



“Atividades Investigativas Autênticas” para o Ensino de Razão e Proporção na Formação de Professores de Matemática para os Níveis Elementar e Médio¹

“Authentic Investigative Activities” for Teaching Ratio and Proportion in Pre-Service Mathematics Teacher Education

David Ben-Chaim²

Bat-Sheva Ilany³

Yaffa Keret⁴

Resumo

Neste artigo são apresentados elementos relacionados à criação, implementação e avaliação do impacto das chamadas “atividades investigativas autênticas” que focam tanto o conteúdo quanto o conhecimento pedagógico e as atitudes na formação inicial de professores de Matemática para os níveis de ensino elementar e médio. Um modelo especial de aprendizagem foi desenvolvido, implementado e testado como parte de atividades desenvolvidas em instituições israelenses voltadas à formação de professores. O modelo foi desenvolvido segundo estudos-piloto, investigando as alterações nos conhecimentos matemático e pedagógico de professores de Matemática – em formação e em atuação – ocorridas com a aplicação das “atividades investigativas autênticas”. As conclusões do estudo apontam que a aplicação do modelo – por meio do qual os professores ganham experiência e são expostos a atividades de raciocínio proporcional “autêntico”, incorporando teoria (pela leitura e análise de relevantes textos de pesquisa)

¹ Este artigo foi traduzido do original por Antonio Vicente Marafioti Garnica, docente do Departamento de Matemática da UNESP de Bauru e do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro.

² Oranim-University of Haifa (Israel)

³ Beit-Berl College (Israel) – bat77@013.net (e-mail de contato com os autores)

⁴ Israeli Science Teaching Center (Israel)

e prática – produz uma alteração significativa quanto à abordagem ao conteúdo matemático e quanto ao conhecimento pedagógico. Além disso, alterações significativamente positivas ocorreram nas atitudes e crenças desses professores em relação ao ensino e à aprendizagem de Matemática, em geral e, em particular, em relação aos conceitos de razão e proporção.

Palavras-chave: Atividades Investigativas Autênticas. Razão e Proporção. Raciocínio Proporcional. Formação de Professores de Matemática.

Abstract

We present some elements related to the creation, implementation, and evaluation of the impact of “authentic investigative activities” that focus on the content as well as pedagogical knowledge and attitudes in pre-service education of elementary and high school mathematics teachers. A special learning model was developed, implemented, and tested as part of activities developed in institutions that provide pre-service teacher education in Israel. The model was developed following pilot studies investigating the change in mathematical and pedagogical knowledge of pre- and inservice mathematics teachers due to the application of “authentic investigative activities”. The conclusion of the study is that application of the model, incorporating theory and practice, leads to a dramatic positive change in the pre-service teachers’ content and pedagogical knowledge. In addition, an improvement occurred in their attitudes and beliefs towards learning and teaching mathematics in general, and ratio and proportion in particular.

Keywords: Authentic Investigative Activities. Ratio and proportion. Proportional reasoning. Mathematics teacher education. Preservice teacher education.

Antecedentes e proposta deste estudo

O raciocínio proporcional (RP) é um conteúdo fundamental para a Matemática desenvolvida desde os últimos anos do ensino fundamental até o ensino médio. Em princípio, o RP envolve relações matemáticas multiplicativas, ao contrário das relações aditivas que são mais usuais para muitas crianças no início da vida escolar (HAREL; CONFREY, 1994).

Segundo o *Curriculum and Evaluation Standards*, documento do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989):

A habilidade de raciocinar proporcionalmente ocorre nos estudantes da quinta a oitava séries, e é de tal importância que devemos desenvolvê-la cuidadosamente, ainda que

esse desenvolvimento implique uma ampliação do tempo e uma concentração de esforços. (p.82)

Assim, os tópicos relativos à razão e proporção devem ocupar uma parte central tanto no currículo para as escolas quanto no dos cursos de formação inicial de professores de Matemática.

Entretanto, as pesquisas têm consistentemente mostrado que poucos alunos, com habilidades razoáveis, usam o raciocínio proporcional de modo adequado (POST; BEHR; LESH, 1988, p. 78), ou finalizam com sucesso atividades que o envolvem (BEN-CHAIM *et al.*, 1998). Tal assunto é também um problema para muitos alunos de níveis escolares mais elevados (LAWTON, 1993), e “há evidências de que um amplo segmento de nossa sociedade nunca adquire fluência no pensamento proporcional” (HOFER, 1988, p. 285). Além disso, resultados de pesquisas recentes, desenvolvidas em todo mundo, indicam que há, por parte dos professores em atuação e dos professores em formação⁵, muitas lacunas quanto a temas matemáticos ensinados nos níveis elementar e médio, incluindo os tópicos “razão” e “proporção”. Frequentemente, o conhecimento é técnico, esquemático, desconectado e incoerente. Como resultado, surgem dificuldades que são evidência da falta de compreensão de conceitos matemáticos – dentre os quais os de razão e proporção – pelos futuros professores que têm se mostrado incapazes de, ao mesmo tempo, dominar tais conceitos e ensiná-los (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1994; SOWDER *et al.*, 1998; KERET, 1999; BEN-CHAIM; ILANY; KERET, 2002).

A conclusão que surge a partir desses estudos é que, para melhorar essa situação, é necessário implementar os resultados das investigações quando ensinando tópicos relacionados ao RP e, paralelamente, trabalhar de modo diferenciado nos cursos de formação de professores. Segundo nossa filosofia,

⁵ Os autores diferenciam os momentos de formação de professores de Matemática que, no Brasil, podemos chamar de formação inicial ou formação continuada. Optamos pela expressão “formação inicial” para caracterizar aqueles que ainda são alunos de cursos de graduação. “Formação continuada” ou “Formação em serviço” são os momentos de formação dos quais participam professores já graduados e em exercício. “Professores-alunos” é a expressão que usamos para caracterizar os alunos de cursos de formação de professores que participam, como alunos, das atividades que são tema deste artigo. (Nota do Tradutor)

cursos de formação inicial e em serviço devem incluir três componentes fundamentais: o cognitivo, o afetivo e um componente comportamental, que se evidencia na disposição do professor em construir unidades de ensino e em planejar ações relativas aos conteúdos.

Em nossos esforços para investigar e contribuir para esse campo de interesse, decidimos adotar as recomendações propostas por Sowder *et al.* (1998) considerando como educar os futuros professores de Matemática para ensinar estruturas multiplicativas, incluindo tópicos relativos ao RP. Concordamos com a afirmação de Jaworski (2005) de que a “didática da formação de professores de Matemática refere-se à criação de tarefas ou situações a partir das quais os professores tenham oportunidade de aprender conceitos do/no ensino de Matemática” (p. 359).

São três as principais propostas deste artigo: (1) apresentar, discutir e analisar algumas de nossas atividades investigativas autênticas⁶ relacionadas ao RP; (2) introduzir um modelo de ensino que envolva RP para a formação inicial e continuada de professores de Matemática para os níveis de ensino fundamental e médio; e (3) exibir evidências do aprendizado dos professores, reforçando seu conhecimento do conteúdo pedagógico relativo ao RP, visando a melhorar suas atitudes em relação à Matemática, em geral, e a todos os componentes e aspectos relacionados ao RP, em particular.

