Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008, p. 23 a 40

A Fração nas Perspectivas do Professor e do Aluno dos Dois Primeiros Ciclos do Ensino Fundamental

Fractions from the Perspective of Elementary School Teachers and Students

Sandra Magina[1]
Tânia Campos[2]

Resumo

O presente estudo visa discutir o ensino e a aprendizagem do conceito de fração nas séries iniciais do Ensino Fundamental a partir de uma pesquisa diagnóstica aplicada paralelamente a 70 professores polivalentes e a 131 alunos que cursavam 3ª e 4ª séries do Ensino Fundamental. A análise dos resultados oferece indícios de que os professores têm, em geral, um prognóstico do desempenho dos alunos longe do real, havendo uma tendência de superestimar o nível de acertos, principalmente no que tange aos alunos da 4ª série. Uma possível causa para essa discrepância pode estar relacionada ao fato da maioria dos professores não ter claro os diferentes significados que as frações assumem, o que os leva a apresentar estratégias de ensino que nem sempre auxiliam seus alunos a superar falsas concepções sobre esse conceito. Tais estratégias resumem-se à indicação do uso de material concreto à utilização do desenho para facilitar comparações perceptuais, em detrimento do ensino de ordem e equivalência, invariantes operatórios necessários para a compreensão do referido conceito. Os alunos, por sua vez, apresentaram desempenhos insuficientes em muitos dos problemas apresentados, principalmente naqueles cujos significados se relacionavam aos significados "número" e "operador multiplicativo".

Palavras-chave: Conceito de fração. Ensino Fundamental. Professor polivalente. Prognóstico. Estratégias de ensino.

---

[1] Professora Titular da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP. Rua Marquês de Paranaguá, 111 - Consolação, São Paulo, SP, CEP 01303-050. E-mail: sandra@pucsp.br.
[2] Professora da Universidade Bandeirantes de São Paulo – UNIBAN. Av. Braz Leme, 3029, São Paulo, SP, CEP 02022-011. E-mail: taniammcampos@hotmail.com.

Abstract

The aim of this study is to discuss teaching and learning of the concept of fractions in the early elementary grades based on findings from a diagnostic study applied to 70 elementary school teachers and 131 3rd and 4th grade students. Analysis of the results suggests that the teachers, in general, have a prognosis of students' performance that is far from true, with a tendency to overestimate the number of correct answers, mainly of 4th grade students. A possible cause for this discrepancy could be related to the fact that the different meanings of fractions are not clear to most of the teachers, which leads them to employ teaching strategies that do not always help students overcome false conceptions regarding the concept. Such strategies can be summed up in the use of concrete materials and drawings to facilitate perceptual comparisons, in detriment to teaching order and equivalence, which are operative invariants that are needed to understand the concept. The students' performance, in turn, was inadequate in dealing with many of the problems, mainly those problems in which the meaning of "number" was related with that of "multiplicative operator".

Key-words: Concept of Fraction. Elementary Education. Elementary School Teacher. Prognostic. Teaching Strategy.

Introdução

O principal objetivo de nossa pesquisa foi compreender como a fração vem sendo concebida, aprendida e ensinada no 2º ciclo do Ensino Fundamental. Para tanto, investigamos: (a) os conceitos que professores que atuam nesse ciclo – professores não especialistas em Matemática ou, simplesmente, polivalentes – têm sobre fração, por meio de uma análise tanto de suas estratégias de ensino, como de seus prognósticos sobre o desempenho de alunos, e (b) também o desempenho real apresentado por alunos da 3ª e 4ª série, ao resolverem problemas envolvendo o conteúdo fração.

Os pontos de partida do estudo foram: (a) os professores têm competência para resolver problemas de fração, mas não em todas as situações, e (b) eles propõem poucas estratégias de ensino para ajudar seus alunos a superar eventuais concepções errôneas do conceito. Tais premissas são colocadas por acharmos que os (1) invariantes operatórios da fração, quais sejam, ordem e equivalência, quando são apropriados pelos professores, costumam ser de maneira implícita para eles. Além disso, acreditamos que (2) as predições dos professores sobre o desempenho dos alunos estariam acima do que esses alunos, efetivamente, conseguem resolver, principalmente no que tange aos alunos da 4ª série. Esta hipótese vem como conseqüência da primeira, uma vez que se os professores não têm consciência dos invariantes operatórios da fração, tampouco lançarão mão de estratégias de ensino que facilitem a aprendizagem de seus alunos. Acreditamos que é possível não haver acentuada diferença entre os desempenhos dos alunos da 3ª e da 4ª séries, tendo em vista que o ensino deste conteúdo tende a não avançar em relação aos diferentes significados e aos invariantes operatórios a eles associados.

