Bolema, Rio Claro (SP), Ano 22, nº 33, 2009, p. 1 a 22

ARTIGOS

Análise de Soluções de um Problema Representado por um Sistema de Equações

Analysis of Solutions to a Problem Represented by a System of Equations

Helena Noronha Cury[1]
Eleni Bisognin[2]

Resumo

Os projetos brasileiros de avaliação de larga escala do desempenho dos estudantes apresentam descritores para indicar habilidades que os alunos devem desenvolver para modelar problemas da vida real e uma dessas habilidades está relacionada à resolução de sistemas de equações. Nesse artigo, é relatada parte de um projeto de pesquisa desenvolvido com calouros de disciplinas matemáticas em universidades privadas do sul do Brasil; uma questão do teste foi escolhida para aprofundar a análise das resoluções escritas de um sistema de equações lineares. Depois de classificar as produções dos alunos, foram utilizadas idéias sobre o sentido do símbolo e sentido da estrutura, para discutir as dificuldades apresentadas. Considera-se que esse tipo de análise permite esclarecer aspectos que devem ser focalizados em outras pesquisas, para ajudar estudantes e professores a compreender alguns problemas apresentados nas avaliações de larga escala.

Palavras-chave: Educação Matemática. Sistema de Equações. Análise de Soluções. Sentido da Estrutura. Avaliação.

[1] Doutora em Educação, professora do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática, Centro Universitário Franciscano (UNIFRA). Rua dos Andradas, 1614 – CEP 97010-032 - Santa Maria, RS. E-mail: curyhn@via-rs.net

[2] Doutora em Matemática, coordenadora do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática, Centro Universitário Franciscano (UNIFRA). Rua dos Andradas, 1614 – CEP 97010-032 - Santa Maria, RS. E-mail: eleni@unifra.br

Abstract

Large-scale assessment projects of students´ performance in Brazil use descriptors to indicate abilities that students should develop in order to deal with real-life modeling problems, and one of these abilities is related to solving systems of equations. In this paper, we report on part of a research project developed with first-year students in mathematics courses enrolled in private universities in southern Brazil; one test question was chosen for an indepth analysis of written solutions to a system of linear equations. After classifying the work of the students, ideas about the meanings of symbol and structure were used to discuss difficulties that arose. It is considered that such an analysis can clarify aspects that must be the focus of future studies to help students and teachers to understand some problems presented in large-scale assessments.

Keywords: Mathematics Education. System of Equations. Analysis of Solutions. Structure Sense. Assessment.

Introdução

As avaliações de larga escala realizadas em nível nacional ou estadual, como o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Programa de Avaliação do Sistema Educacional do Paraná (AVA) e o Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Rio Grande do Sul (SAERS), têm proposto, para alunos de Ensino Fundamental ou Médio, questões que envolvem a identificação de um sistema de equações de primeiro grau que expressa um problema e sua resolução.

Em todas essas avaliações são apresentadas matrizes de referência contendo os descritores dos temas abordados, que envolvem um conteúdo e as habilidades a ele relacionadas. Em especial no tema "Números e Operações/ Álgebra e Funções", considerado o de maior prioridade para a Matemática ensinada na educação básica, segundo textos relacionados ao SAEB (BRASIL, 2007), encontram-se descritores das habilidades esperadas de um estudante que vai resolver um sistema de equações lineares.

Na matriz de referência do SAEB para a 8ª série do Ensino Fundamental, no tema em questão, encontramos o descritor 34, que verifica "a habilidade de o aluno identificar que a modelagem de um problema é um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas. Essa habilidade é avaliada por meio de situações-problema contextualizadas, nas quais o aluno possa efetuar ou reconhecer a modelagem.” (BRASIL, 2007, p. 11). Em seguida, como exemplo, o texto apresenta o problema abaixo, semelhante ao que vamos analisar neste artigo:

> Carlos e Renato compraram lanche na cantina da escola. Carlos comprou 1 cachorro-quente e 2 refrescos, gastando R$ 2,20 e Renato comprou *2* cachorros -quentes e 1 refresco e gastou R$ 2,90. Como determinar o preço do cachorro-quente e do refresco?

Já no AVA 2002, encontramos, na matriz de referência para a 8ª série do Ensino Fundamental, os descritores “Identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema” e “Resolver problema envolvendo um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas” (BURIASCO, SOARES, 2007, p. 98). O SAERS traz uma matriz de referência para o 1º ano do Ensino Médio que contempla o descritor 34, “Identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema” (RIO GRANDE DO SUL, 2007, p. 1).

