lugar às digitais. Já não se encontram com facilidade balanças e instrumentos de medida com ponteiros, como é o caso dos hidrômetros antigos. O visor do odômetro dos automóveis resiste como um dos últimos mecanismos do gênero onde se **lê** frações, pelo posicionamento dos ponteiros numa escala, para saber se o tanque tem cerca de ¼ , ½ ou ¾ de combustível.

Temos que reconhecer estes fatos e nos ajustar à realidade. A notação decimal ganhou a guerra da comunicação e da usabilidade para representar números "quebrados", não inteiros. Isto não quer dizer que as frações devam ser abolidas, temos que reconhecer sua importância em contextos não utilitários, que atendem a outros significados e objetivos.

Há alguns anos fiz um levantamento de contextos e situações problema, em que as frações fossem imprescindíveis. Imaginava encontrar uma grande variedade de situações, acessíveis aos alunos do ensino fundamental, mas isto não se confirmou, pois a maioria das situações se referia a contextos do mundo dos adultos, pobres de significados para crianças e adolescentes.

a) Frações de uma coleção discreta, como 1/2, 2/3, 3/4 e 3/5, aparecem em capítulos da constituição federal ou do regimento de parlamentos estaduais ou municipais, como referências para aprovar leis ou mudar a constituição. Há um contexto em que o cálculo de 3/5 de 513 ou 2/3 de 81, não é artificial[6]; com dois terços dos

[5] Em 1937, Wilson y Dalrympe levaram a cabo uma investigação sobre os usos sociais e comerciais das frações. Concluíram que a necessidade de manejar com solvência as frações na vida ordinária se limita às metades, terços, quartos y doze avos; a subtração de frações se apresenta raramente; a divisão quase nunca aparece.

votos dos deputados federais pode-se iniciar um processo de impeachment do Presidente da República; 1/3 dos ministros do tribunal de contas são escolhidos pelo presidente da República, 2/3 pelo Congresso Nacional.

b) Frações aparecem em problemas reais de partilha de bens. Ainda que a temática seja adulta pode-se abordá-la através de um tratamento literário, onde a fantasia não precisa ser escondida, como fez Malba Tahan (1938) em "O problema dos 35 camelos" e "O problema dos 8 pães" em seu clássico "O Homem que Calculava".

c) Frações são utilizadas no cálculo de indenizações sem justa causa. Trata-se de um contexto adulto, pouco significativo para crianças, mas adequado para cursos de EJA. Para o cálculo de 13º e férias proporcionais, faz-se uso de frações com denominadores 12 (fração de ano), 28, 29, 30 ou 31 (fração de mês).

d) Frações estão presentes nos livros de receitas culinárias, envolvendo tanto grandezas discretas (ovos), contínuas (leite) ou híbridas (açúcar).

O contexto é apropriado, entretanto alguns cuidados têm que ser tomados, é ilusório acreditar que se pode ir muito longe, no estudo de frações, aumentando ou diminuindo uma receita. Nos contextos de receitas, em geral as frações são operadores sobre uma quantidade discreta ou contínua. Professores e matemáticos, que apreciam uma cozinha, sabem muito bem que há certa distância entre a matemática formal e a dos livros de receita.

Certa vez propus uma atividade de redução de receita colocando uma restrição para a quantidade de ovos. O objetivo era que os alunos diminuíssem a quantidade de ingredientes na mesma proporção que a diminuição dos ovos. Comecei a receber e-mails de alunos (de 11/12 anos) questionando como

---

[6] 513 é o número de deputados da Câmara Federal, os senadores são 81.