Assim, dadas as limitadas estratégias de ensino utilizadas pelos professores (CAMPOS; MAGINA, 2004), perguntamo-nos:

1. Quais as principais estratégias que esses professores lançam mão no ensino de fração?

2. Como se saem os alunos de 3ª e 4ª séries ao resolverem problemas de fração que envolvem várias situações e diferentes significados?

No Brasil, o conceito de número racional, na sua representação fracionária, tem seu ensino iniciado, formalmente, a partir do segundo ciclo do Ensino Fundamental, entre 3ª e 4ª séries, estendendo-se pelo menos até o final do terceiro ciclo, 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. Os professores brasileiros que atuam no nível de escolarização de 1ª à 4ª séries do Ensino Fundamental, costumam, em geral, utilizar as situações de parte-todo como sendo o principal contexto para o ensino de fração. No entanto, em suas experiências pessoais com fração é muito provável que eles tenham desenvolvido um entendimento dentro de outras situações, tais como fração como quociente e como descritoras de quantidades intensivas.

Pesquisas recentes (BERTONI, 2004; BEZERRA *et al*, 2002; MERLINI, 2005; MOUTINHO, 2005; NUNES *et al*, 2005; SANTOS, 2005; RODRIGUES, 2005) têm evidenciado dificuldades em relação a esse conceito, quer seja do ponto de vista de seu ensino, quer seja do ponto de vista de sua aprendizagem. No que se refere ao ensino, o que se tem revelado é, muitas vezes, uma forte tendência para traduzir esse conceito apenas utilizando a exploração do significado parte-todo, a partir de sua representação a/b com a, b naturais e $b \neq 0$. Nesse sentido, Campos e Cols (*apud* NUNES, 1997, p. 191) afirmam que: “O método de ensino (...) simplesmente encoraja os alunos a empregar um tipo de procedimento de contagem dupla – ou seja, contar o número total de partes e então as partes pintadas – sem entender o significado desse novo tipo de número”.

No que diz respeito à aprendizagem, os alunos podem até apresentar algumas habilidades em manipular os números racionais, sem necessariamente ter uma compreensão clara do conceito. Nunes e Bryant (1997, p.191) afirmam que:

> Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e ainda não a têm. Elas usam os termos fracionários certos; falam sobre frações coerentemente, resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba.

Essa afirmação apresentada por Nunes e Bryant pode ser constatada quando observamos o baixo desempenho atingido pelos alunos brasileiros frente a situações que envolvem o conceito de número racional, na sua representação fracionária, em questões bem próximas daquelas trabalhadas em sala de aula e apresentadas na maioria dos livros didáticos. Esse baixo rendimento pode ser também observado nos resultados oficiais, de avaliações bienais realizadas pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) em todo Brasil. O SAEB é aplicado a uma amostra dos alunos da Rede Pública em todo território brasileiro.

O SAEB (2001) aplicado em 287.719 alunos de 4ª e de 8ª séries do Ensino Fundamental e de 3ª série do Ensino Médio, de um total de, aproximadamente, 40 milhões de alunos matriculados nos Ensinos Fundamental e Médio, conclui em seu relatório de Matemática que o conceito de número racional, especialmente a sua representação fracionária, precisa ser melhor explorado. O relatório recomenda a exploração desse conceito especialmente em situações práticas, de modo a oferecer significado para os alunos. Vale ressaltar que o sucesso dos alunos da 4ª série, em questões envolvendo representação de fração, propostas no SAEB (2001), ficou em patamares de 35%.

Explicitados os fatores motivadores e o objetivo deste artigo, passaremos a apresentar o tema do ponto de vista teórico, discutindo o conceito de número racional na perspectiva do seu ensino e da sua aprendizagem e dos significados que ele pode assumir em diferentes situações.

Pressupostos Teóricos

Nosso estudo parte das premissas da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1983, 1998, 2001), a qual afirma que um conceito é formado por uma terna, a saber: um conjunto de situações, que dá *significado* ao objeto em questão, um conjunto de invariantes operatórios, que trata das propriedades e procedimentos necessários para definir esse objeto, e um conjunto de representações simbólicas, as quais permitem relacionar o significado desse objeto com as suas propriedades.

No que tange aos invariantes operatórios, estes podem ser explícitos – quando as propriedades do objeto e os procedimentos para resolvê-lo estão consciente para o sujeito – ou podem ser implícitos – quando o sujeito faz uso correto dos procedimentos, porém não tem consciência das propriedades que subjaz esse procedimento que ele próprio usou para resolver o problema. Os invariantes da fração são a ordem e a equivalência.