As “atividades investigativas autênticas” relacionadas ao raciocínio proporcional

A seguinte citação, extraída do *Principles and Standards for School Mathematics*, material editado pelo NCTM em 2000, serviu de guia para o *design* de nossas “tarefas autênticas” relativas ao RP:

No ensino, tarefas matemáticas significativas são usadas para introduzir importantes idéias matemáticas e para motivar e desafiar intelectualmente os estudantes. Tarefas bem escolhidas podem despertar a curiosidade dos alunos e motivá-los em relação à Matemática. /.../ Independentemente

⁶ O termo “autêntica”, que adjetiva as atividades a serem discutidas, diz respeito à proximidade dos problemas propostos à “realidade” dos alunos e professores, à vinculação das situações propostas a situações familiares, corriqueiras, cotidianas. Optamos por manter o adjetivo como proposto pelos autores. (Nota do Tradutor)

do contexto, tarefas significativas devem ser intrigantes e com um certo nível de desafio que convida à especulação e ao esforço. (p. 18-19)

Num estudo piloto desenvolvido por Ben-Chaim, Ilany, e Keret (2001), dezenove atividades relacionadas ao RP foram desenvolvidas e aplicadas visando a avaliar a influência por elas causada a futuros professores da escola elementar⁷. As atividades escolhidas, via-de-regra, apresentam problemas do mundo e do cotidiano das crianças, problemas em que surgem questões abertas não rotineiras que, por sua vez, dão vazão a pensamentos e reflexões. Isso permite que sejam profundamente analisadas as respostas dos alunos e que possam despontar aspectos matemáticos como originalidade e auto-crítica. As atividades são adjetivadas como “autênticas” por exigirem a ativação de julgamentos e o uso de conhecimentos para resolver problemas relacionados à vida cotidiana. As tarefas propostas nas atividades têm vários níveis, que são – como descrito em Fried e Amit (2005) – espirais em sua estrutura e usualmente têm mais do que uma única resposta correta. Acreditamos que as atividades investigativas autênticas cultivam o pensamento elevado e a habilidade de resolver problemas, habilidades que devem ser úteis tanto ao indivíduo quanto à sociedade. Ao avaliar a capacidade matemática do aluno é importante considerar as soluções aplicadas e os procedimentos mentais empregados. Muitas das atividades são apresentadas de um modo apropriado para as crianças que freqüentam os níveis finais da escola básica e para alunos do ensino médio. As tarefas foram desenvolvidas de forma fundamentada, para o que foram usados textos especificamente voltados ao RP (tais como Sowder *et al.* (1998), Harel e Confrey (1994) e Tourniaire e Pulos (1985)) e resultados das pré e pós testagens qualitativas e quantitativas, visto que uma série de testes foi efetuada com os futuros professores no início e ao final de

⁷ É conveniente lembrar que a formação de professores para a escola elementar (segundo a literatura nacional “professores que ensinam Matemática”), em alguns países estrangeiros – como é o caso neste artigo –, ocorre apenas em Instituições de Ensino Superior. Além disso, esclarecemos que traduzimos livremente – pois o próprio texto original nos permitia isso – “escola elementar” (referindo-se aos primeiros anos de escolaridade formal) e “escola/ensino de nível médio” (significando estudos anteriores à Universidade) visando a uma aproximação entre as situações discutidas no artigo e o contexto brasileiro. (Nota do Tradutor)

cada curso em que se discutiu RP, no estágio piloto de nossos estudos. Os resultados mostraram que, no início dos cursos, a maioria dos futuros professores não tinha familiaridade com o tema RP, indicando que este tópico não era especificamente tratado em nenhum dos níveis do sistema escolar.

Para desenvolver uma tarefa típica usa-se uma folha de trabalho na qual o professor-aluno faz seus registros, preferivelmente em grupos de 3 ou 4 participantes, para depois discutir suas conclusões com toda a sala. Para a maioria das tarefas, os professores-alunos têm em mãos nossas diretrizes detalhadas, algumas soluções opcionais e recomendações para criticar o material de leitura, que inclui textos com resultados de pesquisas sobre RP. Além disso, há indicativos sobre como conduzir e ampliar a atividade, indicativos estes elaborados a partir de numerosos estudos-piloto em que tarefas relativas ao RP foram apresentadas para muitos grupos de futuros professores e, em alguns casos, também para estudantes da escola elementar. As atividades incluem tarefas matemáticas que exigem tanto comparações numéricas qualitativas e quantitativas entre razões quanto pedem para que sejam encontrados valores desconhecidos. As tarefas envolvem números inteiros pequenos e grandes, frações, decimais e porcentagens. Para cada uma das atividades há uma parte básica que visa a elaborar conhecimentos relativos à razão e à proporção. Em seqüência há um momento que visa a desenvolver essa compreensão. As atividades visam à compreensão de vários conceitos relativos aos tópicos “razão” e “proporção” e focam-se em três categorias principais de problemas sobre RP: Taxa e Densidade, Razão e Escalas. Para distinguir taxa, razão e escala seguimos a categorização proposta por Freudenthal relativa a problemas sobre raciocínio proporcional (FREUDENTHAL, 1978, 1983). Criamos dois tipos adicionais de atividades relativas ao RP: atividades introdutórias e atividades indiretas. Na seqüência deste texto relataremos brevemente esses diferentes tipos de atividades e apresentaremos alguns exemplos.

Um exemplo de **atividade introdutória** é a tarefa em se pede ao futuro professor que ajude um professor de sexta série a decidir se seus alunos estão ou não preparados para estudar o tópico “razão”. Os alunos dessa sexta série são solicitados a escrever afirmações sobre a seguinte história:

“Yael e Uri são irmãos e resolveram surpreender a mãe, que fazia aniversário, dando a ela um *bouquet* de flores. O *bouquet* tinha três tulipas e nove rosas”. Os futuros professores devem considerar o que caracteriza um certo conjunto de afirmações e quais relações matemáticas podem ser trabalhadas a partir disso. Por exemplo, um conjunto de afirmações inclui “Há mais rosas que tulipas”, e “O *bouquet* de flores tem seis tulipas a menos que o número de rosas”, enquanto o segundo conjunto de afirmações contém “o número de rosas é três vezes maior que o número de tulipas” e “25% das flores são tulipas e 75% são rosas”. Com essa e outras tarefas introdutórias espera-se tanto que o futuro professor consiga diferenciar o pensamento aditivo do pensamento multiplicativo; quanto que ele exponha-se e trabalhe intuitivamente com os conceitos de razão e proporção, além de serem confrontados com situações reais de sala de aula que requerem a ação do professor.

Atividades sobre taxa enfatizam a criação de novas unidades pela comparação de magnitudes de diferentes quantidades que sejam interessantes, como “quilômetros por litro”, “pessoas por quilometro quadrado”, “quilos por metro cúbico” ou “preço unitário”. Todas essas atividades estão relacionadas a situações cotidianas autênticas, e possibilitam estabelecer ricas relações do ponto de vista matemático. Por exemplo, uma das atividades sobre taxa apresenta várias opções de compras e deve-se decidir qual seria a melhor. A experiência que temos, ao apresentarmos tarefas assim aos futuros professores e aos alunos da escola de nível médio, nos mostra que eles usam uma variedade de estratégias, tanto corretas quanto incorretas (BEN-CHAIM *et al.*, 1998). O que importa é que os futuros professores tenham a oportunidade de discutir e testar cada uma das estratégias, perceber sua validade do ponto de vista matemático e avaliar sua eficiência; e, além disso, é importante que saibam evitar equívocos e desenvolvam técnicas para resolver problemas. Outras duas atividades relativas à taxa trabalham com o conceito de densidade. Os alunos recebem um saquinho com uma quantidade (desconhecida) de feijões brancos e um copo com um determinado número de feijões pretos. Os alunos misturam os feijões e então, por amostragem ou usando procedimentos de contagem, devem fazer uma estimativa da quantidade de feijões brancos no saquinho. Na segunda atividade eles experimentam

métodos para estimar o número de pessoas presentes numa grande concentração de pessoas, ou o número de pássaros ou qualquer outro animal numa determinada área. Veja, por exemplo, a Atividade 1 nos anexos.