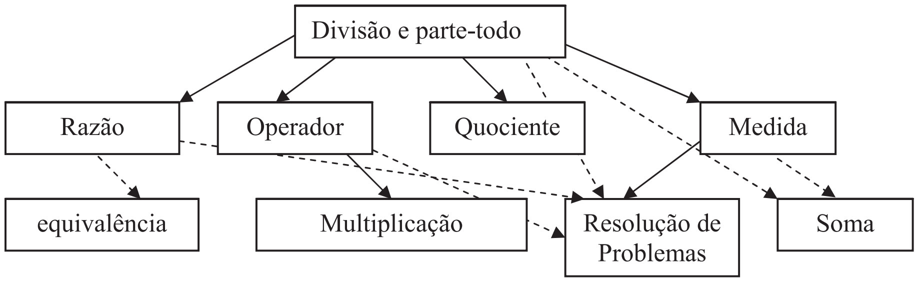
poderiam calcular a terça parte de uma pitada de sal. Outros questionaram o formato das xícaras (não cilíndricas), que não tem marcas de divisão. Entendo que nestes exemplos a modelagem matemática esbarra na realidade.



A preocupação pela busca de contextos realistas a qualquer custo, leva alguns professores e autores a propor enunciados com referência a frações de polegadas, associadas à medida de parafusos e canos. Reconheço a boa intenção, mas discordo da eficácia nestes casos. A contextualização é inadequada, crianças deste início de século estão distantes de atividades técnicas específicas. Foi-se o tempo em que os filhos acompanhavam os pais em seu ofício, na oficina ou em casa. Para a maioria dos usuários não profissionais, falar de um cano 3/8 não tem muito significado, 3/8 não passa de um rótulo, sem referência direta ao sistema de medidas, no caso o imperial, em que as relações fracionárias são abundantes.

## O que sabemos sobre a aprendizagem de frações

A aprendizagem de frações não se dá com definições prontas, nomenclatura obsoleta e pseudo-problemas sobre pizzas e barras de chocolates. Os professores deveriam ter atenção para as complexidades que envolvem conceito tão delicado. Os obstáculos à aprendizagem são muitos e de várias naturezas. A começar pelo fato de que a palavra **fração** estar relacionada a muitas idéias e constructos, ver BEHR (1983) e VERGNAUD (1983).




(BEHR, et al.,1983)

Frações são, assim consideradas, um "megaconceito"[7], constituído (construído) por diferentes subconceitos, aquilo que chamamos de interpretações do conceito.

No ensino fundamental as frações são apresentadas inicialmente como relação parte-todo, representam partes, números menores que a unidade, que foi dividida em partes iguais. Mas logo a seguir tal idéia é confrontada com a definição de frações impróprias como se isso fosse algo natural, quando de fato não é. Entendo que ocorre pela pressa em passar da idéia de relação parte – todo, para a idéia da fração representando um número racional ou um quociente (divisão). Há muitas hipóteses que tentam explicar o porquê desta passagem precoce. Analisando livros publicados a partir do movimento da Matemática Moderna, observei uma preocupação dos autores em abordar, tão rapidamente quanto possível, o conjunto Q dos números racionais. Por outro lado nos livros dos anos 1930, tão logo apresentavam as frações impróprias, orientavam os alunos a transformá-las em frações mistas, tão raras nos livros didáticos atuais, apesar de mais intuitivas.

Mas frações também representam relação parte – parte: as razões (porcentagem, escala, etc.). Em sua tese de doutorado Joaquín Gimenez (1990), listou 12 idéias distintas, associadas às frações, entre elas a de operador, taxa de variação, medida e probabilidade. Nem todas estas idéias têm sido contempladas no tratamento das frações nos livros didáticos, o que é um indicador de lacunas sérias na aprendizagem robusta do conceito. Os

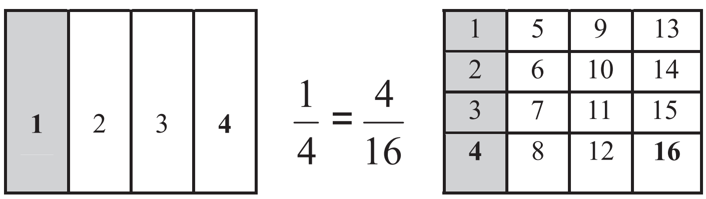
[7] Citado por Salvador Llinares e Maria Victória Sánchez Garcia, in "Fracciones", Madrid: Editorial Sintesis, 1988.

especialistas aqui citados são unânimes em apontar que não é possível isolar cada uma das idéias das frações e suas interpretações, algumas das idéias tem vínculos naturais, como se pode ver no esquema de Behr, que não podem ser ignoradas.