Assim, sendo uma habilidade apontada em mais de uma avaliação de larga escala para o Ensino Fundamental, supõe-se que um estudante ingressante em um curso superior tenha conhecimentos e habilidades para resolver um problema que pode ser modelado por um sistema de equações lineares. No entanto, em nossa experiência com ensino de Cálculo Diferencial e Integral, notamos que os alunos têm muita dificuldade de expressar matematicamente uma situação contextualizada e, às vezes, cometem erros na resolução do sistema, especialmente se os coeficientes das incógnitas não são unitários.

A questão analisada neste artigo é parte de um teste aplicado a alunos calouros que cursavam disciplinas matemáticas em oito Instituições de Ensino Superior (IES) gaúchas. O projeto, financiado pelo CNPq, foi desenvolvido por uma equipe formada por 14 docentes e envolveu uma amostra intencional de 368 alunos de cursos de Engenharia, Arquitetura, Ciência da Computação, Ciências Contábeis e Licenciatura em Matemática.

A investigação teve como objetivos: a) analisar e classificar erros cometidos por alunos ingressantes em disciplinas matemáticas de cursos superiores; b) elaborar e desenvolver atividades de sala de aula, para explorar as dificuldades detectadas; c) avaliar os resultados da experiência e a possibilidade de re-aplicação em diferentes IES. Para atender aos objetivos, a equipe elaborou uma prova, composta de 12 questões de múltipla escolha, englobando conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, especialmente aqueles solicitados nas resoluções de problemas relacionados com limites, derivadas e integrais. A aplicação da prova nas primeiras aulas de cada disciplina permitiu que fossem avaliados os conhecimentos que os estudantes traziam desses níveis anteriores de ensino.

Aos alunos, foi solicitado que resolvessem cada questão apresentando seu desenvolvimento e somente após assinalassem a alternativa considerada correta, na grade de respostas. Dessa forma, foi possível fazer a análise quantitativa, com auxílio do software SPSS (*Statistics Package for the Social Sciences*), bem como a avaliação da produção escrita dos estudantes.

As análises, quantitativas e qualitativas, já foram objeto de comunicações em congressos da área de Educação Matemática, especialmente quanto à classificação dos erros detectados (CURY, 2006; CURY, BISOGNIN, 2006; CURY; MOTTA, 2006), sendo enfocadas, especialmente, aquelas questões em que os calouros encontraram maiores dificuldades. No entanto, a produção dos estudantes é muito rica, cada questão evidencia as estratégias de resolução de determinados problemas e permite tecer considerações sobre a aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental e Médio. Assim, mesmo a questão mais acertada pode trazer elementos para discussões à luz de conceitos desenvolvidos por pesquisadores da área de Educação Matemática.

Neste artigo, portanto, escolhemos para análise a questão do teste acima citado que teve o maior número de acertos na grade de respostas. Seu enunciado é:

O valor de dois carros de mesmo preço, adicionado ao de uma moto, soma R$ 41.000,00. No entanto, o valor de duas dessas motos, adicionado ao de um carro do mesmo tipo, é de R$ 28.000,00. A diferença entre o valor do carro e o da moto, em reais, é:

a) 5.000   b) 13.000   c) 18.000   d) 23.000   e) 41.000

A partir de considerações sobre resolução de um sistema de equações lineares e sobre sentido da estrutura, são analisadas as produções escritas dos alunos calouros na solução da questão escolhida.

Fundamentação teórica

A questão analisada neste artigo pode ser modelada por um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas e o assunto é abordado no Ensino Fundamental, em 6ª, 7ª ou 8ª séries, dependendo do autor de livro didático e da escola. Para revisar a maneira como o assunto é apresentado em livros-texto desse nível de ensino, escolhemos dois dos autores mais utilizados nas salas de aula dos alunos-professores do curso de Licenciatura em Matemática de nossa instituição.

Dante (2002a) introduz o assunto "equações" na 6ª série e indica que "equações são *igualdades* que contém *pelo menos uma letra que representa um número desconhecido*. Essa letra, que está no lugar do número desconhecido, chama-se *incógnita*." (DANTE, 2002a, p. 211. Grifos do autor). Após explicar algumas maneiras de resolver uma equação, o autor explora a idéia de equilíbrio e as representações de balanças de dois pratos para resolver equações. Somente no livro da 7ª série é que Dante (2002b) introduz a resolução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Entre os métodos de resolução, o autor apresenta o uso de tabelas, o método de substituição, o de adição e o método gráfico, em que as equações das retas são representadas em um plano cartesiano, obtendo o par-solução por meio das coordenadas do ponto de intersecção das retas.