Dois atividades sobre razão são apresentadas nas Atividades 2 e 3 nos anexos. Uma delas usa como motivação uma pesquisa de mercado sobre a preferência entre dois diferentes refrigerantes, e a outra problematiza a divisão de uma pizza. Em ambos os casos, os alunos comparam razões, aplicam propriedades e encontram uma determinada parte de um todo ou, dado o todo, encontram dele uma parte. Uma tarefa adicional relativa à razão trabalha com a divisão de lucros entre sócios. As atividades sobre razão enfatizam conexões com os tópicos “frações”, “decimais” e “porcentagens”. Além disso, o diálogo com os alunos sobre suas resoluções e intenções, visando a elaborar exemplos concretos para o ensino do tópico “razão”, também permite que se torne cada vez mais claro o significado de algumas operações aritméticas, especialmente os diferentes significados da operação de divisão, considerando a divisão por inclusão e a divisão por partes.

As atividades sobre escalas são consideradas as mais difíceis por estarem relacionadas a vários tópicos matemáticos distintos como medida, visualização espacial, objetos bi e tridimensionais, escalas lineares, quadráticas e cúbicas, conversão de unidades, fórmulas relativas a perímetro, área e volume e, em muitos casos, envolvendo cálculos elaborados. Por isso, propusemos uma quantidade maior de tarefas autênticas relativas à escala – sete tarefas que envolvem a maioria dos tópicos acima mencionados, em diferentes contextos. Por exemplo, uma das tarefas, “Wimpy⁸ no parque de diversões”, simula o que acontece na “sala de espelhos”, criando a imagem do Wimpy original com escalas de aumento e redução e, em alguns casos, com o espelho alterando apenas uma dimensão. Os alunos devem medir e decidir qual é o fator linear a ser usado para elaborar a escala e qual é esse fator para a área, ou seja, como o fator relaciona-se a escalas quadráticas. Mais tarde, durante a execução da parte complementar da tarefa, os alunos devem criar seus próprios espelhos para produzir formas similares do Wimpy de acordo com

⁸ Wimpy, no Brasil conhecido por Dudu, é o nome do amigo de Popeye, o personagem dos quadrinhos/filmes infantis. Wimpy é conhecido das crianças também por dar nome a uma cadeia de fast food inglesa, especializada em lanches. (Nota do Tradutor)

escalas de ampliação e redução dadas, e são motivados a encontrar os resultados de sucessivas operações com escalas. Em outra “tarefa autêntica”, baseada no artigo de Tracy e Hague (1997), os futuros professores são levados a ler o texto, analisar seus resultados e preparar uma atividade para alunos do ensino médio de modo que esses alunos, usando brinquedos e modelos, trabalhem com diferentes fatores (lineares, quadráticos e cúbicos) envolvidos nas escalas, de modo a comparar tais brinquedos e modelos com a realidade. Um outro exemplo similar é a Atividade 4, “O Templo de Bet-Shean”, apresentada nos anexos.

Um exemplo de **atividade com RP indireto** é apresentado na Atividade 5. Nessa atividade os estudantes são motivados a responder “Qual é o peso do meteorito?”. Com essas e outras atividades relacionadas ao RP indireto, conceitos básicos como razão e proporção tornam-se mais claros.

Os resultados do estudo-piloto mostraram que, depois de expostos a atividades investigativas autênticas sobre razão e proporção, os futuros professores obtiveram mais sucesso quando resolvendo problemas que envolviam esses conceitos, exibiram diferentes estratégias de resolução e, durante as entrevistas, elaboraram, com mais qualidade, textos escritos e explicações orais sobre o trabalho desenvolvido. Além disso, eles melhoraram suas atitudes em relação à Matemática, em geral e, em particular, a todos os componentes e aspectos relativos aos conceitos de razão e proporção (BENCHAIM *et al.*, 2002). Este mesmo estudo foi realizado com muitas outras salas de aula de cursos de formação de professores em três diferentes escolas israelenses e os resultados foram similares. Dessas pesquisas, resulta que é necessário ensinar tópicos relacionados à razão e à proporção em cursos de formação – inicial e continuada – de professores, aplicando atividades investigativas autênticas relativas ao RP como as que foram desenvolvidas no estudo-piloto. A partir das pesquisas, um modelo específico para o ensino de razão e proporção para a formação de professores foi desenvolvido. É esse modelo que apresentamos em seguida.

Um modelo para o ensino de atividades relacionadas ao raciocínio proporcional

O modelo foi desenvolvido a partir de estudos-piloto que investigavam a mudança no conhecimento matemático e pedagógico de professores que, em cursos de formação inicial ou formação continuada, haviam sido expostos às atividades autênticas envolvendo raciocínio proporcional. O modelo proposto incorpora as principais áreas envolvidas na formação de professores, particularmente aquelas áreas em que são focados o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo, o raciocínio pedagógico, as habilidades e as crenças. O modelo é composto de quatro componentes que interagem entre si (veja Figura 1).

O primeiro componente é o centro do modelo, e inclui atividades investigativas autênticas de 5 tipos: atividades introdutórias, atividades investigativas relacionadas à razão, à taxa, à escala (essas quatro apresentadas como tarefas diretas sobre RP), à proporção indireta (por exemplo, as atividades de 1 a 5).

Aos futuros professores, paralelamente ao trabalho com as atividades investigativas, são indicados artigos que discutem questões relativas à razão e proporção. Tais artigos tratam de aspectos matemáticos e aspectos didático-pedagógicos relativos aos conceitos de razão e proporção. A análise dos artigos de pesquisa permite que os estudantes tomem consciência do seu conhecimento matemático, enquanto a apresentação dos resultados dessas pesquisas amplia a perspectiva e aprofunda a discussão sobre estratégias de ensino relativas aos assuntos em questão. Nesse caso, a intenção foi criar uma integração entre teoria e prática (GREENO, 1994) ou, segundo Leinhardt, Young e Merriman (1995), “o conhecimento aprendido na academia *versus* o conhecimento aprendido na prática”. Eles afirmam que o conhecimento profissional pode variar com o *locus* da aprendizagem (na academia ou na prática), com o tipo de conhecimento (declarativo ou procedimental), a generalidade do conhecimento (abstrato ou específico) e a natureza dos princípios (conceitual ou pragmático).

O segundo componente inclui a estrutura das atividades. Como indicado anteriormente, elas são classificadas em dois tipos: problemas investigativos autênticos relacionados ao conteúdo e ao contexto familiar e problemas próprios da escola elementar. Como pode ser visto nos exemplos

(Atividades 1 a 5), as atividades incluem tarefas discutidas pela literatura especializada como apropriadas para avaliar o raciocínio proporcional (CRAMER; POST; CURRIER, 1993): (a) Problemas de valor desconhecido, nos quais se disponibilizam partes de uma informação e pede-se para que seja encontrado o restante da solução; (b) problemas de comparação quantitativa, nos quais duas razões/taxas são dadas e pede-se não por uma resposta numérica, mas uma comparação entre razões ou taxas; (c) problemas de comparação ou predição qualitativa, nos quais são solicitadas comparações que não dependem de valores numéricos específicos.

O terceiro componente inclui a estrutura da unidade didática. Nele há uma unidade que aborda as cercanias de um conceito (por exemplo: uma unidade didática cuja função é motivar o conceito de razão). A estrutura da unidade didática inclui: (a) trabalho em grupo; (b) discussão de resultados com toda a sala de aula; (c) Resumos matemático e didático; e (d) trabalhos para casa.

O quarto componente inclui uma unidade de avaliação, em que vários instrumentos são utilizados: (a) um instrumento para avaliar o conhecimento matemático e o conhecimento didático (relativo à Matemática); (b) um questionário que visa a detectar atitudes; (c) um *portfólio* – instrumento alternativo de avaliação relacionado aos processos de aprendizado dos futuros professores durante seus estudos; e (d) um instrumento para avaliar os relatórios de pesquisa durante e após os cursos. Para um maior detalhamento do modelo, indica-se Keret, Ben-Chaim e Ilany (2003) e Ilany, Keret e Ben-Chaim (2004).