O estatuto epistemológico das frações, não é o único obstáculo à sua aprendizagem, também a notação das frações constitui num obstáculo, não é tão trivial a associação de uma parte através de dois números inteiros separados por um tracinho[8].

Obstáculos de naturezas diversas interferem na resposta dos alunos frente a atividades com frações. Kathleen Hart observou que os alunos só conseguiam produzir diagramas de equivalência de frações, depois de já terem reconhecido a equivalência antes de produzir o diagrama. Kerslake (1986 *apud* NUNES, 1997), também estudou equivalências e, em um de seus estudos, apesar de ter encontrado algumas crianças que responderam corretamente 2/3 + 3/4, observou que nenhuma sabia explicar o porquê de transformar as frações originais utilizando o denominador 12. Concluiu que as crianças estavam apenas reproduzindo uma rotina que lhes foi ensinada. Aprendizagem mecânica no sentido atribuído por Ausubel (1978 *apud* MOREIRA, 2006).

Entendo que o conceito de fração equivalente é um dos mais importantes no ensino-aprendizagem das frações, mas considero insuficiente o trabalho restrito a grades retangulares. Temos observado que para escrever uma fração equivalente, na maioria dos casos, a atividade da criança reduz-se à contagem do total de células, tal como foi instruída.




Crianças pequenas (6/7 anos) usam o referencial “metade” para resolver problemas que exigem julgamentos proporcionais (SPINILLO, l995 na referencia está 1994).

[8] Para um maior aprofundamento ver o clássico *“A History of Mathematical Notatios”* de Florian Cajori. Dover. 1993 (1ª. Ed. 1928).

Alunos de quase todas as culturas cometem erros padrão no cálculo de adição de frações, trata-se de um fenômeno conhecido como "*sobregeneralização*"[9]. Quem nunca viu crianças somarem numeradores e denominadores como fazem nas multiplicações?

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Peter Hilton sugere um aproveitamento didático deste tipo de erro, explorando um contexto em que esta regra é válida. Considere a razão a/b como a relação gols/jogos, e cada razão representando um turno de um campeonato.

O leitor já deve ter se dado conta de que não é possível discorrer, num único artigo, sobre as centenas de investigações que têm como tema o processo de ensino-aprendizagem das frações. Certamente outros aspectos são abordados nos demais artigos deste Bolema especial. Tratemos então de discutir algumas seqüências didáticas que, fundamentadas naquilo que a pesquisa nos oferece, contribuem para uma aprendizagem significativa e sólida das frações e conceitos conexos.

## O que os alunos poderiam estar aprendendo sobre frações

Um dos problemas que detectamos no ensino de frações, é o fato de que seu ensino tem estado restrito até o final da 6ª série. Parece estar implícito neste tipo de organização curricular, uma "reserva de mercado", característica dos currículos anteriores aos PCN, em que frações são tratadas nas 4ª e 5ª séries, razões e proporções na 6ª, álgebra na 7ª, e funções na 8ª. Por trás desta visão, subjaz a crença no caráter categórico e acumulativo dos conteúdos, bastando ensinar frações em algum ponto do programa e, pronto! Daí em diante as frações estariam disponíveis como objetos de domínio dos alunos. Mas a realidade é outra, é comum que professores das séries finais do ensino fundamental e mesmo do ensino médio, exponham sua incredulidade pelo

[9] O conceito de sobregeneralização é tratado por Helena Cury, em seu livro *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Belo Horizonte: Autêntica. 2007.

fato de seus alunos não responderem a atividades que envolvem frações com o desempenho esperado.