Quanto às frações, podemos refletir sobre elas a partir de diferentes situações em que aparecem com diferentes significados. Existem algumas várias classificações *a priori* dos tipos de situações e de significados para os números racionais. Kieren (1975) foi o primeiro pesquisador a chamar a atenção da comunidade científica para o fato de que os números racionais são constituídos de vários construtos e que a compreensão da noção de número racional depende do entendimento destas diferentes interpretações. Posteriormente, Kieren (1980), identifica cinco idéias como sendo básicas no processo de compreensão dos números racionais, a saber: parte-todo, quociente, medida, razão e operador. Na seqüência, têm-se as valiosas contribuições de Behr *et al* (1983, 1992), cuja leitura torna-se imprescindível para o estudo do tema.

Nunes (2003) inspirada nos trabalhos de Kieren (1980), afirma que uma aprendizagem do conceito de fração poderá ser obtida com maior êxito quando explorado esse conceito em seus cinco significados: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo, sendo que é importante ter os invariantes operatórios do conceito explicitamente presentes ao se trabalhar cada um desses significados.

As situações de parte-todo, que são muito usadas no ensino de fração no Brasil, resumem-se, muitas vezes, a dividir uma área em partes iguais, a nomear a fração como o número de partes pintadas sobre o número total de partes e a analisar a equivalência e a ordem da fração por meio da percepção (CAMPOS; MAGINA, 2004). Tais ações levam os alunos a desenvolver seus raciocínios sobre fração (CAMPOS; MAGINA, 2006) baseados principalmente na percepção, em detrimento das relações lógico-matemáticas nela envolvidas (NUNES; BRYANT, 1997; NUNES *et al*., 2005).

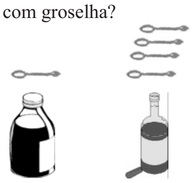
O uso de outras situações pode ser mais proveitoso para a apropriação da lógica como alicerce para as idéias de fração. Por exemplo, problemas com o significado quociente podem ser usados para as crianças se apropriarem do invariante de ordenação das frações por meio do raciocínio lógico: quanto mais crianças para dividirem o bolo, menor o pedaço de bolo que cada uma receberá. Esta relação inversa entre o divisor e o quociente poderia ajudar as crianças a entenderem que, quanto maior o denominador, menor será a parte. Nessas situações com significado quociente, o professor poderia também usar a razão para ajudar as crianças a entenderem o invariante de equivalência de frações: dada uma mesma razão entre crianças e bolos, a fração correspondente será equivalente, mesmo que o número de bolos e crianças possam diferirem nos exemplos. A razão também poderia ser usada em situações nas quais as frações são descritores de quantidades intensivas (medida): se duas misturas de tinta foram feitas com a mesma razão de tinta azul para tinta branca, a cor será a mesma e as frações serão equivalentes, mesmo que a quantidade total de tinta seja diferente (CAMPOS; MAGINA, 2004). Ainda, poderíamos pensar na fração como o valor escalar aplicado a uma quantidade (NUNES, 2003). Estamos falando do significado de operador multiplicativo. No caso do número inteiro, por exemplo, podemos dizer que compramos 12 balas; no caso da fração, poderíamos dizer ¾ de um conjunto de balas. A idéia implícita nesses exemplos é que o número é um multiplicador da quantidade indicada. Assim, podemos dizer que ganhamos ¾ das balas de um pacote que continha 16 balas.

Descritos alguns aspectos centrais dos significados considerados nesse estudo, passaremos então a apresentar a metodologia utilizada.

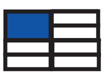
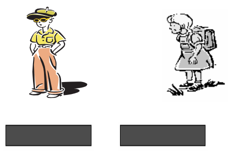
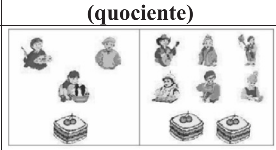
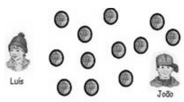
Método de Estudo

O estudo envolveu um universo de sete escolas da rede pública da cidade de São Paulo. Sua realização constou da aplicação coletiva, com resolução individual, de dois instrumentos diagnósticos – um aplicado a 70 professores polivalentes e outro em 131 alunos (65 da 3ª série e 66 da 4ªsérie). Com relação ao diagnóstico dos professores, esse constou de 11 questões. Para efeito deste artigo discutiremos sete dessas questões, sendo que as três primeiras referem-se a estratégias de ensino (pedia-se para que eles opinassem sobre respostas erradas dadas por eventuais alunos) e as quatro últimas aos prognósticos de sucesso dos alunos (pedia-se para que eles previssem o provável percentual de acerto que alunos que estivessem cursando a 3ª série e também alunos que estivessem na 4ª série apresentariam em cada uma das questões). Com relação ao instrumento dos alunos, esse constou de 12 situações-problema. Neste artigo, no sentido de realizar uma comparação entre o prognóstico dos professores e a realidade dos alunos, apresentaremos uma análise de apenas quatro deles, nomeadamente os mesmos que foram utilizados na previsão dos professores (quadros 1 e 2).