Tanto no método de substituição como no de adição, o autor parte de uma situação real, que é modelada por um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, e apresenta os passos detalhados para cada tipo de solução. Para utilizar exemplos em que os coeficientes de uma das incógnitas não são opostos – ou seja, em que os termos semelhantes não podem ser cancelados em uma simples adição das equações –, o autor apresenta uma propriedade: "Quando adicionamos ou subtraímos valores iguais em ambos os membros de uma igualdade ou quando multiplicamos ou dividimos ambos os membros por um número diferente de zero, obtemos uma nova igualdade." (DANTE, 2002b, p. 213).

Bigode (2002a) também apresenta equações no livro da 6ª série, iniciando o capítulo 9 com "a matemática das balanças" e a partir delas comenta ser possível descobrir um valor desconhecido usando as informações sobre o que foi colocado nos dois pratos. O autor, ao preparar o aluno para resolver equações lineares de 1º grau com uma incógnita, apresenta o princípio aditivo – "Quando adicionamos ou subtraímos um mesmo número em cada membro de uma equação, obtemos outra equivalente à equação original" (p. 173) – e o princípio multiplicativo – "Quando multiplicamos ou dividimos por um mesmo número, diferente de zero, cada membro de uma equação, obtemos outra equivalente à equação original" (p. 173).

No livro da 7ª série, Bigode (2002b) retoma o assunto, estudando os sistemas de equações de 1º grau, partindo de balanças com massas em equilíbrio e tentado adivinhar os valores dessas massas. Acrescentando outros exemplos e equacionando os sistemas, o autor mostra como buscar um par de números que satisfaz, simultaneamente, as duas equações do sistema. Dessa forma, o autor apresenta três métodos de resolução, o de substituição, o de adição e o de subtração, mas conclui que "os métodos de adição e de subtração são semelhantes. Consistem em transformações algébricas nas equações, de modo a eliminar uma das variáveis, recaindo numa equação de primeiro grau com uma variável." (BIGODE, 2002b, p. 213). Quando não é possível usar diretamente o método de adição ou o de subtração, porque não há termos opostos para cancelar, o autor mostra, em exemplos, que é possível fazer transformações algébricas sobre as equações do sistema para recair nos métodos anteriores.

No Ensino Superior, o estudo de sistemas lineares e suas soluções é um dos tópicos mais destacados na Álgebra Linear. Para revisar a maneira como os autores dessa área enfocam o tema, escolhemos dois dos livros mais empregados em nossa Instituição, nas aulas de Álgebra Linear. Em Anton e Busby (2006), inicialmente é definida uma equação linear a *n* variáveis e um sistema de *m* equações a *n* incógnitas, sendo que uma solução do sistema é uma seqüência de *n* números que tornam verdadeira cada equação do sistema.

No caso de um sistema linear de três equações com três incógnitas, os autores mostram os planos que representam as equações e as várias possibilidades de solução, indicadas pelas possíveis posições dos planos. A seguir, Anton e Busby (2006) citam o teorema: "Cada sistema de equações lineares tem nenhuma, uma ou uma infinidade de soluções, não havendo outras possibilidades." (p. 60).

Segundo os mesmos autores,

> O método básico de resolver um sistema linear consiste em efetuar operações algébricas apropriadas nas equações do sistema para produzir uma sucessão de sistemas cada vez mais simplificados, mas com o mesmo conjunto solução do sistema original, até chegar num ponto em que fica visível se o sistema é consistente e, se for, quais são suas soluções. (ANTON; BUSBY, 2006, p. 63).

Para desenvolver o método, são empregadas operações elementares sobre as linhas da matriz do sistema, de três tipos: multiplicação de toda linha por uma constante não nula, troca de duas linhas de posição e soma de um múltiplo de uma linha a outra linha. O que Bigode (2002b) chama de princípio aditivo e multiplicativo é evidenciado nas operações elementares, aplicadas às equações do sistema.