Confinar o tema frações em algumas séries do currículo é um erro grave, desconsidera o fato de que o desenvolvimento do pensamento proporcional se estende por um longo período que vai dos 7/8 anos aos 14/15 anos, em níveis distintos de complexidade. Uma conseqüência pedagógica que se pode extrair destas considerações, é que os currículos deveriam contemplar experiências diversas com frações em todas as séries do ensino fundamental e médio, algo que vá além da revisão com frações mais "difíceis". Refiro-me a um tratamento em espiral que implique em aquisição e mudança conceitual, no sentido de Santos (1991), que explore as distintas idéias e subconstructos, idéias conexas e contextos em que o conceito de frações se aplica e se consolida.

Hans Freudenthal e Peter Hilton enfatizaram a importância do desenvolvimento de um senso numérico para os números racionais. Para Freudenthal a matemática é uma atividade humana, surge como materialização da realidade, logo a aprendizagem matemática deve originar-se dessa realidade, isto não significa mantê-la conectada apenas aos fenômenos do mundo real, senão também ao realizável, imaginável ou razoável para os alunos, desta perspectiva a componente cultura tem que ser levada em conta como contexto.

O que queremos enfatizar é que a matemática que vale a pena ser ensinada, e aprendida, é a que promove aprendizagem significativa, que faça sentido para os alunos. Para a consecução deste objetivo, Freudenthal propõe que contextos realistas, sejam pontos de partida naturais para processos de descoberta e reinvenção da matemática.

É desta perspectiva que proponho um conjunto de atividades cujo objetivo, entre outros, é o desenvolvimento desse sentido numérico em níveis progressivos de complexidade, de modo a poder ser explorado em todas as séries do ensino fundamental:

- Exponha os alunos a situações que possibilitem a problematização e exploração da noção de metade em distintos contextos de comparação.

Isto me fez lembrar de minha avó, que apesar de não saber nada de frações, tinha uma técnica muito engenhosa na hora de resolver a disputa entre seus dois netos, pelo melhor pedaço do bife: "Um corta e outro escolhe".

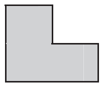
- Explore a metade da metade, e a metade da metade, da metade;

- Investigue o sentido das palavras que tenham a idéia de parte seus contextos: meio, metade, terço (da reza), quinto (dos quintos dos infernos), novena (da reza), dízimo, etc.;

- Explicite as idéias e o sentido de palavras que tenham a mesma raiz etimológica que "fração": fratura, fraco, frágil, fragmento, fracasso, fracionar, fracionado;

- Explore atividades de resolução de problema focadas na visualização:

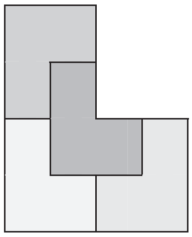
Desenhe ao menos duas figuras diferentes, em que a figura abaixo representa:



a) 1/2

b) 1/3

c) 1/4



Eis uma solução não trivial do item "c"

Explore somas infinitas.

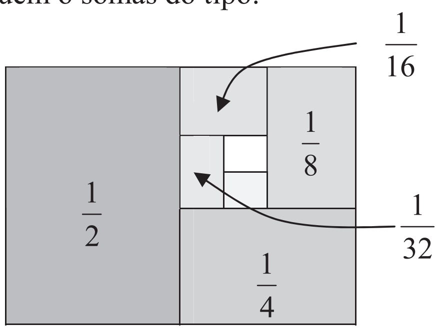
Proponha que os alunos investiguem o somas do tipo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=$$




Demonstração de que $\sum_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=2$ [10]

Neste tipo de atividade os alunos exercitam o cálculo de somas, sem grandes obstáculos de cálculo. Após algum tempo tendem a perceber padrões, o que contribui para que façam cálculo mental com frações de certo tipo. A atividade contribui para que os alunos tenham suas primeiras noções de aproximação e limite. Associado a este tipo de seqüência didática podemos introduzir as frações egípcias.