Quadro 1: Os 3 problemas apresentados aos professores para investigação de suas estratégias de ensino

PROBLEMA 1 (Quociente)	PROBLEMA 2 (Medida)	PROBLEMA 3 (parte-todo)
As meninas dividem uma torta e os meninos também dividem uma torta igual a das meninas. 1. Cada menina vai comer o mesmo tanto que cada menino? Por que? 2 Que fração as meninas vão comer? E os meninos? 3. Qual a maior fração? 	Na segunda-feira você misturou 3 litros de tinta branca e 3 de tinta azul. Na terça-feira você misturou 2 litros de branca e 2 de azul. 1. A mistura vai ficar da mesma cor nos dois dias? 2. Por que? 3. Que fração da mistura foi feita com tinta azul na segunda-feira? 4. E na terça-feira? **segunda-feira**  **terça-feira** 	Uma farmacêutica mistura groselha num remédio de tosse. Para melhorar o gosto do remédio que é muito amargo ela usa uma colher do remédio e 4 de groselha. Que fração da mistura foi feita com groselha? 
Uma criança deu as seguintes respostas: 1. Cada menino vai comer o mesmo tanto que cada menina vai comer porque as tortas são do mesmo tamanho *2. Os meninos comem 1/2 e as meninas comem 1/3.* 3. 1/3 Como você acha que essa criança raciocinou? (Escreva sua explicação no retângulo abaixo) O que você faria para promover a compreensão dessa criança?	Uma criança deu as seguintes respostas: 1. A tinta vai ficar mais escura na segunda porque tem 3 litros de tinta azul, 2. Tem mais tinta azul do que na terça . 3. Na segunda a metade da mistura foi feita com tinta azul 4. Na terça também . Como você acha que essa criança raciocinou? (Escreva sua explicação no retângulo abaixo) O que você faria para promover a compreensão dessa criança?	Uma criança deu a seguinte resposta: ***1/4*** Como você acha que essa criança raciocinou? (Escreva sua explicação no retângulo abaixo) O que você faria para promover a compreensão dessa criança?

Quadro 2: Problemas apresentados aos professores para prognóstico de sucesso dos alunos e apresentados aos alunos para resolução dos mesmos.

PROBLEMA 4 (parte-todo)	PROBLEMA 5 (número)	PROBLEMA 6 (quociente)	PROBLEMA 7 (operador)
Que fração representa as partes pintadas de cada figura? a)  b)  c) 	Maria e Paulo receberam uma barra de chocolate de mesmo tamanho cada um Maria comeu 1/4 do chocolate dela e Paulo comeu 1/2 do chocolate dele. Quem comeu mais chocolate, Maria ou Paulo? 	 a) As 9 crianças comerão a mesma quantidade de bolo? Sim ☐ Não ☐ b) Que fração representa a divisão do bolo na figura 1? c) Que fração representa a divisão do bolo na figura 2?	 a) João ganhou 1/3 das bolinhas de gude. Contorne as bolinhas que ele ganhou. b) Luís ganhou 2/3 das bolinhas de gude. Quantas bolinhas ele ganhou?

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Procederemos com a nossa análise segundo as duas vertentes a que este artigo se propõe discutir. Assim, nossa primeira análise tratará das estratégias de ensino propostas por esses professores, a partir de seus prognósticos, no que tange os problemas do quadro 1. Relembramos que esses problemas foram apresentados aos professores e pedia-se para que eles explicassem o possível raciocínio do aluno que o levou ao erro e oferecessem estratégias de ensino para superar a dificuldade e promover a compreensão da fração sob a ótica daquele significado.

A segunda análise tratará de uma comparação entre o prognóstico que esses professores fizeram acerca do provável percentual de sucesso de alunos da 3ª e 4ª séries no que concerne à resolução dos quatro problemas do quadro 2 e o efetivo percentual de sucesso encontrado entre os alunos de 3ª e 4ª séries ao resolverem tais problemas (desempenho real dos alunos). Registramos que muitas vezes os professores resolveram os problemas propostos.

A seguir apresentamos a análise das estratégias de ensino dos professores (quadro 1)

Problema 1: (quociente)

Desempenho

Todos os professores tiveram sucesso ao resolver o problema. No entanto, a maioria explicou a resposta da criança baseada no conjunto dos números naturais. Por exemplo, como no conjunto dos naturais 3>2, então 1/3>1/2 sem fazer a devida atenção de que isso não é verdade no conjunto dos números racionais. Poucos professores sugeriram mais que uma estratégia de ensino, mas quando isso acontecia, consideramos em nossas freqüências, ambas as respostas. 65 professores apresentaram o uso do desenho ou material concreto para facilitar comparações perceptuais.