Lay (1999) também define equação linear e sistema de *m* equações com *n* incógnitas, também emprega a representação matricial e utiliza as operações elementares sobre as linhas para obtenção da solução do sistema. Assim, podemos considerar que a diferença entre as apresentações do assunto "sistema de equações" no Ensino Fundamental e no Superior é apenas relativa à profundidade com que o tema é abordado e à linguagem, pois os autores de livros de Álgebra Linear já têm à disposição uma terminologia que os estudantes de Ensino Fundamental ainda não dominam. Mas a ênfase nas operações elementares, seja qual for a maneira de expressá-las, é a tônica dos processos de resolução. Assim, ao analisarmos as produções dos estudantes ingressantes em cursos superiores, em nossa pesquisa, estamos analisando conhecimentos e habilidades que já deveriam ter sido desenvolvidos em nível de Ensino Fundamental.

Além das considerações sobre a apresentação do tema em livros de

Ensino Fundamental ou Superior, também vamos abordar algumas conceituações de pesquisadores que trabalham com habilidades apresentadas pelos estudantes ao solucionar equações e sistemas. Especialmente, vamos retomar resultados apresentados nos congressos do *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), por investigadores interessados em todos os aspectos relacionados ao ensino e à aprendizagem de Álgebra.

Para o trabalho com símbolos algébricos são requeridas habilidades englobadas na expressão "sentido do símbolo". Fey (1990) listou componentes básicas desse constructo e, entre elas, salienta-se a "habilidade de determinar qual entre várias formas equivalentes pode ser apropriada para resolver questões particulares"[3] (apud PIERCE; STACEY, 2004, p. 10). Arcavi (2005) também se propôs a desenvolver a idéia de "sentido do símbolo" e, entre as componentes por ele apontadas destacamos "uma habilidade de manipular e também de ´ler através` de expressões simbólicas como dois aspectos complementares na resolução de problemas algébricos" (p. 43).

Após a modelização de um problema real por um sistema de equações, parece-nos que o aluno precisa decidir qual método é mais apropriado para resolvê-lo e para isso deve "ler através" das duas equações, para visualizar sua "estrutura". Dreyfus e Hoch (2004) iniciam um texto comentando o fato de que a palavra "estrutura" parece ser "um termo conveniente para descrever alguma coisa sobre a qual muitos de nós temos uma vaga compreensão, mas não conseguimos expressar em palavras." (p. 152). A seguir, citam usos da palavra em outros artigos e concluem que não é fácil definir o que pretendem significar com o termo, porque os matemáticos – especialmente os algebristas – tendem a usar a palavra "estrutura" para definir categorias tais como grupos, anéis e corpos, mas que, na Álgebra do Ensino Médio[4], essas definições não ajudam.

Assim, mesmo entendendo que a resolução de um sistema de equações lineares é desenvolvida a partir de propriedades da adição e da multiplicação em um determinado conjunto (por exemplo, em $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$), vemos que a

[3] As citações em inglês foram traduzidas pelas autoras.
[4] *High School Algebra*

expressão "estrutura algébrica", no contexto das pesquisas do grupo do PME, tem um significado distinto. Hoch e Dreyfus (2004) definem:

> Qualquer expressão ou sentença algébrica representa uma estrutura algébrica. A aparência ou forma externa revela, ou pode, se necessário, ser transformada para revelar uma ordem interna. A ordem interna é determinada pelas relações entre as quantidades e operações que são partes componentes da estrutura. (p. 50).

Segundo essa definição, se tomarmos a expressão $x^2 - 5x + 6$, ela pode ser transformada na expressão equivalente (x-2)(x-3) e, ainda que a primeira seja uma expressão quadrática e a segunda, um produto de dois fatores lineares, elas são diferentes interpretações da mesma estrutura. O aluno que tem o "sentido da estrutura" consegue empregar a expressão que melhor lhe convier em uma resolução de um problema. (HOCH; DREYFUS, 2004).

Assim, os mesmos autores propõem a seguinte definição:

> O sentido da estrutura, como se aplica ao Ensino Médio, pode ser descrito como uma coleção de habilidades. Essas habilidades incluem: ver uma expressão ou sentença algébrica como uma entidade; reconhecer uma expressão ou sentença algébrica como uma estrutura previamente encontrada; dividir uma entidade em subestruturas, reconhecer conexões mútuas entre estruturas, reconhecer quais manipulações são possíveis de realizar e quais manipulações são úteis para realizar. (HOCH; DREYFUS, 2004, p. 51).

Linchevski e Livneh (1999) consideram que os alunos iniciantes em Álgebra precisam ser expostos à estrutura das expressões algébricas para poder superar certos obstáculos na resolução de equações, ou seja, devem ter oportunidade de desenvolver o sentido da estrutura, sendo capazes de "usar, com flexibilidade e criatividade, estruturas equivalentes de uma expressão. A instrução deveria [...] garantir que a ginástica mental, necessária para manipular expressões, faça sentido." (p. 191).