- Frações egípcias[11] são instigantes, curiosas e ricas de significados. Os egípcios representavam uma fração qualquer justapondo frações unitárias (um modo de indicar a soma). Um pequeno círculo sobre o hieróglifo que representa um número inteiro, indicava uma fração unitária, as frações 1/2, 2/3 e 3/4 tinham símbolos próprios.

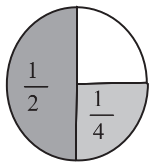
[10] In *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking* de Roger B. Nelsen. MAA. 1993.

[11] Para um maior aprofundamento sobre frações egípcias, ver "*Números fracionários: primórdios esclarecedores*" de Nilza Eigenheer Bertoni. In Coleção História da Matemática para professores, SBHM. 2005

 $= \frac{1}{3}$  $= \frac{1}{10}$

 $= \frac{1}{2}$  $= \frac{2}{3}$  $= \frac{3}{4}$

Alunos de 5ª série conseguem resolver o problema da decomposição da $\frac{3}{4}$ em duas frações unitárias, ainda que a situação seja inicialmente inusitada, uma vez que os alunos estão habituados a explorar a soma direta, do tipo "efetue".




Leve os alunos a admitir que $^6/_7 = {}^1/_2 + {}^1/_3 + {}^1/_{42}$

Proponha a construção de tabelas de dupla entrada que dêem a soma de frações unitárias com denominadores de 2 a 12, os alunos vão descobrir regularidades, que serão incorporadas a seu acervo da fatos aritméticos, essenciais para o cálculo mental.

Decomponha as frações 5/6 e 7/12 em frações unitárias.

Em atividades realizadas com alunos de 11/12 anos, observamos que a tarefa de decompor uma fração, em frações unitárias é resolvida através de distintas estratégias, dentre as mais freqüentes destaca-se: a) o uso de representações geométricas como grades ou gráfico de setores; b) a estratégia de subtrair a maior fração unitária da fração a ser decomposta, reduzindo reiteradamente o problema:

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \qquad \frac{7}{12} = \frac{6}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \qquad \frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

Atividades com frações egípcias contribuem para que os alunos desenvolvam habilidades de cálculo mental com frações, desde que sejam "frações boas", e não "frações esquisitas" como $\frac{13}{47}$.

- O trabalho com frações deveria privilegiar a exploração de "frações boas". A esta altura o leitor deve estar indagando, mas o que são "frações boas"? Denominamos "frações boas" às frações que podemos construir uma imagem mental[12], ou que tenham alta significação cultural e de uso. Encaixam-se nesta categoria as frações com denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 e 12.
  Obviamente a fração 13/47 não é uma fração boa, entretanto os alunos podem desafiados a encontrar uma fração boa, tão próxima quanto possível de 13/47.
  Observe que $\frac{13}{47} \cong \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$. Pronto, os alunos não precisam saber exatamente quanto é 13/47, seu senso numérico lhe dá segurança de que é aproximadamente 1/4.
  Se sentir o entusiasmo da turma o professor pode propor que decidam se 13/47 é maior ou menor que 1/4.

O trabalho com frações egípcias e frações boas, dá conta dos alunos explorarem procedimentos e idéias chaves como frações equivalentes, comparação, adição e subtração simples. Contribui para que sejam introduzidas idéias importantes como aproximação, arredondamento, limites e ainda que se possam explorar distintas representações, é uma boa oportunidade para se explorar a calculadora como ferramenta de investigação.

- Quanto mais domínio computacional os alunos tiverem com as frações, mais preparados estarão para enfrentar problemas do tipo: "marque duas frações quaisquer na reta, e encontre uma terceira fração entre as duas"

---

[12] No sentido atribuído por FISCHBEIN, E. The Theory of Figural Concepts. Education Studies in Mathematics, 1993.