Estratégias dos professores e suas freqüências

1 46 estratégias estavam relacionadas à percepção – desenhar ou cortar supostas pizzas em 2 ou 3 partes; comparar o tamanho das partes;

2 19 estratégias propunham o uso do desenho ou do material concreto. A recomendação do uso dessa estratégia para auxiliar o entendimento da criança vinha desacompanhada de qualquer explicação de como fazer isso, ou o que fazer com isso.

3 4 estratégias propunham o uso da relação inversa entre o número de divisores e o tamanho da parte (ou o número de tortas e o tamanho das partes).

4 3 estratégias não puderam ser classificadas, pois estavam indefinidas.

Problema 2: (medida)

Desempenho

Todos os professores tiveram sucesso ao identificar que as misturas teriam a mesma cor nos dois dias. Contudo suas respostas foram freqüentemente obtidas por meio da razão, isto é, 3/3 = 1 e 2/2 = 1, então as misturas terão a mesma cor. Não consideraram a utilização da razão para ensinar a equivalência das frações. 41 professores propuseram o uso do desenho e material concreto como estratégia de ensino e 23 professores utilizaram a razão sem relacionar a mesma com a representação fracionária.

Estratégias dos professores e suas freqüências

5 23 estratégias estavam relacionadas à razão – propunham mostrar que a razão era a mesma ou que a quantidade de cor azul e branca eram a mesma;

6 18 estratégias referiam-se à quantidade das duas cores – propunham relacionar a quantidade das cores da segunda-feira e compará-las com a da terça-feira;

7 13 estavam relacionadas à percepção – propunham o uso do desenho ou do material concreto;

8 7 estratégias não puderam ser classificadas, pois estavam indefinidas;

9 3 professores não responderam.

Problema 3: (parte-todo com quantidade discreta)

Desempenho

43 professores (62%) julgaram a resposta da criança "1/4" como correta, não conseguindo perceber que o todo deveria ser composto por 5 colheres e, então, que o denominador deveria ser 5. Eles também desconsideraram que a resposta da criança seria mais apropriada se ela tivesse tentado encontrar a proporção do remédio para a groselha ao invés da proporção da groselha para o remédio

Estratégias dos professores e suas freqüências

1 24 professores não responderam o problema;
2 18 estratégias propunham a composição do todo e então a identificação da fração;
3 12 professores propuseram o uso do material concreto, sem contudo trazer qualquer explicação de como usá-lo;
4 6 estratégias foram tentativas de fazer conexões entre a razão e a fração sem sucesso;
5 10 estratégias não puderam ser classificadas, pois estavam indefinidas.

Conclusão da análise do Quadro 1

Como esperado, nos três problemas acima, a principal estratégia de ensino proposta pelos professores é o uso de desenho ou de material concreto, com vistas a facilitar comparações perceptuais dos alunos, o que demonstra limitações em disponibilizar estratégias de ensino facilitadoras do processo de aprendizagem da fração. Por exemplo, nas situações nas quais a razão poderia ser usada como base para a lógica do invariante de equivalência, os professores percebiam que eles poderiam resolver o problema por meio de razão, mas a maioria mostrou que não estava apto a fazer conexão entre a razão e a fração. Assim, a nossa primeira questão de pesquisa está respondida. Podemos afirmar que a principal estratégia de ensino proposta por esses professores foi a utilização da percepção visual dos alunos.

Análise do quadro 2 – Sobre a previsão dos professores e realidade dos alunos

De posse dos protocolos, isto é, 1179 respostas dadas pelos alunos, e 630 prognósticos apresentados pelos professores, procedemos as análises dos resultados, estabelecendo uma categoria de análise que contempla cinco níveis de prognósticos, os quais retratam a proximidade do prognóstico feito pelo professor em relação ao percentual real de acerto do aluno. A tabela a seguir descreve esses níveis:

Nível 0	Sem prognóstico (SP)
Nível 1	Prognóstico Longe do Real (LR)
Nível 2	Prognóstico Pouco Acurado (PA)
Nível 3	Prognóstico Razoavelmente Acurado (RA)
Nível 4	Prognóstico Acurado (AC)

Tabela 1: Níveis de prognósticos.

É oportuno explicitar que o nível 4 denominado Prognóstico Acurado (AC), expressa que a diferença entre o prognóstico feito pelo professor e o desempenho real dos alunos foi menor que 6 pontos percentuais. O nível 3, denominado Prognóstico Razoavelmente Acurado (RA) expressa que a diferença entre o prognóstico feito pelo professor e o desempenho real do aluno está compreendida, entre 6 (inclusive) e 11 (exclusive) pontos percentuais.