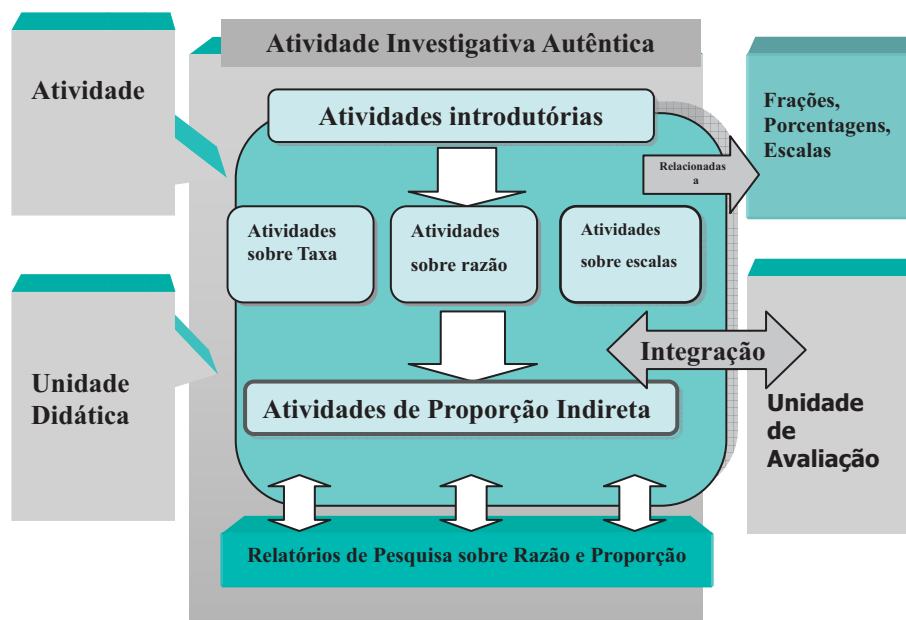


Figura 1: Modelo usando Atividades Investigativas Autênticas para ensinar Razão e Proporção

Uma implementação do Modelo de ensino para o raciocínio proporcional

Na seqüência deste texto descrevemos um estudo de caso sobre a implementação do modelo de ensino relacionado ao RP num programa de formação inicial para professores da escola básica numa instituição israelense de ensino superior.

Metodologia

O relatório da pesquisa em questão refere-se ao ano letivo 2004/2005. As atividades relativas ao RP foram desenvolvidas no segundo semestre, em quatorze encontros de noventa minutos cada um.

Composição da Amostra: quinze professores em formação inicial, que realizaram as atividades como parte dos estudos para ensinar Matemática em

escolas básicas e de nível médio. Os participantes cursavam o quarto ano, visando a um certificado que lhes assegurava uma especialização em Matemática.

Instrumentos de Pesquisa: além do modelo, as atividades e o material teórico (artigos e relatórios de pesquisa), dentre os materiais para a coleta de dados constavam:

1) Um questionário sobre raciocínio proporcional com cinco problemas relativos aos tópicos taxa e densidade; cinco problemas envolvendo razão e seis problemas relativos à escala. Em cada problema era solicitado aos participantes justificar suas respostas com material complementar. Para uma descrição mais detalhada desse instrumento ver Ben-Chaim *et al.* (1998).

2) Um questionário de atitudes com vinte e dois itens e três questões abertas. Vinte desses itens do questionário referem-se às quatro categorias descritas na Tabela 1. Para mais detalhes, ver Ben-Chaim *et al.* (2002).

3) Observações gerais – registros das avaliações formativas relativas ao modelo instrucional e ao acompanhamento dos professores quanto aos procedimentos utilizados e as mudanças de comportamento desses professores-estudantes.

4) Entrevistas pessoais com os professores visando a conhecer suas opiniões sobre o impacto do curso em que as atividades foram desenvolvidas. Com essa proposta, foi selecionada uma amostra com cinco dentre os quinze professores-estudantes para serem realizadas entrevistas individuais.

O responsável pela condução do curso foi um dos autores (Dra. Ilany), que implementou o modelo incluindo todos os componentes previstos.

Resultados e discussão

Para ilustrar a complexidade das atividades RP, uma tarefa “autêntica” relativa à escala é apresentada em detalhes, apontando a natureza dinâmica da tarefa proposta e os componentes matemáticos e pedagógicos vinculados a ela. A atividade “O Templo Bet-Shean”, ou tarefa TBS (confira figura 5) foi desenvolvida com vários grupos de professores-estudantes em formação inicial. A descrição seguinte refere-se a um excerto desse estudo.

Os professores-estudantes trabalharam na tarefa TBS em pequenos grupos heterogêneos (3-4 estudantes cada grupo). É evidente que os alunos encontraram algumas dificuldades na realização da proposta. Foi necessário, primeiramente, que eles visualizassem o esboço do templo e identificassem o *hall* principal e outras partes do templo. Depois, precisaram decidir se era ou não necessário medir as paredes exteriores ou interiores do *hall* principal. De todo modo, as medidas dos lados do *hall* principal não eram dadas por números inteiros e, além disso, a forma desse *hall* não era retangular. Assim, eles precisaram discutir e decidir como obter aproximadamente a área em questão. É assim que a estrutura da tarefa TBS leva os estudantes a tornarem mais claras as conexões entre a escala do esboço e a razão entre as medidas lineares do esboço e as dimensões reais. Demorou algum tempo para que se aceitasse a idéia de que escala e razão são conceitos vinculados. Alguns alunos continuaram com certa reserva quanto à comparação entre uma “escala de 1 por algum número” e a “razão entre dois números quaisquer”, especialmente quando ocorriam medidas não inteiras.

Durante a primeira parte da atividade, foi sugerido que os alunos-professores formassem alguns pares de retângulos, e encontrassem, a partir desses pares, a área e o fator-escala para os lados de cada retângulo. Sugeria-se que os participantes considerassem, por exemplo, o tampo de suas carteiras (cujo formato era retangular) e era-lhes solicitado que fizessem esboços desses tampos e escalas diferentes, comparando razões lineares e quadráticas (área) entre os esboços e os tampos. Ainda assim, quando os professores precisavam trabalhar com a questão (d) da tarefa TBS (veja Atividade 5), a grande maioria optava pela escala linear. Esse fenômeno é conhecido como “ilusão de linearidade” ou “armadilha linear” (DE BOCK *et al.*, 1998) e refere-se à aplicação do modelo linear mesmo quando ele não é apropriado. Essa “ilusão linear” é amplamente vigente entre alunos de todas as idades na solução de problemas que envolvem comprimento, área e volume de objetos similares. Nossa experiência com a implementação das atividades RP relativas a escalas indicam que é necessário um cuidadoso e longo trabalho com os estudantes, envolvendo-os em diferentes tarefas, valendo-se de objetos concretos para que a “armadilha linear” possa ser evitada. Para muitos alunos, a análise dos

dados quantitativos dos pré e pós-testes indicaram essa situação como problemática.

Note-se que os estudantes estavam entusiasmados e interessados em trabalhar essa tarefa. Durante a discussão da atividade surgiram muitas idéias de como levar essa atividade para as salas de aula do nível elementar e como conectá-las à Geografia ou aos trabalhos com mapas. Ficou evidente que os estudantes puderam enfrentar os problemas surgidos, e em muitos casos eles discutiram entre si até chegarem a um consenso ou serem convencidos por outros membros do grupo. Eles construíram tabelas para organizar os resultados encontrados com as medições e com os cálculos realizados, e apenas alguns poucos compreenderam imediatamente o efeito de mudar a escala relativa aos lados das figuras esboçadas ou o modo de resolver a questão (h) da tarefa TBS (veja Atividade 5). Para tal tarefa é recomendado orientar os professores quanto ao uso de *softwares* computacionais como o *Sketchpad*, para fazer os esboços em diferentes escalas e apresentar as medidas visando a criar uma situação em que as alterações são dinâmicas, de tal modo que se possam focar as idéias importantes ao invés de concentrarem-se apenas nos procedimentos técnicos. Muitos dos alunos-professores afirmaram, posteriormente, terem aplicado com sucesso, na prática de sala de aula, estratégias de ensino e algumas das questões discutidas acima.