Encontre uma, ou mais frações entre 2/3 e 3/4.

O primeiro problema é estabelecer uma relação de ordem entre as frações dadas, o outro é encontrar a fração pedida. Os alunos experimentam distintas estratégias, sendo que a mais freqüente é a percepção de que a média aritmética responde ao problema. Esta dada a deixa para falar sobre a **densidade** do conjunto dos racionais na reta. A densidade é um conceito muito importante no estudo dos conjuntos numéricos, e apesar de seu potencial intuitivo nas séries finais do ensino fundamental, está restrito aos cursos de cálculo.
Nesta fase em que os alunos já dispõem de ferramentas algébricas, demonstrar, que existem infinitos números racionais entre dois números racionais quaisquer, é simples.
A média aritmética entre dois racionais a/b, c/d quaisquer, com $b, d \neq 0$ é o racional:

$$x = \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} = \frac{ad + bc}{2bd}.$$

- Frações têm um papel de destaque na história da matemática, não há razão para que esta abordagem fique ausente dos currículos. A notação decimal é relativamente recente na história da matemática, números irracionais como $\pi$ eram substituídos por aproximações de números racionais.

Os alunos deveriam conhecer um pouco da história do $\pi$, e suas várias aproximações ao longo da história. Uma atividade importante é calcular áreas ou perímetros de coisas experimentando (com a calculadora é claro), distintos valores de $\pi$ :

| **Aproximação de $\pi$** | |
|---|---|
| 3 | Chineses (1100 a.C.) e antigo testamento (550 a. C.) |
| 3 1/8 | Babilônios (2000 a. C.) |
| 256/81 | Egípcios (2000 a.C.) |
| $3\ 10/71 < \pi < 22/7$. | Arquimedes (séc. III a. C.) |
| 377/120 | Cláudio Ptolomeu (séc. II d. C.) |
| 142/45 | Wang Fau (séc. III d. C.) |
| 157/50 | Liu Hui (263 d. C.) |
| 355/113 | Tsu Ch'ung-chih (aprox. 450) |
| 62832/20000 | Aryabhata (aprox. 530) |
| $\sqrt{10}$ | Brahmagupta (aprox. 650) |
| 3,141818 | Leonardo de Pisa (Fibonacci1220) |

Alunos e professores ficam impressionados com a aproximação 355/113 descoberta por um marceneiro chinês, com precisão de 1 milionésimo.

- O estudo de probabilidades contribui significativamente para o desenvolvimento do senso numérico dos números racionais, realça a idéia de razão, tanto em contextos discretos como contínuos. A introdução das probabilidades no ensino fundamental proposta nos PCN está fundamentada em estudos teóricos de reconhecimento nacional e internacional[13], sua prática está consolidada em alguns sistemas de ensino estaduais como o de Minas Gerais.

- As possibilidades de uma abordagem intuitiva para a divisão de frações são escassas, as aplicações realistas são mais escassas ainda. A regra geral da divisão de duas frações quaisquer, tem sentido quando os alunos dispõem de ferramental algébrico, o que não ocorre da 4ª à 6ª série.

[13] Para um maior aprofundamento ver as teses de doutorado da profa. Maria do Carmo Vila (UFMG) e do Prof. José Damasceno (UnB) e os trabalhos de investigação da Profra. Carmen Batanero (Univ. de Granada).

Em um estudo realizado com alunos de 12 anos[14], a divisão foi apresentada como um problema, sem prescrição de regra.

Os alunos construíram a regra a partir de duas idéias chave: a divisão como operação inversa da multiplicação, e o conceito de frações equivalentes.

