A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas[1]

The Theory of Subconstructs and the Rational Number as Operator: from algebraic to cognitive structures

Plínio Cavalcanti Moreira[2]
Maria Cristina Costa Ferreira[3]

Resumo

Neste trabalho focalizamos o papel do subconstruto operador na aprendizagem escolar dos números racionais, revisando a literatura especializada sobre o tema. A escolha desse subconstruto deve-se ao fato de que é vinculado à operação de multiplicação, o que o coloca em posição de destaque quando se pensa no desenvolvimento do chamado raciocínio multiplicativo. Revisamos a literatura, procurando explicitar perspectivas a partir das quais o papel dessa interpretação do número racional é considerado importante no currículo escolar, assim como descrever resultados de pesquisas empíricas e reflexões teóricas relacionadas com o trabalho escolar com esse subconstruto. Finalizamos apresentando algumas questões que, a nosso ver, ainda merecem atenção. O objetivo do texto é apresentar uma síntese da literatura relacionada com este tópico específico, oferecendo aportes que podem ser relevantes para a construção de uma visão profissional docente a respeito dos números racionais.

Palavras-chave: Educação Matemática. Números Racionais. Subconstrutos. Operador.

---

[1] Agradecemos a Salvador Llinares e Manuela David por críticas e sugestões a uma versão inicial deste texto. Trabalho produzido com apoio financeiro da Capes e da UFMG.
[2] Departamento de Matemática e Faculdade de Educação, UFMG. Endereço para correspondência: Departamento de Matemática, ICEX, UFMG. Av. Antônio Carlos, Campus Pampulha, Belo Horizonte, MG. E-mail: plinio@ufmg.br.
[3] Departamento de Matemática, UFMG. Endereço para correspondência: Departamento de Matemática, ICEX, UFMG. Av. Antônio Carlos, Campus Pampulha, Belo Horizonte, MG. E-mail: cristinaferreira@ufmg.br.

Abstract

We present a literature review on the role of the operator subconstruct in the learning of rational numbers. We chose to focus on this subconstruct because it is related to the operation of multiplication, which places it in a position of importance when one considers the development of so-called multiplicative reasoning. We reviewed the literature seeking to make explicit perspectives in which the role of this interpretation of rational number is considered important in the school curriculum, and to describe empirical research findings and theoretical reflections related to work with this subconstruct in school. We finish by presenting some issues that we believe deserve additional attention. The objective is to present a synthesis of the literature on this specific topic, offering support that may contribute to teachers' construction of a professional view regarding rational numbers.

Key-words: Mathematics Education. Rational Numbers. Subconstructs. Operator.

Introdução

Um problema freqüentemente apontado no Brasil em relação à divulgação da pesquisa científica no campo da Educação Matemática é a dificuldade com que se defronta o professor da escola para fazer uso dessas pesquisas em sua prática docente. Vários fatores estão relacionados a essa dificuldade, sendo importante destacar o fato de que a maior parte dessa literatura só pode ser encontrada em língua estrangeira. Observa-se, ademais, que quase não existem publicações brasileiras dirigidas diretamente aos professores da escola básica, tratando de temas específicos da matemática escolar, numa perspectiva que contemple de modo abrangente os resultados das pesquisas internacionais relacionadas com o tema. Outro fator importante se refere à tendência da produção científica atual, em que as investigações são cada vez mais centradas em questões muito específicas, de tal modo que a utilização sistemática de seus resultados na escola demandaria uma integração de informações provenientes de uma quantidade muito grande de pesquisas primárias. Por outro lado, há que se considerar também o fato de que alguns dentre os próprios estudos acadêmicos têm apontado um distanciamento problemático entre o saber elaborado a partir de perspectivas acadêmicas e as questões com que se defronta o professor na sua prática profissional na escola básica (MOREIRA; DAVID, 2008, BALL, 2003).

Tendo em vista a problemática descrita acima, desenvolvemos uma pesquisa com o objetivo de revisar a literatura especializada do campo da Educação Matemática relativa ao tema "números racionais". O trabalho, do qual este texto é parte, visa, por um lado, sintetizar as grandes questões sobre o tema, de acordo com a literatura acumulada ao longo dos últimos 35 anos, tendo em vista o processo de formação do professor da escola básica. Uma síntese como essa é pertinente, a nosso ver, dado o imenso volume da literatura existente e sua relativa dispersão entre propostas de material para uso direto em sala de aula, pesquisas empíricas, estudos teóricos, experimentos em situações "ideais" etc. Por outro lado, a idéia é focalizar, a cada vez, um tópico específico (neste texto, o tópico selecionado é o subconstruto operador) de modo que a revisão da literatura se faça "por etapas", para que os textos resultantes sejam curtos e de leitura razoavelmente fluente, mas, ao mesmo tempo, possam ir além da simples descrição de resultados, situando perspectivas e possíveis limitações das pesquisas relatadas nos trabalhos revisados.

A escolha do subconstruto operador para este relato deve-se, por um lado, ao seu vínculo "genético" com a operação de multiplicação, o que o coloca em posição de destaque quando se pensa no desenvolvimento do chamado raciocínio multiplicativo. E, por outro lado, observa-se que, embora freqüentemente mencionado nos relatos de pesquisa, esse subconstruto não parece ser trabalhado como tal nos livros didáticos ou nos currículos escolares brasileiros.

Os subconstrutos

A literatura a respeito dos racionais, principalmente no período 1975-95, apresenta um grande conjunto de trabalhos que partem de uma premissa comum: para que desenvolva uma compreensão efetiva desse sistema numérico, a criança deve ser exposta a uma diversidade de interpretações do que seja uma razão de inteiros (essas interpretações constituem os chamados subconstrutos da noção de número racional). Livros destinados a professores, (LAMON, 2006, LLINARES; SANCHEZ, 1998, DICKSON *et al.*, 1993) também incorporam a idéia dos subconstrutos, ainda que com ênfases diferenciadas. Observa-se, por outro lado, que a literatura do período 1975-

95 envolvendo os subconstrutos continua sendo bastante citada em estudos posteriores sobre o tema.

Kieren explica de onde surgem os diferentes subconstrutos:

> [...] uma análise matemática dos números racionais (que tipo de objetos são esses?) conduz a várias interpretações [...] Essas interpretações formam um conglomerado conceitual para a construção das estruturas cognitivas e as estratégias instrucionais associadas (1980, p.134).