As questões do segundo nível da tarefa TBS exigiam muito dos alunos-professores, posto que os números eram relativamente grandes – mesmo considerando que eles usavam calculadoras – e que muitos deles não estavam familiarizados com as fórmulas para determinar o volume de uma piscina retangular ou de um poço cilíndrico. Entretanto, em ambos os casos, houve tempo suficiente para que fosse possível trabalhar com os problemas à medida que foram surgindo.

Ao final dessa atividade, um dos estudantes sintetizou: “*A tarefa é um resumo muito bom do que nós deveríamos ensinar às crianças: escalas, razão, conversão de unidades, medidas, perímetros, áreas, objetos tridimensionais e volumes. A tarefa conecta todos esses tópicos*”.

Os estudantes-professores, no curso em que foram tratados os tópicos relativos ao RP, vivenciaram várias atividades de tipos diferentes. Eles, por

exemplo, tiveram experiência com pelo menos três ou quatro tarefas que envolviam escalas, incluindo a tarefa com o Wimpy e a tarefa TBS. Além disso, exigia-se que eles lessem, analisassem e discutissem resultados de pesquisa. Durante o curso tornou-se óbvio que os estudantes-professores estavam mais preocupados com as suas próprias lacunas em relação ao conteúdo matemático relativo ao RP, mas notou-se também uma preocupação desses alunos com suas funções futuras como professores. Assim, os resultados de pesquisa de natureza mais prática, que envolviam atividades relativas ao RP com crianças, nos pareceram mais apropriadas para trabalhar nos cursos. Após tratarmos de dois relatórios de pesquisas relacionados ao tópico “escalas” – “*Toys ‘r’ Math*” (TRACY; HAGUE, 1997) e “*Fractions attack! Children thinking and talking mathematically*”⁹ (ALCARO; ALSTON; KATIMS, 2000) – dois dos estudantes-professores foram entrevistados para saber o que haviam aprendido com os resultados daquelas pesquisas. Ofr afirmou: “*Em relação ao ensino, elas me deram mais idéias para implementar quando introduzindo o tópico RP em minha classe; elas me deram apoio – foi isso que elas me deram, e esses são os resultados. Vai ser interessante comparar o que foi relatado nos artigos com o que vai acontecer em minha sala de aula*”. Orit, por sua vez, afirmou: “*Há outras possibilidades, e eu gostaria de me envolver com a experimentação de métodos e estratégias outras, para além das numéricas. Os artigos me mostraram os experimentos e isso foi o mais significativo e interessante para mim*”.

Na próxima seção, apresentaremos os resultados dos pré e pós-teses realizados com os estudantes-professores que participaram do curso sobre RP.

O *layout* do estudo considerou um grupo pré-teste/pós-teste. Os questionários relativos à atitude (qualitativos) e ao raciocínio proporcional (qualitativos e quantitativos) foram aplicados antes e depois da implementação

⁹ O título desses relatórios não foram traduzidos por não fazerem, diretamente, parte do artigo. No título “*Toys ‘r’ Math*” está implícita uma referência à conhecida cadeia de lojas especializadas em brinquedos infantis “*Toys ‘r’ us*”. Também o título “*Fractions Attack! Children thinking and talking mathematically*” vale-se de uma referência usual. Sentenças exclamativas como “*Fractions Attack!*” nomeiam alguns jogos infantis, participam freqüentemente do vocabulário das brincadeiras infantis e já foram títulos de filmes (como o “*Mars Attacks!*”, de Tim Burton). (nota do tradutor).

dos modelos de ensino relativos ao RP, incluindo diferentes tipos de atividades.

Estamos cientes do pequeno número de alunos-professores participantes em nosso estudo ($n=15$), o que talvez seja pouco adequado para análises quantitativas como a que propomos. Ainda assim, tem sido bastante encorajador percebermos, nos últimos cinco anos, resultados similares advindos de amostragens maiores. Dessa forma, parece justificado considerar esses resultados quantitativos em nossos estudos, posto que eles são reforçados por avaliações prévias sobre o impacto de cursos de mesma natureza.

As atitudes relacionadas aos tópicos razão e proporção foram avaliadas visando a detectar alterações ocorridas antes e depois das atividades desenvolvidas. Tal avaliação foi conduzida usando uma escala *Likert* de 1 a 5. A Tabela 1 apresenta os resultados pré e pós, que são bastante similares àqueles apresentados e discutidos num estudo anterior de Ben-Chaim *et al.* (2002). Os dados na Tabela 1 indicam que os professores-estudantes envolvidos nas atividades propostas aprimoraram suas atitudes frente ao ensino de Matemática em geral, mesmo tendo partido de um nível inicial bastante positivo. O desvio padrão do pós-teste indica que todos os participantes gostam de ensinar Matemática. Além disso, eles ficaram bastante mais confiantes quanto às suas próprias habilidades para trabalhar com razão e proporção depois de terem passado pelo curso.

No entanto, há uma diferença perceptível nas respostas às três questões abertas ao final do questionário relativo às atitudes, a saber, aquelas em que lhes é solicitado mencionar situações relativas à razão e à proporção, além de palavras relacionadas a esses conceitos. Na maioria dos casos, no pré-teste os estudantes-professores escreveram “*Eu não me lembro*” ou “*Eu não sei*”, especialmente no contexto relacionado à proporção. No pós-teste, todos os quinze participantes deram vários exemplos corretos de situações envolvendo razão e proporção, indicando conceitos e palavras relacionadas e até mesmo usando notações matemáticas tais como $a/b = c/d$; $a, b, c, d \neq 0$.

Àqueles que participaram das atividades relativas ao RP, ensinar os conceitos de razão e proporção pareceu ser mais complicado depois de realizado o curso. As entrevistas, por exemplo, afirmavam: “*Eu pensava que razão e proporção eram fáceis e que eu sabia como ensiná-los, mas hoje,*

após ter aprendido, eu compreendi que é muito complicado e que eu ainda preciso aprender mais”, ou “Eu não sabia o quanto eu não sabia e como eu estava despreparado para ensinar esses tópicos”.

Outra alteração percebida após a exposição às atividades relativas ao RP está relacionada à necessidade de incluir razão e proporção como parte das formações inicial e continuada de professores. Antes dessa exposição, nem todos os professores-estudantes pensavam ser muito importante incluir, nos momentos de formação, um curso ou disciplina para a discussão desses conceitos; entretanto, depois da exposição às atividades realizadas, quase todos os participantes concordaram sobre a importância de um tal curso. Um dos entrevistados, por exemplo, disse: *“É muito importante ensinar razão e proporção na faculdade, pois esses assuntos são o ABC da Matemática. Se não estivermos familiarizados com eles, é impossível ensinar outros assuntos”.* Esses resultados indicam uma alteração significativamente positiva nas atitudes dos participantes em relação aos conceitos tratados.