Tão logo o professor escreveu "$\frac{14}{15} \div \frac{2}{5}$?", no quadro, os alunos não tiveram dúvidas em atacar o problema, dividindo numerador por numerador, denominador por denominador.

$$\frac{14}{15} \div \frac{2}{5} = \frac{7}{3}$$

Imaginei que estavam apenas reproduzindo a regra da multiplicação. Mas a argumentação dos alunos surpreendeu. Seguiu-se um intenso movimento de provas e refutações num ambiente de investigação.

Aluno 1: *"Ué a divisão não é a operação inversa da multiplicação?"*

A verificação não dá margem a dúvidas: $\frac{7}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{7 \times 2}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$

Podemos complicar a vida dos alunos:

Mas como você faria no caso $\frac{3}{14} \div \frac{2}{7}$?

Aluna 2: $\frac{3 \div 2}{14 \div 7} = \frac{\text{"1,5"}}{2}$

[14] A interação e os diálogos aqui reproduzidos ocorreram em uma turma de 6ª. Série da Escola da Vila, SP no ano de 1994. Uma versão da aula está documentada no livro da 6ª série da coleção Matemática Hoje é Feita Assim FTD, de Antonio José Lopes BIGODE.

Aluno 3: *Mas* $\frac{\text{"1,5"}}{2}$ *não é fração.*

Aluna 2: *Mas dá prá achar a fração* equivalente: $\frac{\text{"1,5"}}{2} \overset{\times 2}{=} \frac{3}{4}$

Aluno 4: *Mas e se for um divisão bem encrencada como por exemplo* $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7}$ ?

[observe que o encrencado proposto do aluno tem a ver com o fato de aparecer uma dízima, impossível de ser eliminada pela multiplicação de um número inteiro]

Aluna 2: *Humm ! Neste caso acho que o melhor é achar uma fração equivalente a* $\frac{2}{3}$ *que dê para aplicar minha regra. Tem que ser uma fração em que tanto o numerador como o denominador tem que ter os fatores 5 e 7.*

$\frac{2}{3}$ *é equivalente a* $\frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 7} = \frac{70}{105}$

*se* $\frac{2}{3}$ *é equivalente a* $\frac{70}{105}$ *então* $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7}$ *deve ser igual a* $\frac{70}{105} \div \frac{5}{7}$

Prof.: *Vamos verificar o resultado.*

Aluna 2: *Agora vai dar* $\frac{70}{105} \div \frac{5}{7} = \frac{70 \div 5}{105 \div 7} = \frac{14}{15}$

$\frac{5}{7} \times \frac{14}{15} = \frac{70}{105}$ que simplificando dá $\frac{}{3}$

Pode não parecer, mas a esta altura os alunos já tinham generalizado, ainda que não estivessem utilizando uma linguagem algébrica.

Neste ponto o professor avalia a seu critério, se os alunos têm condições de acompanhar e aceitar a generalização numa linguagem mais formal.

> Se a, b, c, e d são números inteiros e a, b $\neq$ 0
>
> Dada a divisão $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ e, sabendo que $\frac{a}{b}$ é equivalente a $\frac{acd}{bcd}$, pode-se efetuar a operação do seguinte modo: $\frac{acd}{bcd} \times \frac{c}{d} = \frac{acd \div c}{bcd \div d} = \frac{ad}{bc}$.

## Considerações Finais

Ao pensar neste artigo – debate, não tive a pretensão de esgotar o tema, como se pode conferir pela leitura do conjunto de artigos deste Bolema, e a diversidade de perspectivas em que o tema foi abordado. Trata-se de um artigo fundamentado em experiências, investigações e no que de mais avançado tem sido produzido pela comunidade brasileira e internacional de Educação Matemática.

O objetivo que persegui foi o de mostrar que, apesar de as frações terem adquirido um outro estatuto no currículo, devido à perda de força da componente utilitarismo, seu ensino é essencial e inegociável, isto se atribuirmos a devida importância a outros aspectos: o cultural, o formativo (de natureza cognitiva) e o matemático. Mas para isto é necessária uma reflexão crítica sobre o currículo, as práticas e objetivos do ensino-aprendizagem da matemática.