Quais seriam essas interpretações? Em Kieren (1976) apresentam-se sete subconstrutos. Nesse trabalho os racionais são vistos como fração, como fração decimal, como classe de equivalência de frações, como razão, como operador, como corpo quociente ordenado e como medida. O próprio Kieren, em trabalho posterior (KIEREN, 1980) faz a defesa explícita de apenas cinco subconstrutos (qualificando-os de básicos), agora com os seguintes nomes: relação parte-todo, razão, quociente, medida e operador.

Naquele que talvez seja (paralelamente aos trabalhos de Kieren) o conjunto de estudos de maior repercussão na literatura especializada sobre os racionais nos últimos 35 anos, o Rational Number Project (RNP) apresenta uma série de resultados de pesquisas empíricas e de reflexões teóricas sobre o ensino e a aprendizagem dos racionais. A partir do início da década de 1980, esses pesquisadores modificam a lista de subconstrutos proposta por Kieren (1976), redefinindo alguns deles e subdividindo outros. A lista do RNP em 1983 é a seguinte: relação parte-todo, medida, razão, quociente indicado, corpo quociente e operador (BEHR *et al*., 1983), mas eles afirmam que o nível de sofisticação associado ao subconstruto corpo quociente demanda estruturas intelectuais que estariam fora do alcance de alunos do Ensino Fundamental. Nota-se, assim, certa dinâmica na determinação dos subconstrutos mais relevantes. Enfim, na segunda metade da década 1990-2000, a literatura parece se estabilizar na consideração de cinco deles como principais: relação parte-todo, medida, razão, quociente indicado e operador. Na seqüência deste trabalho, abordaremos particularmente o subconstruto operador. Na próxima seção mostramos como a literatura revisada concebe esse construto e seus vínculos com a estrutura multiplicativa dos racionais. Na seção seguinte, veremos como são percebidas as questões cognitivas e didáticas associadas ao trabalho escolar com esse subconstruto. Finalizamos o artigo com uma breve discussão das principais idéias apresentadas.

O subconstruto operador e a estrutura algébrica dos racionais

Ao descrever especificamente o subconstruto operador, Kieren (1976) afirma que essa interpretação está vinculada à idéia de transformação (*mapping*), tanto no caso de um conjunto finito sobre outro, como também no caso do plano euclidiano sobre si mesmo. E apresenta o seguinte exemplo para ilustrar: a partir de um ponto pré-fixado *P*, o operador $\frac{2}{3}$ leva um ponto genérico *Q* do plano num outro *Q'*, de tal forma que *Q'* pertence à semi-reta *PQ* e o segmento *PQ'* tem comprimento igual a $\frac{2}{3}$ de *PQ*. De modo geral, segundo Kieren, o número racional $\frac{p}{q}$ pode ser concebido como "*um operador que transforma uma figura geométrica em outra* $\frac{p}{q}$ *vezes maior ou menor*" (KIEREN, 1976, p.113).

Llinares e Sanchez (1998), num livro para professores da escola, descrevem o subconstruto operador da seguinte maneira:

> De acordo com essa interpretação, as frações são vistas como transformações: "algo que atua sobre uma situação (estado) e a modifica". Concebe-se a fração como uma sucessão de multiplicações e divisões. Por exemplo, se num contexto discreto tomamos como situação de partida (estado-unidade) o conjunto formado por 36 alunos de uma classe, o efeito da aplicação do operador pode ser representado pela seguinte tabela:

ESTADO-UNIDADE (situação)	OPERADOR	ESTADO FINAL
36 alunos	Dividir por 3 , multiplicar por 2	24 alunos

> O estado final "24 alunos" recebe também o nome de estado "dois terços", como a descrição de um estado de coisas (LLINARES; SANCHEZ, 1998, p.72).

Esses autores observam que, embora se possa inverter a ordem das operações, "[...] *está implícita na interpretação operador a seguinte convenção: primeiro atua a divisão e depois a multiplicação, identificando-se assim com a interpretação parte-todo*" (p.73).

Lamon (2006), também num livro para professores da escola, afirma que um operador é um

> [...] conjunto de instruções para executar um processo. Por exemplo, "$\frac{2}{3}$ de" é um operador que instrui você para multiplicar por 2 e dividir por 3. Para aplicar o operador "$\frac{2}{3}$ de" realizamos as operações familiares de multiplicação e divisão sucessivamente. [...] o operador $\frac{2}{3}$ pode ser visto como uma única operação numa quantidade Q, pode ser visto também como uma multiplicação de Q por 2 seguida da divisão do resultado por 3 ou, ainda, como uma divisão de Q por 3 seguida da multiplicação do resultado por 2 (LAMON, 2006, p.151-152, aspas no original).

Logo em seguida essa autora interpreta o operador $\frac{p}{q}$ como uma máquina (modelo *input-output*) que troca a quantidade q pela quantidade p (e.g., 3 dólares por 2 tickets de metrô).

Pesquisadores do RNP, por sua vez, distinguem e nomeiam, num primeiro momento, dois tipos de operador: o dilatador-redutor, no caso de operando contínuo (por exemplo, o operador $\frac{p}{q}$ atuando sobre comprimentos: há uma redução pelo fator q e em seguida o resultado é dilatado pelo fator p) e o multiplicador-divisor, no caso discreto, em que um operador $\frac{p}{q}$ atua sobre um operando n dividindo-o por q e multiplicando o resultado por p (BEHR *et al*., 1983). Em trabalhos posteriores, Behr, Harel, Post e Lesh (1991, 1992, 1993) desenvolvem uma análise mais detalhada do subconstruto operador, chegando a dividi-lo em cinco sub-subconstrutos. Na próxima seção, comentaremos alguns aspectos dessa análise, a qual se refere essencialmente a diferenças conceituais que esses autores consideram relevantes para a aprendizagem.

Vemos, portanto, que o subconstruto operador está associado essencialmente à percepção do número racional $\frac{p}{q}$ como uma função linear $f(x) = \frac{p}{q}x$. Uma pergunta natural seria: de onde surge essa interpretação do número racional? Ou, refazendo a pergunta nos termos do trecho citado de Kieren (1980): que tipo de análise matemática dos racionais produz essa interpretação?