Dreyfus e Hoch (2004) consideram que as equações têm uma estrutura interna que, se reconhecida pelos alunos, lhes permite resolvê-las mais facilmente. Os autores dão como exemplo a equação

$\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}-x=5+(\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1})$, que é uma simples equação linear, x+5=0, "mascarada" em equação racional. Se o estudante tem "sentido da estrutura", ele se dá conta da estrutura interna, ou seja, de que o termo $\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}$ aparece em ambos os membros, e pode rapidamente usar a propriedade do cancelamento da adição, obtendo a solução, x = -5.

Ainda que os autores mencionados não tenham usado exemplos de sistemas de equações, consideramos que se pode empregar a mesma expressão, "sentido da estrutura", para avaliar as resoluções dos sistemas lineares de duas equações com duas incógnitas. Se o aluno se dá conta da estrutura interna do sistema, ou seja, se "vê" qual método é mais indicado para cada caso (substituição, adição ou, ainda, o uso dos princípios aditivo e multiplicativo para obter equações equivalentes que podem ser solucionadas pelos métodos anteriores), a resolução vai trazer menos dificuldades e gerar menos erros.

Na discussão sobre as produções dos alunos participantes da pesquisa aqui relatada, voltaremos às idéias apontadas nessa fundamentação.

Metodologia da pesquisa

A metodologia utilizada na investigação das produções escritas apresentadas pelos alunos calouros na resolução da questão enfocada é predominantemente qualitativa, seguindo-se, em linhas gerais, os passos da análise de conteúdo, apresentados em Bardin (1979), adaptados "ao domínio e ao objetivo pretendidos" (p. 31). No estudo da questão, o importante não são os erros cometidos, mas a forma de representar e solucionar o sistema de equações, que permite discutir a aprendizagem desse tópico, em geral desenvolvido no Ensino Fundamental.

Na pesquisa desenvolvida com os calouros, apesar da solicitação de que mostrassem o desenvolvimento da solução, muitos alunos apenas assinalaram uma das alternativas na grade de respostas. Para o estudo qualitativo, não levamos em consideração a grade, apenas as produções registradas pelos alunos no espaço correspondente na prova.

Seguindo as indicações de Bardin (1979), a análise das produções escritas da questão aqui referida foi realizada em três etapas: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Na primeira fase, as soluções escritas foram separadas e fotocopiadas, sendo delimitado o *corpus*, ou seja, o campo específico sobre o qual nos debruçamos. A fase de exploração do material envolveu um estudo aprofundado, com procedimentos de categorização das soluções, a partir de critérios definidos a *priori*.

Já na fase de tratamento dos resultados, foram apresentadas as distribuições de freqüência das classes e a elaboração de um texto-síntese, com exemplos de cada uma delas. No final, destacadas as soluções que apresentavam erros, estes foram selecionados, descritos e exemplificados.

As resoluções apresentadas pelos alunos

Em termos quantitativos, a questão aqui analisada foi a que teve maior número de acertos na pesquisa. Sessenta e três por cento dos alunos assinalaram a alternativa correta na grade de respostas, 24% indicaram uma opção incorreta e 13% não marcaram qualquer alternativa. No entanto, como já enfatizamos, para a análise qualitativa só foram consideradas as produções escritas, que mostraram o desenvolvimento da questão pelo aluno. Dessa forma, contamos apenas com 138 provas, nas quais os estudantes procuraram representar matematicamente a situação descrita no enunciado e solucionar a questão.

Após a leitura do material relativo à questão em foco, classificamos as respostas segundo quatro categorias, indicadas pelas letras A, B, C e D. Na categoria A, estão agrupadas as produções em que o estudante identificou que o problema poderia ser modelado por um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, corretamente expressas, soube resolver o sistema e apresentou a resposta correta. O exemplo mais representativo é o do aluno que sublinhou, na questão, a pergunta feita. A seguir, escreveu "*Sistema de equações*", mostrando ter identificado que o problema podia ser modelado dessa forma. Na sua solução, expressou as duas equações e empregou o método de adição para resolver o sistema, escrevendo, ainda, no final: "*Diferença entre x e y* $\Rightarrow$ *18 – 5 = 13*", assinalando a alternativa correta.