Quantidade de itens		Média antes do Curso N = 15	Média após o curso N = 15
4	<i>Itens relativos às atitudes relacionadas a ensinar Matemática (em geral).</i>	4.45	4.81
7	<i>Itens relativos à confiança a habilidade para trabalhar com razão e proporção.</i>	2.81	3.89
3	<i>Itens relativos às atitudes relacionadas a dificuldades para ensinar razão e proporção.</i>	3.22	3.25
6	<i>Itens relativos às atitudes relacionadas com o ensino de razão e proporção.</i>	4.62	4.59

Tabela 1: Resumo das atitudes relativas à Razão e Proporção, Escala (1-5)

A análise quantitativa dos questionários referentes à performance dos participantes quando envolvidos em atividades relativas ao RP indica um progresso significativo do pré ao pós-teste: de 45% a 90%. O intervalo de variação no pré-teste foi de 24% a 74% e no pós-teste foi de 80% a 100%. Em cada um dos subtestes – Taxa (5 itens), Razão (5 itens), e Escala (5 itens) – a alteração foi considerável, de 69% para 97%, de 30% para 88%, e de

36% para 86% respectivamente. Devemos notar que as tarefas de avaliação eram diferentes daquelas dos testes-padrão, mas também relacionadas a situações corriqueiras como comprar refrigerantes, passear de bicicleta, densidade populacional, ir de ônibus para a escola e visitar uma loja de artigos fotográficos.

Além disso, os problemas e as situações são diferentes das apresentadas nas sessões em que foram discutidas as atividades investigativas. Embora os participantes neste estudo tenham iniciado as tarefas com um nível inferior aos participantes do estudo anterior (BEN-CHAIM *et al.*, 2002), a melhora foi muito mais nítida. Além disso, as explicações dadas pelos participantes deste estudo foram muito melhores, considerando os métodos para a resolução dos problemas, especialmente depois das aulas. O questionário relativo ao RP incluiu seis exercícios sobre frações, a fim de examinar se os alunos tiveram dificuldades em comparar frações e/ou trabalhando com números/frações similares àquelas presentes nos problemas explicitados verbalmente. A esse respeito não foram encontradas diferenças entre os resultados entre o pré e o pós-teste. Os alunos não tiveram dificuldades específicas para resolver os exercícios que envolviam fração.

As observações coletadas durante as aulas e as entrevistas de aprofundamento com a amostragem escolhida confirmaram veemente esses resultados, sugerindo que a implementação de nosso modo de ensino relativo ao RP auxilia não apenas os professores quanto à aquisição de conhecimentos matemáticos e didático-pedagógicos, mas também opera favoravelmente nas opiniões dos futuros professores sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática. Os entrevistados, por exemplo, indicaram ter gostado da estratégia de “*não apenas dar a resposta – pois é possível obter respostas com procedimentos incorretos – mas exigir explicações orais*” ou “*Eu gostei da estratégia de investigar, desafiar, da cooperação entre os colegas; as tarefas foram muito interessantes e podem ser apresentadas às crianças; os materiais teóricos (artigos e relatórios de pesquisa) foram auxiliares importantes*”, ou “*As atividades, o material teórico, a orientação durante o curso me ajudaram a ultrapassar o envolvimento técnico com o conhecimento chegando à compreensão dos tópicos estudados*”. É

interessante notar que a maioria dos participantes sentiu que o estilo de ensino exercitado durante o curso sobre RP motivou a compreensão dos conceitos relacionados ao RP, num processo tão agradável quanto eficiente. Mesmo assim, os professores-estudantes afirmaram que o curso deveria ter uma duração maior, o que lhes daria maior confiança para trabalhar com os tópicos em questão.

O resultado mais importante desse nosso estudo é que muitos dos estudantes-professores tentaram, em seus primeiros anos na carreira docente, apresentar para seus alunos as tarefas propostas a eles durante o curso. Usualmente eles nos solicitam auxílio quanto à elaboração de atividades para a sala de aula e nos convidam a observá-los em ação, pedindo-nos um *feedback* sobre esses momentos.

Conclusão

Os resultados desse estudo indicam que as atividades investigativas autênticas relativas ao RP, como aqui propostas, são adequadas, exequíveis e contribuem para possibilitar que o professor em formação conheça e compreenda os tópicos razão e proporção. Com a implementação de nosso modelo de ensino relativo ao RP, que se vale de experiências corriqueiras e uma variedade de atividades autênticas, os professores-estudantes conseguem ter *insights* relativos à relação entre a tarefa proposta e o tipo de raciocínio que tal tarefa exige dos alunos. Isso corrobora a apreciação de Stein e Lane (1996) sobre a influência de atividades para a aprendizagem em Matemática.

Em geral, o método de elaboração de tais tarefas matemáticas autênticas, sendo exequível, encoraja o professor em formação a implementar atividades similares em suas salas de aula, quando inseridos na carreira docente. Ball (2000) afirma que “*Fazer o professor pensar sobre atividades matemáticas e sobre seus usos em sala de aula pode levá-lo a melhorar sua habilidade de selecionar, modificar e aplicar tarefas matemáticas com seus alunos*” (p. xii). O desenvolvimento dessa aptidão é tão importante para os professores que Ball a considera “*o âmago do trabalho dos professores*”.

Ao aprender os tópicos razão e proporção a partir de atividades autênticas, o professor em formação não apenas melhora significativamente seus conhecimentos relativos ao conteúdo e às questões didático-pedagógicas mas, também positivamente, mudam suas atitudes relativas à Matemática, em geral e, especificamente, em relação aos componentes e aspectos vinculados aos conceitos de razão e proporção.

Posto que há evidências de que na formação dos professores que trabalharão com Matemática na escola elementar (e, em muitos casos, na atuação do professor já formado) há lacunas quanto aos tópicos de raciocínio proporcional – tanto em relação ao conteúdo propriamente dito quanto às estratégias pedagógicas relacionadas a esses conteúdos – é altamente recomendável que haja pelo menos um semestre, nos cursos de formação, em que esses tópicos sejam trabalhados com o apoio das atividades autênticas aqui propostas. Os autores deste artigo recentemente finalizaram um livro para educadores matemáticos, formadores de formadores, que inclui os materiais teóricos e práticos necessários – tarefas autênticas com explicações e complementações – para ensinar os tópicos relacionados ao RP, em nível universitário, para a formação inicial e continuada dos professores de Matemática (BEN-CHAIM; KERET; ILANY, 2006).

Referências

ALCARO, P. C.; ALSTON, A. S.; KATIMS, N. Fractions Attack! Children Thinking and Talking Mathematically. **Teaching Children Mathematics**, 2000. p.562-567.

BALL, D. “Foreword” in **Implementing Standards-Based Mathematics Instruction: a casebook for professional development**, by Mary k. Stein, Margaret M. Smith, Marjorie A. Henningsen, and Edward A. Silver. New York Teacher College Press: New York, p. ix-xiv, 2000.

BEN-CHAIM, D.; FAY, J.T.; FITZGERALD, M.W.; BENEDETTO, C.; MILLER, J. Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. **Educational Studies in Mathematics**, 36, 247-273, 1998.

BEN-CHAIM, D.; ILANY, B.; KERET, Y. **Ratio and Proportion** - Mathematical and pedagogical knowledge of pre- and in-service elementary teachers, before and after learning these topics by a new approach. Research Report, Mofet Publication, Tel-Aviv, Israel, 2001. 46p.

BEN-CHAIM, D.; ILANY, B.; KERET, Y. Mathematical and pedagogical knowledge of pre- and in- service elementary teachers, before and after experience in proportional reasoning activities. In: **PME 26**, vol. 2, Norwich, United Kingdom, 2002. p. 81-88.

BEN-CHAIM, D.; KERET, Y.; ILANY, B. **Ratio and Proportion** – Research and Teaching in Mathematics Teacher Training. Mofet and Ach Publication, Israel, 2006. 296 p.

CRAMER, K.; POST, T; CURRIER, S. ‘Learning and teaching ratio and proportions: Research implications’, in D. T. Owens (Ed.), **Research Ideas for the Classroom, Middle Grades Mathematics**. New York: MacMillan Publishing Company, 1993. p. 159–178.