Do ponto de vista da matemática acadêmica, o conjunto dos números racionais pode ser caracterizado (a partir dos inteiros) da seguinte maneira: consideramos em $Z \times Z^*$, a relação de equivalência *R* segundo a qual dois pares ordenados *(a, b)* e *(c, d)* estão relacionados se e somente se *ad* = *bc* (*Z* é o conjunto dos inteiros e $Z^* = Z - \{0\}$). A chamada "passagem ao quociente pela relação de equivalência *R*" significa que todos os pares equivalentes são identificados entre si, passando a serem vistos como um único objeto. Este objeto é o número racional cuja representação seria dada por qualquer dos pares equivalentes. A coleção de todos os (infinitos) pares que representam o mesmo número racional é denominada uma classe de equivalência de *R* e o conjunto das classes de equivalência é chamado espaço quociente de $Z \times Z^*$ pela relação de equivalência *R* (a notação usual é $\left(Z \times Z^*\right)/R$). Assim, um número racional é uma classe de equivalência de pares ordenados de inteiros, segundo a relação *R*, dada acima. Por exemplo, o número racional $\frac{3}{4}$ é, de acordo com essa abordagem, a classe de equivalência dada pelos pares $\{(3n, 4n) : n \in Z^*\}$. Analogamente, o número racional zero seria a classe $\{(0, n) : n \in Z^*\}$ e o racional 1 seria $\{(n, n) : n \in Z^*\}$. Costuma-se representar a classe de todos os pares equivalentes a *(a, b)* por $\overline{(a,b)}$. As operações de adição e multiplicação de racionais são definidas de modo a "traduzir" para essa linguagem formal as fórmulas usuais da adição e multiplicação de frações: $\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(ad+bc,bd)}$ e $\overline{(a,b)}\times\overline{(c,d)}=\overline{(ac,bd)}$. Pode-se verificar facilmente que se efetuarmos qualquer das duas operações com pares diferentes, mas equivalentes, a classe resultante é a mesma. Com as definições formais dadas acima, e lembrando que *a, b, c* e *d* são números inteiros, vê-se que a adição de racionais é comutativa, associativa, tem elemento neutro (0) e todo racional tem oposto ou simétrico. A multiplicação também é comutativa, associativa, tem elemento identidade (1) e todo racional $\overline{(a,b)}$ com a $a \neq 0$ tem inverso $\overline{(b,a)}$. Dizemos então que o conjunto dos racionais *Q* tem uma estrutura de *grupo comutativo* em relação à adição e também em relação à multiplicação. Não é difícil ver que a multiplicação é distributiva em relação à adição e, assim, reúnem-se todas as propriedades que caracterizam *Q* como uma estrutura de *corpo*. Por definição, $\overline{(a,b)}>0$ se *a* e *b* forem não nulos de mesmo sinal e $\overline{(a,b)}<0$ se *a* e *b* tiverem sinais diferentes (lembremos que *a* e *b* são inteiros). Dizemos que o racional $\overline{(a,b)}$ é maior que o racional $\overline{(c,d)}$ se $\overline{(a,b)}-\overline{(c,d)}>0$. Assim, *Q* pode ser percebido, finalmente, em sua estrutura de corpo quociente ordenado. O leitor pode estar, a essa altura, se perguntando: o que isso tudo tem a ver com o subconstruto operador? Respondemos: é a partir dessa percepção de como estrutura algébrica abstrata que Kieren (1976) afirma que o trabalho com os racionais na escola deve ser visto como uma oportunidade para colocar o aluno frente a frente com problemas de natureza algébrica, pois, segundo ele, no estudo dos racionais a criança tem que:

> · Familiarizar-se com a noção de equivalência;
> · Lidar com uma operação "+" a qual, em sua forma algébrica, "funciona" como funciona por razões essencialmente axiomáticas e não mais por causa da natureza intrínseca da operação;
> · Operar em um sistema em que "+" e "x" são operações distintas, definidas abstratamente (essas duas operações com os racionais são análogas a "somar" comprimentos e compor funções);
> · Trabalhar com as propriedades, em particular a noção geral de inverso.
> Conseqüentemente, os conceitos relativos ao conjunto dos

> racionais são diferentes daqueles associados ao estudo dos naturais. Estes (e, em certa medida, a operação de adição) surgem a partir da atividade natural da criança. A multiplicação é tratada como uma forma especial de contagem ou como adição iterada; portanto, não aparece claramente sua natureza "algébrica". (KIEREN, 1976, p.102-103).

Neste mesmo trabalho, Kieren justifica a concepção do subconstruto operador pelas suas potencialidades como modelo para a estrutura de grupo multiplicativo dos racionais e para a construção escolar da noção geral de equivalência, dois elementos fundamentais da estrutura algébrica corpo quociente. Referindo-se ao operador $\frac{2}{3}$ como transformação do plano no plano, ele diz: "*pontos que distam 6 do ponto fixo P seriam transformados pelo operador* $\frac{2}{3}$ *em pontos que distam 4 de P. Assim, o operador* $\frac{4}{6}$ *é o mesmo que o operador* $\frac{2}{3}$*, ou* $\frac{4}{3} \approx \frac{2}{3}$*. De fato, existem infinitos operadores equivalentes a* $\frac{2}{3}$" (KIEREN, 1976, p.113). E explica que esse fato pode ser ainda mais vividamente percebido a partir da concepção do operador $\frac{p}{q}$ com uma máquina que troca q por p, atuando sobre conjuntos finitos de objetos. Citando Dienes, dá o seguinte exemplo: 2 caixas de lápis são dadas a cada grupo de 3 alunos. Nessas condições, 12 alunos receberiam 8 caixas, podendo-se dizer, então, que os números 8 e 12 estão no *estado* $\frac{2}{3}$. É fácil ver que existem infinitos pares de números no *estado* $\frac{2}{3}$ e assim esses pares formariam frações equivalentes a $\frac{2}{3}$. Pensando em termos de operadores e não de estados, os operadores 2 para cada 3 e 4 para cada 6, aplicados a um grupo de 12 alunos produziriam, ambos, 8 caixas de lápis. Assim, segundo Kieren, esses operadores, "*por fazerem a mesma coisa*", são equivalentes