A maioria dos professores e autores de materiais didáticos, desconhece a história do conceito de frações, bem como suas componentes, epistemológica e cognitiva. O ensino de frações tem sido praticado como se nossos alunos vivessem no final do século XIX, um ensino marcado pelo mecanicismo, pelo exagero na prescrição de regras e macetes, aplicações inúteis, conceitos obsoletos, “carroções”, cálculo pelo cálculo. Esta fixação pelo adestramento empobrece as aulas de matemática, toma o lugar de atividades instigantes e com potencial para introduzir e aprofundar idéias fortes da matemática. Professores, autores, investigadores, não importa a natureza de nossa atividade profissional, não temos o direito de sonegar aos alunos as possibilidades de exercício de pensamento matemático autêntico.

[Agradeço ao professor Carlos Vianna (UFPR) pelas valiosas sugestões críticas que fez às primeiras versões deste artigo].

## Referências

BEHR, M. J. et al.. **Racional Number Concepts in Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. Lesh, R. e Landau, M. (ed.) New York: Academic Press. 1983.

BERTONI, N. Números fracionários: primórdios esclarecedores. In: **Coleção História da Matemática para professores,** SBHM. 2005.

BIGODE, A. J. L. **Matemática Hoje é Feita Assim** (6ª série) São Paulo: FTD. 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemáti*ca: 1-4. Brasília: MEC/SEF. 1997.

__________. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemáti*ca: 5-8. Brasília: MEC/SEF. 1998.

CAJORI, F. **A History of Mathematical Notatios**. Florian Cajori. Dover. 1993 (1ª. Ed. 1928).

CURY, H. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica. 2007.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an Educational Task**. Dordrecht: Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1973.

FISCHBEIN, E. **The Theory of Figural Concepts**. Education Studies in Mathematics, 1993.

GIMENEZ, J. **Innovació metodológica sobre el racional positiu**. (1990) tese não publicada.

HART, K. M. **Fractions in Children´s Understanding of Mathematics**. Hart, K. (ed.) Londres: Murrray. 1981. p. 11-16.

HILTON, P. **Do We Still Need Fractions in the Elementary Curriculum?.** In: Proceedings of the IV International Congress on Mathematical Education. Boston: Birkhäuser. 1980. p. 37-41

LLINARES, S.;Garcia, M. V. S. **Fracciones**, Madrid: Editorial Sintesis, 1988.

MOREIRA, M. A. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação na sala de aula**. Brasília: Editora UnB. 2006.

NELSEN, R. B. **Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking**. MAA. 1993.

NUNES, T.; BRYANT, P**. Crianças Fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas. 1997.

SANTOS, M. E. V. M. **Mudança Conceitual na Sala de Aula – Um Desafio Pedagógico.** Lisboa: Livros Horizonte. 1991.

SPINILLO, A. G. **Aprendendo a fazer julgamentos proporcionais usando o referencial de 'metade'**. In: II Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática (CIBEM). 1994, Blumenau: Livro de resumos, 1994.

_______________. **Noções iniciais das crianças sobre probabilidade**. In: XXIV Reunião anual de Psicologia da SBP, 1994. Livro de Resumos. Ribeirão Preto, 1994.

TAHAN, M. **O Homem que Calculava**. 55ª. Edição Rio de Janeiro. Ed. Record. 2001. (1ª. Ed. 1938).

___________. **Didática da Matemática**. São Paulo: Editora Saraiva. 1961.

VERGNAUD, G. (1983**). Multiplicative Structures in Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.** Lesh, R. e Landau, M. (ed.) New York: Academic Press. 1983.

_______________ **El nino. Las Matemáticas y la Realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria**. México: Trillas. 1991.

**Aprovado em novembro de 2007**
**Submetido em abril de 2007**