O nível 2 denominado Prognóstico Pouco Acurado (PA), expressa que a diferença entre o prognóstico feito pelo professor e o desempenho real do aluno, está compreendida entre 11 (inclusive) e 16 (exclusive) pontos percentuais. O nível 1 denominado Prognóstico Longe do Real (LR), expressa que a diferença entre o prognóstico feito pelo professor e o desempenho real do aluno foi maior que 16 pontos percentuais. Finalmente o nível 0 diz respeito a questão que o professor não apresentou prognóstico, denominado sem prognóstico.

O gráfico a seguir apresenta a média dos resultados obtidos pelos alunos da 3ª e da 4ª série nas quatro questões, por itens e no geral, juntamente com a média dos prognósticos dos professores com relação ao que eles esperam que alunos dessas séries acertem nos respectivos itens.

		Prob 4a	Prob 4b	Prob 4c	Prob 5	Prob 6a	Prob 6b	Prob 6c	Prob 7a	Prob 7b	Média Geral
3a Série	Prognóstico	77,4	76,8	72,7	61,2	55,8	64,2	56,4	55,7	52,4	**63,6**
	Real	72,3	63,1	40	10,8	66,1	55,4	52,3	35,4	6,1	**44,6**
4a série	Prognóstico	89,6	88,6	85	74,9	70,9	78,4	70,3	70,8	68,4	**77,4**
	Real	65,1	65,1	39,4	19,7	75,8	62,1	57,6	48,5	12,1	**49,5**

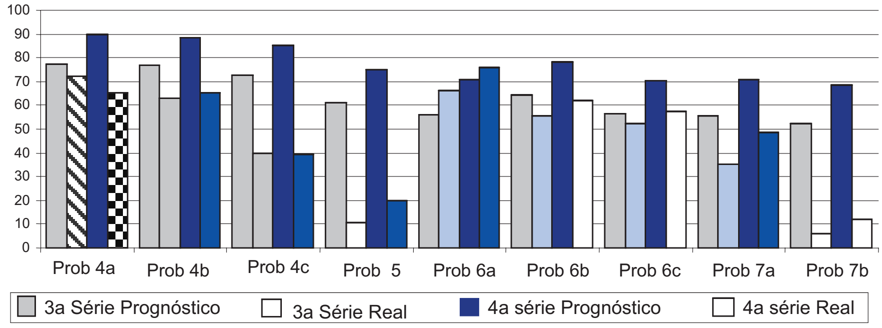


Gráfico 1: Comparativo entre o prognóstico dos professores e desempenho real dos alunos (em porcentagem).

A primeira informação que podemos extrair do gráfico acima é que as médias de acertos gerais dos alunos das duas séries no teste ficaram bem aquém do previsto pelos professores, tanto para a 3ª série (19 pontos percentuais acima) quanto para a 4ª série (27, 9 pontos percentuais a cima). Também observamos que a diferença nos percentuais gerais de acertos entre a 3ª e a 4ª série foi mínima (4,9% a favor da 4ª série).

O gráfico 1 nos permite observar que, com exceção da situação-problema 6a, os professores superestimam os desempenhos dos alunos tanto na 3ª quanto na 4ª série. Nos demais itens, notamos que as médias das estimativas dos professores foram sempre acima das médias dos desempenhos reais dos alunos das duas séries, sendo essas mais discrepantes na 4ª série. Assim, as diferenças nas médias entre os prognósticos dos professores e os desempenhos reais dos alunos, para a 3ª séries, variaram entre 4,1% (no item 4a) e 50,4% (no item 5). Na 4ª série esta variação está compreendida desde 12,7% (no item 6c) até 56,3% (item 7b). Por outro lado, vale a pena observar que na situação-problema 6a os professores subestimam a capacidade dos alunos da 3ª série, onde esses alunos obtiveram 10,3 pontos percentuais a mais de acertos do que os professores previram. Essa subestimativa também aconteceu para os alunos da 4ª série, embora em percentuais bem mais inferiores (4,9%).