(KIEREN, 1976, p.113-114). Em seguida este autor considera a relação do subconstruto operador com o produto e a divisão de racionais. E, para desenvolver seu argumento, pergunta: o que acontece se a aplicação de um operador $\frac{a}{b}$ é seguida da aplicação de outro $\frac{c}{d}$? Ele mostra então (e não é difícil ver) que isso equivale à aplicação do operador $\frac{ac}{bd}$, produto dos números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, de acordo com uma definição algorítmica pré-estabelecida, ou seja $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. Segue daí que o operador inverso de $\frac{a}{b}$ é o operador $\frac{b}{a}$. Kieren, então, conclui: "A*ssim, a noção de fração como operador conduz naturalmente à idéia de que os racionais formam um grupo multiplicativo*" (KIEREN, 1976, p.114). Kieren afirma ainda que o modelo operador também "*ilumina o conceito de divisão*" (p.115). Ele diz: "*para dividir* $\frac{2}{3}$ *por* $\frac{7}{8}$ *a questão é: que operador k leva* $\frac{7}{8}$ *em* $\frac{2}{3}$*?*" E responde, usando a idéia de operador como função linear, juntamente com o vínculo, já estabelecido, entre a composição de funções e o produto de racionais. O argumento é o seguinte: o operador $\frac{2}{3}$ leva o 1 em $\frac{2}{3}$; o operador $\frac{8}{7}$ leva $\frac{7}{8}$ em 1; então, compondo, vemos que o operador $\frac{2}{3}\times\frac{8}{7}$ levará $\frac{7}{8}$ em $\frac{2}{3}$. Assim, $\frac{2}{3}$ dividido por $\frac{7}{8}$ é igual a $\frac{2}{3}\times\frac{8}{7}$. Por fim Kieren (1976) observa que explicar a adição a partir da subconstruto operador é problemático, embora possível. Segundo ele, a adição está mais vinculada ao subconstruto medida, "*ao passo que o operador é essencialmente multiplicativo*" (p.115). Como vimos, um corpo deve "conter" sub-estruturas de grupo comutativo em relação às suas duas operações. Assim, por não possuir uma vinculação "natural" com a adição em *Q*, o subconstruto operador não pode, sozinho, responder adequadamente à estrutura algébrica mais ampla dos racionais, isto é, a de corpo quociente ordenado. Justifica-se a idéia do "conglomerado": o trabalho com os outros subconstrutos deve ajudar o desenvolvimento das habilidades intelectuais associadas à estrutura aditiva e à ordem nos racionais (o operador, sendo uma função, igualmente não se presta bem às tarefas relacionadas com as noções de maior e menor em *Q*).

O operador no currículo escolar: ensino e aprendizagem

Kieren (1976) resume a contribuição do subconstruto operador para a aprendizagem escolar dos racionais da seguinte maneira:

> Vimos que essa interpretação [operador] conduz de modo conveniente (*leads nicely*) à noção de multiplicação de racionais e naturalmente às propriedades de grupo. [...] Assim, a contribuição da noção de operador é principalmente algébrica (KIEREN, 1976, p.117).

Com relação às estruturas cognitivas associadas, ele diz:

> São três as principais estruturas cognitivas associadas ao subconstruto operador. A primeira é a habilidade de compor funções, isto é conceber o produto de duas operações como algo representável por uma única operação. A segunda é uma noção geral de reversibilidade, que dá suporte às noções abstratas de inverso e de identidade. A terceira é a proporcionalidade (KIEREN, 1976, p.118).

Behr, Lesh, Post e Silver (1983), afirmam, em concordância com a análise de Kieren, que o subconstruto operador é particularmente útil no estudo da equivalência e da multiplicação de frações: se $\frac{p}{q}$ é pensado como uma função que transforma q em p ou uma máquina que ao receber q, devolve p, a equivalência de frações passa a ser vista como a equivalência entre máquinas que produzem o mesmo *output* quando alimentadas com o mesmo *input* e a multiplicação de frações passa a ser vista como a composição de funções (BEHR *et al*., 1983, p.96).

Segundo Kieren, a primeira habilidade associada ao trabalho com o subconstruto operador seria a de perceber a composição de dois operadores como um novo operador. Isto de fato pode ser desmembrado em várias etapas, uma vez que a própria aplicação de um único operador $\frac{p}{q}$ já envolve duas operações (divisão por q e multiplicação por p) que precisam ser vistas como uma única para que se possa conceber como objeto. Para essa etapa, a recomendação geral da literatura é que se proceda gradualmente com as crianças, começando com operadores de numerador unitário $\left(\frac{1}{q}\right)$, passando depois a operadores $\frac{p}{q}$ arbitrários. A idéia seria a de que, a partir de certa regularidade observada nos pares que resultam do processo (de trocar cada grupo de 4 unidades por um grupo de 3, por exemplo), espera-se que se produza eventualmente uma percepção de $\frac{3}{4}$ como um número. Behr *et al*.(1993) comentam que, para o aluno da escola, calcular y a partir de x dividindo por 4 e em seguida multiplicando por 3 pode estar muito distante de perceber y como o resultado de uma operação única sobre x. Eles perguntam: como uma entidade formada por dois números transforma-se em um só número? (p.41)

Em Behr *et al*. (1983) relatam-se estudos empíricos que investigaram o estágio de desenvolvimento das noções subjacentes ao trabalho com os subconstrutos operador e razão e como eles se relacionam no pensamento das crianças. As análises indicam que elas (especialmente as menores de 12 anos) pensam em termos de subtrações e não em termos multiplicativos. Assim, por exemplo, expostas a uma lista de pares (x, y) e, convidadas a descobrir um dos elementos de um par (dado o outro), as crianças tendem a buscar regularidade nas diferenças entre x e y e não nos quocientes, mesmo que y seja a imagem de x pelo operador $\frac{3}{4}$ (por exemplo) isto é, que y tenha sido obtido a partir de x como *output* de uma máquina que sempre troca 4 por 3. É interessante observar que os sujeitos dessa pesquisa ainda não possuem familiaridade suficiente com o $\frac{3}{4}$ como número, o que poderia favorecer o reconhecimento (tácito) da relação $y = ax$, com a = $\frac{3}{4}$. Essa hipótese parece confirmar-se a partir de outro resultado obtido: 91% dos sujeitos fizeram corretamente as tarefas que envolviam o racional $\frac{1}{2}$. Em tarefas em que se apresentava o operador como uma máquina de troca, mas não de 2 por 1, muitas crianças continuaram respondendo como se fosse o operador $\frac{1}{2}$ (BEHR *et al*., 1983, p.96-97). Parece que a familiaridade maior com a idéia de metade induz a utilizá-la em situações que envolvem outros tipos de divisão em partes iguais. Note-se, entretanto, que o estágio de relação com a concepção de número em que predominam as estruturas aditivas (olhar para as diferenças $y - x$ e não para as razões $\frac{y}{x}$) é exatamente o que se quer "superar". Uma questão que se coloca especificamente com relação ao subconstruto operador é: como ele ajuda (ou não) a "ver" o $\frac{3}{4}$ (por exemplo) como número, isto é, como um objeto e não como o processo de dividir por 4 e multiplicar por 3 ou de trocar cada grupo de 4 unidades por um de3?