DE BOCK, D.; VERSCHAFFEL, L.; JANSSENS, D. The Predominance of the Linear Model in secondary school students’ Solutions of Word Problems Involving Length and Area of Similar Plane Figures. **Educational Studies in Mathematics**, 35, 1998. p.65-83.

FISCHBEIN, E.; JEHIAM, R.; COHEN, D. The irrational number and the corresponding epistemology and obstacles. In: **Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education**, vol. 2. Lisbon, Portugal: University of Lisbon, 1994. p.352-359.

FREUDENTHAL, H. **Weeding and Sowing**: a preface to a science of mathematical education. Dordrecht: Riedel, 1978.

FREUDENTHAL, H. **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures**. Dordrecht : Riedel, 1983. p.178-209.

FRIED, M.N; AMIT, M. Mathematics teacher Education Around the World – a spiral task as a model for in-service teacher education. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 8, 2005. p.419-436.

GREENO, J.G. Some further observations of the environment model metaphor. **Journal of Research in Mathematics Education**, 25(1), 1994. p.94-99.

HAREL, G; CONFREY, J. (Eds.). **The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics**. SUNY Press, 1994.

HOFFER, A. Ratios and proportional thinking. T. Post (Ed.) **Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods**. Boston: Allyn and Bacon, 1988. p. 285-313.

ILANY, B.; BEN-CHAIM, D.; KERET, Y. Implementation of a model, using authentic investigative activities for teaching ratio and proportion in pre-service elementary education. In: **PME 28**, vol. 3. Bergen, Norway, 2004. p.81-88.

JAWORSKI, B. Tools and Tasks for Learning and Meta-Learning. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 8, 2005. p.359-361.

KERET, Y. Change processes in adult proportional reasoning: student teachers and primary mathematics teachers, after exposure to ratio and proportion study unit. In: **PME 23**, Haifa, Israel, vol. 3, 1999. p.145-152.

KERET, Y.; BEN-CHAIM, D.; ILANY, B. A model using authentic investigative activities for teaching ratio and proportion in pre-service elementary education. In: **Proceedings of SEMT '03 - International Symposium Elementary Math's Teaching**, Prague, Czech Republic, 2003. p. 94-99.

LAWTON, C.A. 'Contextual factors affecting errors in proportional reasoning'. **Journal for Research in Mathematics Education**, 24, 1993. p.460-466.

LEINHARDT, G.; YOUNG, K.M.; MERRIMAN, J. Integrating professional knowledge: the theory of practice and the practice of theory. **Learning and Instruction**, vol. 5, 1995. p. 401-408.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS **Curriculum and Evaluation, Standards for School Mathematics**. Reston, VA: The Council, 1989.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: The Council, 2000.

POST, T.R.; BEHR, M.J.; LESH, R. 'Proportionality and the development of prealgebra understanding'. In: A. COXFORD, A.; SCHUTE, A. (eds.). **The Ideas of Algebra, K-12, 1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics**. Reston, VA: The Council, 1988. p. 78-90.

SOWDER, J.; ARMSTRONG, B.; LAMON, S.; SIMON, M.; SOWEDER, L.; TOMPSON, A. Educating Teachers to teach Multiplicative Structures in the Middle Grades. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 1, 1998. p.127-155.

STEIN, M.K.; LANE. S. Instructional Tasks and the Development of Student Capacity to Think and Reason: an analysis of the relationship between teaching and learning in a Reform Mathematics Project. **Educational Research and Evaluation**, 2, 1996. p.50-80.

152 *Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, n° 31, 2008, p. 125 a 159*

TOURNIAIRE, F.; PULOS, S. 'Proportional reasoning: a review of the literature.
Educational Studies in Mathematics, 16, 1985. p.181-204.

TRACY, D.; HAGUE, M. Toys 'r' math. **Mathematics Teaching in the Middle School**,
2(3), 1997. p. 140-145.

Aprovado em dezembro de 2007
Submetido em outubro de 2007

Anexos

Atividades investigativas autênticas relacionadas ao RP - TAXA

Atividade 1: Estimativa do número de pessoas numa manifestação



Figura 02: Uma manifestação

Primeiro estágio da atividade

Usualmente, os jornalistas gostam de estimar o número de pessoas envolvidas em manifestações e desfiles. Consideremos um exemplo: uma manifestação política foi noticiada num programa de televisão. O jornalista juntou-se à multidão e declarou: “A praça está cheia de manifestantes. Pelo menos 200.000 pessoas estão aqui e também nas ruas próximas”. Ao mesmo tempo, um outro jornalista, numa emissora de rádio, divulgava: “A Polícia anunciou que 100.000 pessoas participam da manifestação e que a ordem está sendo mantida”.

Responda as seguintes questões:

a. Por que, se ambos os jornalistas estavam no mesmo local, relatando o

- mesmo acontecimento, houve uma diferença significativa em relação à estimativa do número de pessoas presentes à manifestação?
- Em sua opinião, como os jornalistas fizeram as estimativas sobre o número de pessoas presentes na manifestação?
 - Sugira um método com o qual os jornalistas obteriam uma melhor estimativa do número de pessoas presentes na manifestação (o próximo estágio do problema pode ajudá-lo).

Estimativa do número de pessoas numa manifestação

Segundo estágio da atividade

Às vezes, a quantidade de pessoas presentes num determinado local é estimada a partir de fotografias aéreas do local da manifestação. Imagine que a ilustração abaixo seja uma foto aérea de um grupo de pessoas assistindo a uma corrida de carros. Cada ponto representa uma pessoa.

Dê uma estimativa de quantas pessoas estavam presentes. Explique o método que você utilizou para chegar a sua resposta.

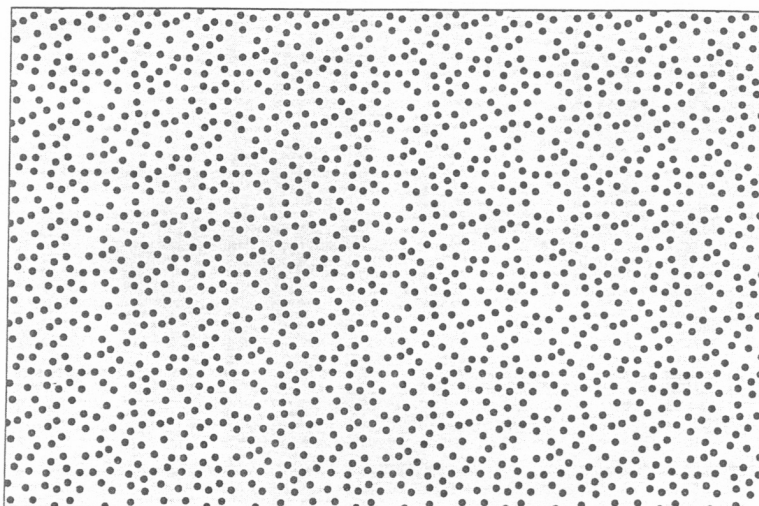
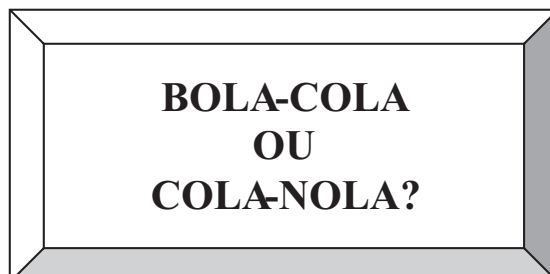


Figura 03: Fotografia aérea do local da manifestação

Atividade 02: Preferência por refrigerante



Foi feito um teste sobre a preferência entre os refrigerantes BOLA-COLA e COLA-NOLA e chegou-se aos seguintes resultados:

A razão entre aqueles que preferem BOLA-COLA a COLA-NOLA é 3 para 2.