No que se refere aos significados envolvidos nas situações-problema propostas observamos que:

a) Os problemas 4a, 4b e 4c, que envolviam o significado parte-todo icônico, apresentaram graus de dificuldade crescentes para os alunos, observados pelos seus níveis de acertos: 72,3%, 63,1% e 40% para a 3ª série e 65,1%, 65,1% e 39,4% para a 4ª série. Comparando-se os prognósticos dos professores com os acertos dos alunos, constatamos que estes prognósticos são razoavelmente acurados para o problema 4a da 3ª série e pouco acurados para o problema 4b da 3ª série. Em todos os outros casos os prognósticos estão longe do real. Chama a atenção o item 4c, em que houve uma grande discrepância entre os baixos e próximos percentuais de sucesso dos alunos de ambos os grupos (40% na 3ª série e 39,39% na 4ª) e o confiante prognóstico dos professores (72,7% e 85% para o que esperavam de acerto para a 3ª e 4ª séries respectivamente). Este item “c” tem um agravante em que a parte pintada corresponde ao dobro de cada uma das outras 6 partes não pintadas. Assim, para responder corretamente os alunos teriam que levar em consideração a equivalência das áreas, coisa que não o fizeram. No entanto, parece que os professores não fizeram seus prognósticos levando em consideração os graus de dificuldade de um item para outro.

   Este resultado caminha na direção de confirmar nossa hipótese sobre a não apropriação consciente, por parte dos professores, dos invariantes da fração e que os leva a não identificarem as dificuldades dos problemas. Da mesma forma, por não ter apropriado o invariante de equivalência, os alunos, de ambas as séries, não conseguem resolver satisfatoriamente o item.

b) O problema 5 envolvia o significado de número e foi mobilizado o invariante que Vergnaud denomina relação de ordem, uma vez que 1/4 e 1/2 operam sobre ‘todos’ idênticos. Este problema, juntamente com o problema 4b, apresentou as maiores discrepâncias entre os prognósticos dos professores e os acertos dos alunos: 50,5% na 3ª série e 55,2% nas 4ª séries.

Considerando-se que a média percentual dos prognósticos dos professores não alteram muito em relação às outras questões, há fortes indícios de que os mesmos não se dão conta das dificuldades intrínsecas a este problema. A dificuldade dos alunos fica evidente quando olhamos os seus percentuais de acertos: 10,8% nas 3ª séries e 19,7% nas 4ª séries.

Esta é uma mais uma evidência de que os alunos não lidam com situações de fração a partir de seus invariantes, estando muito mais presos a fatores perceptuais. E, de fato, quando perguntado aos professores sobre suas estratégias de ensino para ajudar seus alunos a superar dificuldades em resolver problemas de fração, a resposta mais comum foi o de utilizar estratégias relacionadas à percepção.

c) O problema 6 envolvia o significado quociente e o invariante equivalência. Analogamente ao problema 4, apresentou itens com dificuldades crescentes para os alunos. Para os professores, contudo, os itens 6a e 6c se equivaliam em dificuldades e seriam um pouco mais difíceis que o 6b, embora eles esperassem que a maioria dos alunos da 4a série não tivessem problemas para resolver os três itens (expectativa média de 70 a 74% de acertos). Este prognóstico só foi realista para o 1º dos três itens.

Novamente, constatamos que em seus prognósticos os professores não levaram em conta a dificuldade dos invariantes (no caso, a equivalência entre frações), ao passo que para esses alunos (um pouco mais entre os alunos da 3ª do que da 4ª série) isto ainda é algo a ser compreendido.

A questão 7 tratou de uma situação que envolvia o significado operador multiplicativo, aplicado à quantidade discreta. Os dados revelam a grande dificuldade dos alunos em resolver questões deste tipo. A 3ª série obteve 35,4% e 6,1% de acertos respectivamente para os itens "a" e "b" e a 4ª série 48,5% e 12,1%. Aqui, também, observamos uma grande discrepância entre os prognósticos dos professores e o nível real de acertos dos alunos, denotando-se, mais uma vez, que os prognósticos dos professores se encontram longe do que os alunos realmente sabem. Além disso, como aconteceu nas questões 4 e 6, observa-se que os professores não levaram em consideração a gradação das dificuldades presentes entre os itens, uma vez que os prognósticos para esses itens foram muito próximos, ao passo que o desempenho real dos alunos, evidenciou que existe uma dificuldade crescente.

Conclusão

Baseadas em nossos resultados, a primeira conclusão a que chegamos, para esta amostra, é que, embora a maioria dos professores conseguisse identificar e explicar, de maneira aceitável, os erros cometidos pelos alunos em diferentes situações, eles apresentaram estratégias de ensino muito limitadas, não favorecendo os alunos a superar suas dificuldades. Tais estratégias limitam-se praticamente a indicação do uso do desenho ou material concreto visando facilitar comparações perceptivas em detrimento do ensino de ordem e equivalência, invariantes operatórios necessários para a compreensão do conceito em referência. Além disso, parece não haver uma clareza desses professores sobre os diferentes significados da fração, o que os leva a propor situações que se restringem quanto à percepção e ao significado parte-todo.