Além disso, ainda há o problema didático de propor atividades que proporcionem ao aluno da escola a eventual percepção da composição de duas funções (i.é., a aplicação de uma, seguida da aplicação da outra) como uma única função (a composta). Essa seria outra versão, em contexto diferente, da mesma questão, a qual, como vimos, apresenta duas faces: perceber as duas etapas de um processo como um único objeto. Em outras palavras, perceber duas ações consecutivas como uma única, juntamente com a habilidade de "encapsular" as etapas de um processo em algo que passa a ser percebido como um objeto.

Outro elemento de natureza cognitiva associado ao subconstruto operador refere-se à questão da reversibilidade de processos, o que se relaciona com as noções gerais de identidade e inverso. Nesse caso, de acordo com a literatura, a criança deve ser exposta a várias situações resultantes de diferentes processos e exercitar a habilidade de reverter esses processos até obter a situação inicial. Um exemplo seria encontrar a medida do comprimento de um segmento que foi dividido em 5 partes iguais, de tal forma que 3 dessas partes formam um segmento de 12 cm de comprimento.

Com relação à proporcionalidade, Kieren observa que uma compreensão completa das idéias associadas ao pensamento proporcional só são atingidas no estágio piagetiano correspondente ao operatório formal. Mas afirma que a pré-proporcionalidade seria suficiente para trabalhar com o subconstruto operador, isto é, as noções associadas à idéia de número racional correspondentes a esse subconstruto podem ser desenvolvidas a partir de generalizações de um grande número de exemplos "concretos", sem necessidade de definições e de equacionamentos envolvendo aspectos formais do pensamento proporcional. E sugere exemplos de atividades com escalas (redução ou ampliação do desenho de uma casa) etc.

Behr *et al*. (1983) chamam atenção para certas habilidades que consideram importantes na aprendizagem dos racionais, independente do subconstruto com o qual se esteja trabalhando. Uma delas se relaciona com a idéia de partição, isto é, conceber um objeto ou uma quantidade como algo que pode ser dividido em certo número de partes iguais. Relacionada com essa, a habilidade de notar as relações compensatórias entre o tamanho de cada parte e o número de partes iguais em que o objeto foi dividido e também a de agrupar e re-agrupar, de diferentes maneiras, as partes para formar várias partições do objeto ou da quantidade total repartida.

Behr *et al*. (1993) apresentam uma análise teórica do subconstruto operador envolvendo duas sub-interpretações: o operador duplicador/partição-redutor e o operador expansor/redutor. A análise se apóia em uma teoria das quantidades (*mathematics-of-quantity model*), em que n unidades primárias podem ser agrupadas formando novas unidades ($n - unidade$), m das quais podem ser novamente agrupadas dando origem a ($m - n - unidade$) e assim por diante. Por exemplo, quatro unidades agrupadas passam a ser vistas como uma unidade de quatro unidades, ou 1($4 - unidade$) e, agrupando três destas numa nova unidade, obtemos uma unidade de três unidades de quatro unidades, i.e., 1 ($3 - 4 - unidade$). Segundo a primeira sub-interpretação citada acima, o número racional $\frac{p}{q}$ pode ser entendido como um operador que "troca" q unidades de qualquer tipo por p unidades do mesmo tipo (BEHR *et al*., 1993, p.26). Na segunda, o operador $\frac{p}{q}$ troca qualquer quantidade de $q-unidade$ pela mesma quantidade de $p-unidade$ (BEHR *et al*., 1993, p.36). A ação do operador $\frac{2}{3}$ sobre o operando 18 resulta sempre em 12, mas, de acordo com essa análise, faz diferença, do ponto de vista cognitivo, se pensamos a divisão por 3 como partitiva (distribuir equitativamente 18 "coisas" por 3 pessoas, portanto 18 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3, ou seja 18 = 6 *vezes* 3) ou quotitiva (dividir 18 em quotas, de tal modo que cada quota tenha 6 unidades, isto é, 18 = 6 + 6 + 6, ou seja, 18 = 3 *vezes 6*). Em alguns casos, o 2 (numerador do operador $\frac{2}{3}$) seria multiplicador e em outros, multiplicando. Por exemplo, se pensamos 18 como $6(3-unidade)$ e o operador $\frac{2}{3}$ como expansor/redutor, então a operação troca $6(3-unidade)$ por $6(2-unidade)$, o que resulta em $6 \times 2 = 12$. Mas se pensamos 18 como $3(6-unidade)$ e $\frac{2}{3}$ como duplicador/partição-redutor então a operação troca $3(6-unidade)$ por $2(6-unidade)$, o que resulta em $2 \times 6 = 12$ (ver Behr *et al*., 1993, p.38-39 e Behr *et al*., 1992). De acordo com esses autores, cada tipo exemplificaria um modo da criança conceber o significado da operação ou de modelar a situação, na resolução de problemas relacionados com as estruturas multiplicativas (VERGNAUD, 1983).

Discussão

Até aqui, descrevemos as idéias relativas à concepção teórica e ao papel do subconstruto operador na aprendizagem escolar dos racionais, segundo a literatura revisada. Vimos basicamente que esse subconstruto surge de uma análise das estruturas algébricas subjacentes ao conjunto dos racionais (de modo especial a estrutura de grupo multiplicativo), funcionando como um instrumento didático para promover o desenvolvimento das estruturas cognitivas associadas. Pode-se notar ademais, uma grande coerência interna nesse movimento de inferência das estratégias didáticas a partir das estruturas cognitivas que se pretendem desenvolver e destas últimas, por sua vez, a partir da análise "matemática" do conjunto dos racionais. Em suma, o "matemático" definindo o "cognitivo" e este sugerindo o "didático". Essa seqüência serve também, por outro lado, como uma via para atribuição de papel ao conhecimento matemático acadêmico no desenho do currículo escolar, sem se reduzir ao argumento superficial e simplista, tantas vezes repetido, de que "para ensinar matemática o professor tem que saber matemática" ou o de que "o professor tem que saber mais do que vai ensinar".