A quantidade dos que preferem BOLA-COLA a COLA-NOLA está na razão de 17.139 para 11.426.

O grupo dos que preferem BOLA-COLA a COLA-NOLA tem 5.713 pessoas a mais.

Pergunta-se: as três afirmações acima resultaram do mesmo teste? Explique!

Qual afirmação descreve de modo mais adequado os resultados da comparação entre BOLA-COLA e COLA-NOLA? Explique!

Se você precisasse divulgar os resultados, qual afirmação acima pareceria mais adequada? Porque?

Sugira outros modos possíveis de comparar as preferências e a popularidade entre dois tipos de refrigerantes.

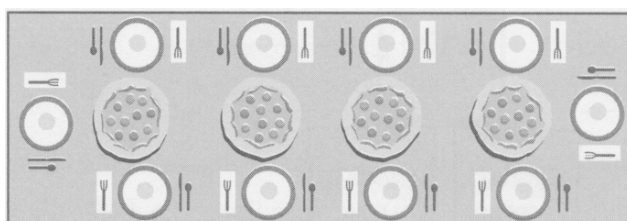
Atividades investigativas autênticas relacionadas ao RP - RAZÃO

Atividade 03: Dividindo uma pizza

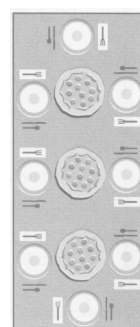
Todo mês, os amigos de Daniel encontram-se num restaurante para comer pizza. Daniel, como sempre, está atrasado, mas como seus amigos gostam muito dele, ficam esperando sua chegada. Eles reservaram para Daniel um lugar em cada uma das mesas (1 e 2) que o grupo de amigos ocupou no restaurante.

Finalmente, depois de um tempo, Daniel chegou e tinha que decidir em qual lugar sentar: ele deveria juntar-se aos amigos da mesa 1 (na qual havia 4 pizzas grandes e 9 pessoas) ou deveria sentar-se à mesa 2 (onde havia 3 pizzas grandes e 7 pessoas)?

Mesa 1



Mesa 2



Problemas para discussão

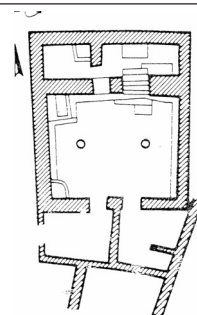
Qual é sua sugestão? Qual mesa Daniel deveria escolher? Explique seu raciocínio.

No restaurante, a razão entre as mesas grandes (como a mesa 1, com 10 lugares) e as mesas pequenas (como a mesa 2, com 8 lugares) é de 9 para 5. Considerando todas as mesas disponíveis, há 390 lugares. Quantas mesas de cada tipo existem nesse restaurante?

Atividades investigativas autênticas relacionadas ao RP - ESCALAS

Atividade 04: O Templo Bet-Shean

A figura ao lado é um esboço da restauração do Templo Bet-Shean, e foi extraída da *Nova Enciclopédia das Escavações em Israel*. O esboço foi desenhado numa escala de 1:200



Responda:

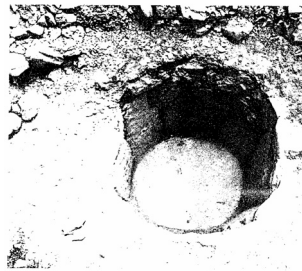
- Quais são as dimensões reais do *hall* principal do Templo?
- Qual é a razão entre o perímetro do *hall* principal no esboço em relação ao perímetro real do *hall* principal? Qual é a relação entre essa razão e a escala dada?
- Qual é a razão entre o perímetro real do *hall* principal e o perímetro de sua sala de aula?
- Qual é a razão entre a área do *hall* principal do esboço e a área real desse mesmo *hall* principal?
- Se o esboço do Templo fosse desenhado numa escala de 1:400, como as dimensões reais do *hall* principal (comprimento, largura, perímetro e área) seriam alteradas em relação ao esboço anterior? Explique sua resposta.
- Se o esboço do Templo fosse desenhado numa escala de 1:100, qual seria a razão entre a área do *hall* principal nesse novo esboço e a área do *hall* principal no esboço original? Explique sua resposta.
- Se o esboço foi ampliado, usando-se um aparelho específico, de tal modo que a área do *hall* principal, depois da ampliação, passou a ser 243 centímetros quadrados, qual a escala desse novo esboço? Explique sua resposta.

O Templo de Bet-Shean — Segundo nível

- a) Uma maquete do Templo, construída numa escala de 1:50, está em exibição em um museu. Num dos jardins do Templo há uma piscina retangular usada para armazenar água. As dimensões dessa piscina, no modelo, são 4cm por 6cm por 8cm.
- (1) Quantos metros cúbicos de água podem ser armazenados nessa piscina?
 - (2) Qual é a razão entre o volume da piscina do esboço e o volume real da piscina? Como essa razão relaciona-se com a escala dada? Explique sua resposta.

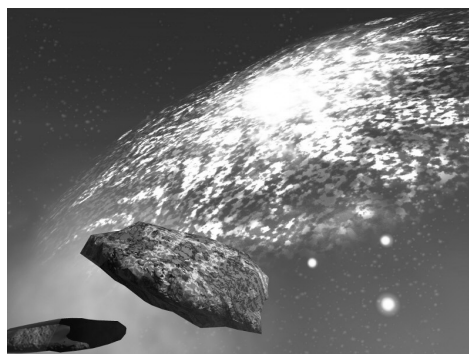
b) Num dos jardins do Templo há um poço circular cujo diâmetro é 5cm e cuja profundidade é 6cm.

- (1) Quantos metros cúbicos de água podem ser armazenados nesse poço?
- (2) Qual a razão entre o volume do poço no modelo e o volume real do poço? Como essa razão está relacionada à escala dada? Explique sua resposta.



Atividades investigativas autênticas relacionadas ao RP - RAZÃO INDIRETA

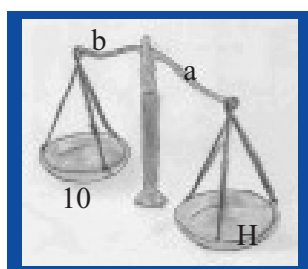
Atividade 05: Qual é o peso do meteorito?



Os cientistas de uma universidade conseguiram obter um meteorito, uma pequena rocha vinda do espaço. Quando os cientistas chegaram ao laboratório para pesar o meteorito, perceberam que o aparelho usado para pesar pequenas quantidades havia sido enviado para ser calibrado. A curiosidade dos cientistas os levou a procurar um novo método para medir o peso do meteorito (W).

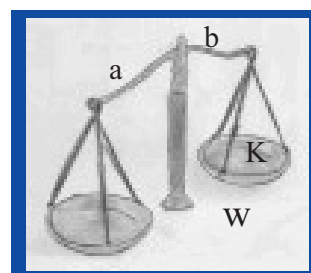
Havia no laboratório uma balança desregulada (os braços a e b não eram do mesmo tamanho, ou seja, $a \neq b$). Depois de alguns minutos pensando, os cientistas acharam um jeito de usar essa balança desregulada para pesar a pequena rocha (W).

Eles agiram do seguinte modo:



W

Figura A



40

Figura B

Colocaram o meteorito (W) num dos pratos (o prato indicado por H, na figura A) e obtiveram como resultado 10 gramas. Em seguida, colocaram o meteorito (W) no outro prato (indicado por K, na figura B) e obtiveram como resultado 40 gramas. Após alguns cálculos, encontraram o peso do meteorito (W) e ficaram contentes.

- Tente explicar como os cientistas determinaram o peso da rocha (W).
- Apresente, por escrito, o raciocínio que levou você a achar a solução.
- Sugira um modo para explicar aos alunos da escola básica o conceito de equilíbrio.