As evidências apontam que o prognóstico dos professores está longe do real desempenho dos alunos de ambas as séries. De forma geral há uma tendência de superestimar a capacidade dos alunos da 4ª série em relação aos da 3ª série, o que não se confirmou justamente porque não houve uma diferença expressiva entre o desempenho dos grupos (3ª e 4ª séries), o que nos leva a refletir sobre a relação direta entre as estratégias de ensino utilizadas pelos professores e os desempenhos dos alunos.

De fato, se tanto na introdução do ensino de fração (3ª série), quanto na continuação desse ensino (4ª série), há uma primazia da estratégia voltada para comparações perceptivas da fração e pouca ou nenhuma ênfase para a lógica dos invariantes, claro está que não é esperado que haja evolução na apropriação do conceito de uma série para outra.

Houve uma tendência considerável dos professores em não levar em consideração o grau de dificuldade intrínseco de cada item das questões, especialmente nos significados parte-todo e operador multiplicativo. Concluímos que uma possível causa para estas discrepâncias entre os prognósticos e o real desempenho dos alunos está relacionada ao fato de que os próprios professores não têm claro os diferentes significados que as frações e seus invariantes assumem, o que, por sua vez, leva-os a apresentar limitadas estratégias de ensino para auxiliar seus alunos a superarem falsas concepções sobre fração.

Também concluímos que os alunos, de ambas as séries, têm pouca compreensão da fração, já que nenhum dos dois grupos conseguiu atingir média de 50% no teste. E isso se agrava quando a situação requer que eles tenham se apropriado dos invariantes da fração (ordem e equivalência). Tudo leva a crer que os alunos responderam ao teste utilizando como principal (se não o único) suporte a percepção. Aliás, essa (a percepção) parecer ser a "grande" estratégia de ensino desses professores.

Talvez estejam nestas questões as reflexões que se fazem necessárias para se obter uma maior aproximação entre o ideário pedagógico do professor e a zona de desenvolvimento proximal dos alunos (no sentido dado por Vygotsky). Esta adequação dificilmente se estabelecerá, se não houver uma relação dialógica entre professor e aluno, colocando-se o primeiro na condição de constante pesquisador das idéias e concepções espontâneas dos alunos.

Referências

BEHR, M.J.; LESH, R.; POST. T.R; SILVER, E.A. Rational number concepts**.** In: Lesh, R & Landau, M (Eds.), **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press: Nova York, 1983, p.91-126.

BEHR, M. J.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational Number, Ratio, and Proportion. In: Grouws, D. A. (Ed.), **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan, 1992, p. 296-333.

BERTONI, N. E. Um novo paradigma no ensino e na aprendizagem das frações. Anais do 8º Encontro Nacional de Educação Matemática. In: **VIII ENEM.** Recife: SBEM, 2004.

BEZERRA, F, MAGINAS; SPINILLO, A. How promote children understanding of fractions? An exploratory study**. PME,** V.2, 2002, p. 89-96.

CAMPOS, T.; MAGINA, S. Primary school teachers' concepts of fractions and teaching strategies. **ICME 10**. Copenhague, pg. 1-8, 2004. Disponível em http://www.icme-organisers.dk/tsg22/, (consultado em julho de 2007).

CAMPOS T.; MAGINA, S. O professor Polivalente e a Fração: conceitos e estratégias de ensinos. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo: EDUC. N.1, V. 8, 2006, p. 125-136.

KIEREN, T. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers**.** In Lesh, R. (Ed.) **Number and measurement: Paper from a research workshop**. Columbus, Ohio: ERIC/MEAC, 1975, p.101-144.

KIEREN, T. Personal Knowledge of rational numbers: its intutive and formal development .In: Hiebert, J and Behr, M. (eds.) **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 1980, p. 162-180.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental.** 207 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

MOUTINHO, L. V. **Fração e seus diferentes significados: um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do ensino fundamental.** 198 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo 2005.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T. *et al*. The effect of situations on children´s understanding of fractions. In: **British Society for Research on the Learning of Mathematics**. Oxford: Junho de 2003.

NUNES, T.; CAMPOS, T.; MAGINA, S.; BRYANT, P. **Educação Matemática: números e operações**. São Paulo: Cortez, 2005.

RODRIGUES, W. R. **Números Racionais: Um estudo das concepções de alunos após o estudo formal.** 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SAEB. **Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica.** Brasília: MEC, 2001.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental.** 205 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. In: Lesh, R e Landau, M. (Eds). **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983.

VERGNAUD, G. A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. **JMB**, V17, No 2, 1998, p.167-181.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais, In: BRUN, J. (Ed.) **Didáctica das matemáticas**. Tradução por Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 2001, p. 155-191.

Aprovado em setembro de 2007
Submetido em abril de 2007