Além disso, é uma abordagem atraente, a partir da qual todo um programa de pesquisa pode ser desenvolvido, estendendo-se o foco a outros temas da matemática escolar, como os números reais, a geometria, funções etc. No entanto, queremos, nesta seção, colocar algumas questões que consideramos merecedoras de reflexão crítica em relação a essa abordagem. Evidentemente não cabe desenvolver a discussão a partir de valores absolutizados como os que costumam estar subjacentes a juízos dicotômicos do tipo correto-incorreto, bom ou mau etc. Pelo contrário, a idéia é, por um lado, explicitar e situar alguns dos pressupostos implícitos nessa concepção do subconstruto operador (o que, a nosso ver, pode contribuir para compreensão mais ampla da própria concepção) e, por outro, trazer para o debate com a comunidade interessada possibilidades alternativas, assim como algumas dúvidas que surgiram e permaneceram conosco ao longo da revisão de literatura que realizamos.

Olhando o operador em sua relação com os outros subconstrutos, uma questão que se coloca, do ponto de vista da prática docente escolar, refere-se à distinção essencial entre esse subconstruto e a interpretação "relação parte-todo". Afora conceber o operador como função ou máquina, não nos parece muito clara a diferença efetiva entre esses dois subconstrutos. Behr *et al*. (1983) explicam: "*de acordo com a interpretação parte-todo, o* *símbolo $\frac{a}{b}$ refere-se a uma parte fracionária* <u>*de*</u> *uma quantidade*" (p.95, grifo nosso). Então, pode-se perguntar: quando dividimos uma quantidade x por 4 e multiplicamos o resultado por 3, estamos encontrando uma parte fracionária da quantidade x ou a imagem de x pelo operador (ou função, ou máquina) $\frac{3}{4}$? Qual seria a diferença entre calcular a parte fracionária (correspondente ao símbolo $\frac{3}{4}$) de um "todo" x e encontrar o resultado da ação do *operador* $\frac{3}{4}$ sobre o operando x? Observamos, de passagem, que Lamon, no trecho citado anteriormente, escreve operador "$\frac{2}{3}$ de" e não operador $\frac{2}{3}$, sugerindo uma possível identificação desses cálculos. Llinares e Sanchez (1998) também se referem a uma possível identificação com a relação parte-todo (p.73). Parece que a distinção é que o resultado da ação da máquina é a relação parte-todo e a própria máquina, o operador. Em outras palavras, seria a mesma distinção conceitual que existe entre o valor de f num ponto x e a própria função f. De todo modo, parece legítimo inferir que, desde sua concepção teórica, o subconstruto operador carrega em si um distanciamento da idéia de quantidade para se aproximar de uma noção mais qualitativa, que é a de correspondência funcional. Pensando a questão do ponto de vista didático, acreditamos que induzir a criança a construir a noção de número racional a partir de sua percepção como uma função seja uma operação delicada e com certa dose de artificialidade. No fundo, trata-se de identificar um número a com a função linear $f(x)=ax$, como se faz, por exemplo, quando identificamos a diferencial de uma função (de R em R) num ponto x_0 com o número $f'(x_0)$ ou, mais geralmente, uma transformação linear de R^n em R^m com sua matriz correspondente, numa certa base. É claro que não há nada de "errado", do ponto de vista lógico, mas a questão é que, nestes casos, supõe-se que já se conhecem os números reais ou as matrizes o suficiente para que se possam inferir propriedades da função, a partir de propriedades já conhecidas dos números ou das matrizes, e não o contrário. No caso do subconstruto operador é natural que se pergunte: que contribuição essa identificação com uma máquina ou com uma função linear pode trazer para a aprendizagem, considerando-se que os alunos ainda estão no estágio de ampliar (ou consolidar a ampliação de) uma noção de número que, até então, refere-se essencialmente à idéia de quantidade? Essas são considerações quanto à concepção teórica do subconstruto e, como vimos, os argumentos referem-se ao desenvolvimento de estruturas cognitivas associadas às estruturas algébricas de *Q*. Percebe-se aqui uma diferença essencial em relação a todos os outros subconstrutos "básicos": o operador desempenha o papel especifico de modelo estrutural, enquanto os outros (parte-todo, medida, quociente e razão) possuem significados fortemente relacionados com a idéia de quantidade e exemplificam claramente a "necessidade" do uso de números não inteiros para "dar conta" de situações do "mundo real". A nosso ver, é sua função essencialmente "estrutural" no ensino-aprendizagem escolar que confere ao subconstruto operador esse caráter de artificialidade. Mas, pode-se questionar: serão artificiais as estruturas algébricas dos sistemas numéricos? Certamente que não, mas, neste ponto, é interessante atentar para um pressuposto que está implícito nessa perspectiva de buscar nas estruturas abstratas os elementos relevantes de referência para o cognitivo e daí para o didático escolar. O pressuposto (mais ou menos naturalizado) é o de que a matemática escolar se define a partir da matemática acadêmica: como essa percepção estrutural é conveniente para a matemática acadêmica então, naturalmente, ela deve ser transladada para o ensino escolar. Entretanto, há que considerar que a visão que privilegia as estruturas sobre a natureza dos objetos é recente na matemática acadêmica e tornou-se hegemônica em decorrência do tipo de resposta que ela foi capaz de oferecer às necessidades específicas da prática profissional dos matemáticos (DIEUDONNÉ, 1990), e não em função de possíveis contribuições didáticas relacionadas com a educação escolar. Um dos valores intrínsecos a essa percepção estrutural da matemática acadêmica é o de que a natureza dos objetos em estudo não importa, mas somente as *relações* entre eles. Llinares e Sanchez (1998) comentam o correspondente enfoque estruturalista no ensino escolar, desenvolvido por Dienes, associando a esse enfoque certos aspectos funcionais do subconstruto operador. E explicam: "*de acordo com a concepção estruturalista a atividade da criança se dirige à construção das estruturas matemáticas formais*" (p.74). Por sua vez, Kieren (1980) escreve: "*Este subconstruto focaliza os racionais como elementos da álgebra de funções"* (p.136). Vemos assim que, ao lidar com o subconstruto operador, segundo essa abordagem, não importa que se esteja distanciando da natureza quantitativa da noção de número (herdada do conhecimento prévio sobre os naturais); por outro lado, considera-se essencial o desenvolvimento de estruturas cognitivas associadas a noções gerais que são importantes do ponto de vista estrutural, tais como inversibilidade, identidade etc. Importa que se olhe para o produto de dois números racionais como se olha para a composição de duas funções, já que esse olhar ilustra as propriedades estruturais de grupo multiplicativo. Assim, segundo Kieren, o subconstruto operador contribui para o desenvolvimento de uma apreensão "madura" (i.e., algébrica) dos racionais. No entanto, algumas questões se apresentam, quando pensamos no trabalho escolar com o tema: o aluno está diante de uma problemática que se refere a estender a noção de número e as operações com os números para um conjunto mais amplo do que o dos naturais. Suponhamos, na melhor hipótese, que ele já tenha desenvolvida a noção de número racional como objeto, talvez através dos outros subconstrutos. Grosso modo, ele agora acrescentaria aos seus conhecimentos sobre os racionais elementos do tipo:

· o inverso de um número racional $\frac{p}{q}$ pode ser entendido como o operador inverso do operador correspondente a $\frac{p}{q}$.

· definido o produto da forma algorítmica $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ (em princípio, arbitrária), multiplicar dois racionais corresponde a compor duas funções.

Para quem já conhece a estrutura de grupo multiplicativo dos racionais e percebe *Q* em termos de estrutura, fica claro o isomorfismo entre duas estruturas (os racionais com o produto e os operadores com a composição). Mas o que isso esclareceria para o aluno da escola sobre o produto e a divisão de racionais? De certa forma, não estaríamos trocando um desconhecido por outro? Se se parte da aceitação da definição algorítmica de produto de números racionais, então a verificação de que o inverso de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$ prescinde do modelo operador. Por outro lado, a multiplicação de frações, e a noção de inverso, podem, alternativamente, ser "explicadas" a partir de analogias com situações que generalizam (para os racionais) a idéia de multiplicação de números naturais. Assim, parece-nos necessário refletir mais profundamente sobre essa ênfase na percepção de Q como uma estrutura fundamentalmente algébrica, segundo a qual as operações *funcionam como funcionam por razões essencialmente axiomáticas* (KIEREN, 1976, p.102). Outras questões subjacentes ao trabalho escolar com os racionais nos indicam a necessidade dessa reflexão. A nosso ver o professor vai se deparar, tanto no planejamento como na execução de seu trabalho escolar, com perguntas do tipo: como se relaciona o antigo sistema numérico (N) com o novo (Q), o qual, apesar de todas as novidades, o contém? Se a multiplicação deixa de ser uma soma iterada, perde completamente os significados que possuía antes e se explica apenas pelo sentido algébrico de uma definição algorítmica? De um modo geral, como funciona, neste caso, a dialética conhecimento novo/conhecimento antigo? Como reconhecemos os novos números e as novas operações como ampliações (não arbitrárias) do que se passava em N? Enfim, como re-conhecemos o antigo dentro do novo?

Um contraponto: a abordagem fenomenológica de Freudenthal

Apresentamos, nesta seção, uma breve síntese das idéias de Freudenthal (1983), que também associa número racional com operador, mas a partir de uma abordagem fenomenológica. Freudenthal vê dois elementos fundamentais nos fenômenos associados às noções de fração e de número racional: fracionar (no sentido de fratura, daí o nome fração) e comparar (no sentido de relação ou razão, daí o nome número racional). Essas duas idéias, por sua vez, se associam aos fenômenos em duas formas: como "ações" ou como “estados”. Exemplos: repartir duas pizzas entre três pessoas refere-se a uma ação de fracionamento, enquanto constatar que a altura da janela é a metade da altura da porta refere-se a uma comparação de estados. Entretanto, ação e estado estão, de certo modo, imbricados, porque não se trata simplesmente de executar um determinado fracionamento, mas também de comparar as partes resultantes da ação. Por outro lado, a comparação pode pressupor o ato de fracionar: para comparar a altura da janela com a da porta pode ser interessante dividir ambas em um número inteiro de partes do mesmo tamanho e comparar apenas os respectivos números de partes que cada uma delas contém. Nesse processo que envolve ações e relações, Freudenthal afirma que se vai caminhando desde a consideração dos objetos (maçãs, portas, retângulos) até os números em sua forma abstrata, passando intermediariamente por “quantidades” – medidas de grandezas, como 5kg, 12cm, 20m^2. São, no dizer de Freudenthal, etapas de crescente desconcretização. Entretanto, para esse autor, não se deve pensar a ação apenas no sentido de fracionamento, com a conseqüente comparação entre parte e todo, pois essa percepção é fenomenologicamente pobre. Ações podem ter, entre outras possibilidades, o caráter de *transformação* (uma dilatação, por exemplo), induzindo a comparação entre os estados final e inicial ou vice-versa. A partir dessa análise, Freudenthal considera que a idéia de *operador* (vista como ações associadas aos fenômenos dos quais “emerge” a noção de fração) está presente em todos os aspectos fundamentais dos números racionais: no fracionamento em partes iguais; na razão entre o estado resultante de uma operação (sobre um objeto, sobre um valor numérico que se refere a alguma característica do objeto, como peso, comprimento etc. ou sobre um número *puro*, referido a uma unidade abstrata) e o estado correspondente, antes da operação. Reciprocamente, a fração está associada, de algum modo, à atuação do operador, mas não se identifica com ele. Nesse sentido, o autor chega a criticar o uso da expressão “número racional como operador”, embora reconheça que não há erro lógico aí (FREUDENTHAL, 1983, p.150).

---

[4] Ele dá um exemplo interessante em que se passa do discreto ao contínuo: dividir 8 garrafas de cerveja entre 3 adultos. Divide-se em N com resto 2. A partir daí começa-se a fazer uso da idéia de que o que sobrou é contínuo, podendo ser *fracionado* o quanto se queira. Isso torna possível continuar a operação para além de N.

Por outro lado, esse autor desenvolve a concepção formal de "operador fracionário" a partir da consideração de duas operações muito conhecidas no conjunto dos números naturais, que são: a) repartir "objetos" entre "pessoas" e b) a produção (mental) de *n* réplicas de um objeto. Essas operações, no plano abstrato dos "números", correspondem à divisão com ou sem resto[4] e multiplicação (ambas em *N*). Em sua análise, Freudenthal entende a ação de dividir em *n* partes iguais, como a operação inversa da replicação: a enésima parte é aquela que replicada *n* vezes dá, de volta, o todo que foi dividido. Ou, em termos de número e operação aritmética, $\frac{1}{n}$ é o "número" que multiplicado por *n* (isto é, somado *n* vezes consigo mesmo) dá 1. Na seqüência do seu raciocínio, dois elementos importantes são desenvolvidos. Elabora-se a identificação entre "$\frac{p}{q}$ *de*" com "$\frac{p}{q}$ *vezes*" (fundada na relação entre *n vezes e enésima parte de*), de tal modo que o produto de racionais possa ser percebido, de alguma forma, como uma extensão da idéia de produto em *N*. Por exemplo, replicar algo $2\frac{3}{4}$ *vezes* pode ser visto como 2 réplicas completas "mais" (o fundamento do produto como soma iterada) UMA PARTE DE uma réplica, no caso, $\frac{3}{4}$ DE uma réplica (para maiores detalhes sobre esse aspecto específico, ver Soares *et al*. 1998). Como conseqüência, derivam-se as propriedades do produto de racionais.

Em suma, podemos destacar diferenças fundamentais entre essa visão fenomenológica e a visão estruturalista anteriormente apresentada. A nosso ver, na abordagem fenomenológica, não se trata de ver o número racional como operador para ilustrar as propriedades algébricas de *Q*, mas, antes, trata-se de identificar operações que tenham sentido no mundo empírico e associá-las significativamente à noção de fração e, eventualmente, chegar aos significados do produto de números racionais. Assim, a estrutura multiplicativa dos racionais pode ser apreendida a partir de operações conhecidas em *N*, ou seja, a abordagem didática das frações conduz às estruturas algébricas, e não ao contrário. Em outras palavras, a estrutura multiplicativa dos racionais pode ser percebida como uma extensão (seguramente mais sofisticada, em vários aspectos referentes à aprendizagem) da conhecida estrutura aritmética dos naturais e não como algo que decorre de axiomas impostos por uma lógica intrínseca à matemática e artificialmente vinculada ao mundo empírico do estudante.

Considerações finais

Não se pode falar em consenso, mas há evidências de que a teoria dos subconstrutos foi bem acolhida pela comunidade internacional da Educação Matemática. Em seqüência ao trabalho, considerado seminal, de Kieren (1976), várias pesquisas empíricas e estudos teóricos sobre os números racionais na escola se desenvolveram centradas nessa abordagem. Embora, ao longo dos anos e dos estudos realizados, os sete subconstrutos propostos inicialmente tenham recebido diferentes níveis de atenção e de aceitação, pelo menos cinco permanecem, hoje, acatados pelos pesquisadores que utilizam essa abordagem: relação parte-todo, medida, quociente, razão e operador.

Por outro lado, há questões relacionadas com uma possível artificialidade da interpretação do racional como operador. Números estão, a essa altura do aprendizado, intrinsecamente associados à idéia de quantidade e, portanto, da possibilidade de somar, subtrair, multiplicar e dividir para produzir resultados que também são números - maiores, menores ou iguais a outra quantidade. Mas, se os números racionais são vistos como "conjunto de instruções" ou como funções, parece introduzir-se certa artificialidade no processo de compará-los, somá-los etc., enfim, no processo de vir a vê-los como "números" e desenvolver o senso numérico, com respeito a esses novos tipos de número (SOWDER, 1992, p.33). De todo modo, não há dúvida de que é preciso caminhar gradativamente para uma percepção mais algébrica do produto de números ao longo do trabalho escolar, porque, entre outros motivos, em seguida serão introduzidos os irracionais e os reais. O subconstruto operador é uma das sugestões da literatura na direção de uma percepção algébrica de Q. Mas há alternativas.

Referências

BALL, D.L. **What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics?**, 2003. Disponível em < http://www.ed.gov/rschstat/research/progs/mathscience/ball.html>. Acesso em: jan de 2008.

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.R.; SILVER, E.A. Rational-number concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (eds.) **Acquisition of Mathematical Concepts and Processes.** Orlando: Academic Press, 1983, p.91-126.

BEHR, M.; HAREL, G.; POST, T.R. LESH, R. The operator construct of rational numbers. **Proceedings of PME**, v.1, 1991, p.120-127.

BEHR, M.; HAREL, G.; POST, T.R.; LESH, R. Rational number, ratio and proportion. In: GROWS, D. (ed.) **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** NY: MacMillan, 1992, p. 296-333.

BEHR, M.; HAREL, G.; POST, T:; LESH, R. Rational numbers: toward a semantic analysis. In: CARPENTER, T.; FENNEMA, E.; ROMBERG, T. (eds.) **Rational Numbers:** An Integration of Research. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1993, p.13-48.

DICKSON, L.; BROWN, M.; GIBSON, O. **Children Learning Mathematics:** A teacher's guide to recent research. London: Schools Council Publications, 1993.

DIEUDONNÉ, J. **A formação da matemática contemporânea.** Lisboa: Dom Quixote, 1990.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures.** Dordrech: Kluwer. Cap.5, 1983, p.133-177.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R. (ed.) **Number and measurement:** papers from a research workshop. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, 1976, p.101-144.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. In: KIEREN, T. (ed.) **Recent Research on Number Learning.** Columbus: Eric/Smeac, 1980, p.125-150.

LAMON, S. **Teaching Fractions and Ratios for Understanding.** 2ed. Mahwah: Lawrence Erlbaum, 2006.

LLINARES, S.; SANCHEZ, V. **Fracciones.** Madrid: Sintesis, 1998.

MOREIRA, P.C.; DAVID, M.M.M.S. Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: some conflicting elements. **Journal of Mathematics Teacher Education,** 11, 2008, p.23–40.

SOARES, E.F.; FERREIRA, M.C.C.; MOREIRA, P.C. **Números racionais e reais:** as concepções dos alunos e a formação do professor. Relatório de pesquisa. Belo Horizonte: SPEC/UFMG, 1998.

SOWDER, J. Making sense of numbers in school mathematics. In: LEINHARDT, G.; PUTNAM, R.; HATTRUP, R. (eds.) **Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching.** Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1992, p. 1-52.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (eds.) Acquisition of Mathematical Concepts and Processes. **Orlando: Academic Press, 1983, p.127-174.**

Aprovado em maio de 2008
Submetido em abril de 2008