Em outra solução, na mesma categoria, o estudante tentou resolver o sistema pelo método de substituição, escrevendo $2y+x=28$ e tentando isolar x, mas nessa operação cometeu um erro, tendo indicado: $x = \frac{28}{2y} = \frac{14}{y}$. Provavelmente notando que havia algum engano, abandonou a estratégia e reiniciou a produção, usando o método de adição e obtendo a resposta correta.

Outra solução que chamou a atenção, ainda na categoria A, é a do aluno que, tendo representado as duas equações, subtraiu a segunda da primeira e já obteve a diferença solicitada no problema. No entanto, talvez por não se dar conta do fato ou por estar acostumado a empregar todos os passos de um determinado método, ele isolou x na equação $x\text{-}y=13.000$ e continuou o processo, obtendo a solução correta.

Na categoria B, estão classificadas as produções em que o estudante identificou que o problema poderia ser modelado por um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, corretamente expressas, soube resolver o sistema, mas errou alguns detalhes e não apresentou a resposta correta.

Nessa categoria, encontramos três soluções em que os estudantes obtiveram os valores das duas incógnitas, mas não fizeram a diferença solicitada, assinalando na grade o valor da moto. Outros cinco alunos determinaram apenas um dos valores, o primeiro encontrado na seqüência dos passos da resolução, assinalando-o na grade de respostas. Outro estudante, obtendo na substituição a equação $-3y = 41\text{-}56$, errou o cálculo da diferença e obteve $3y = 14$, concluindo, assim, com valores incorretos para as incógnitas.

Nas resoluções categorizadas como A ou B, fizemos uma segunda classificação, identificando o método utilizado para resolução do sistema de equações. Dos 103 alunos cujas resoluções foram classificadas como A ou B, 67% deles empregaram o método de adição e 33%, o método de substituição. Não foram usadas outras estratégias para resolução do sistema de equações.

Na categoria C, estão agrupados os casos em que o estudante identificou que o problema poderia ser modelado por um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, corretamente expressas, mas não soube resolver o sistema. Nessa classe, estão incluídas as soluções em que o aluno tentou resolver por um dos métodos e cometeu erros que são posteriormente analisados, mas também aquelas em que o aluno apenas representou o sistema de equações e não foi adiante ou resolveu por tentativa.

Finalmente, a categoria D é formada por aquelas produções em que o aluno não soube modelar o problema.

Classificadas as produções, podemos sintetizar quantitativamente as categorias no quadro 1, a seguir:

Categoria	**Nº de resoluções**
A	94
B	9
C	25
D	10
Total	138

Quadro 1 – Distribuição das resoluções por categoria

Nas 25 produções classificadas como C, ou seja, naquelas em que houve dificuldade na resolução do sistema de equações, fizemos a análise e classificação dos erros encontrados, identificando-os por letras gregas, □, □, α, β, γ, δ, ε, θ. Nas resoluções, alguns alunos representaram os valores do carro e da moto por x e y, respectivamente, outros usaram c e m para as respectivas incógnitas.

O erro α consiste em apenas representar o sistema e não continuar a resolução. Essa representação, às vezes, é matematicamente incorreta, como a do aluno que não teve o cuidado de indicar o sinal de igualdade, escrevendo apenas:

$$41.000,00 \quad 2C + 1M$$
$$28.000,00 \quad 2M + 1\ C$$

Também se encaixam nesse caso as representações de cinco alunos que apenas escreveram:

C1 + C2 + M1 = 41.000,00
M1 + M2 + C1 = 28.000,00
No mesmo caso, está a representação abaixo:
$x + x + y = 41.000$
$y + y + x = 28.000$

O erro do tipo β consiste em representar o sistema corretamente e realizar alguma operação, sem conseguir isolar uma das incógnitas. Por exemplo, um dos alunos apenas multiplicou a segunda equação por -1, somou com a primeira e obteve $x – y = 13$. Em seguida, isolou $x = y + 13$ e não soube continuar. Outro estudante isolou o valor da moto (y) na primeira equação e substituiu na segunda, mas não soube lidar com a equação obtida. Outro, ainda, somou as duas equações, não conseguindo continuar a resolução.

O erro do tipo γ evidencia dificuldades no transformismo algébrico, especialmente nas multiplicações e nas adições de termos semelhantes. Um exemplo é a solução em que o estudante representou o sistema, isolou o valor de y (moto) na primeira equação e substituiu na segunda, obtendo $x + 2(41 – 2x) = 28$. No próximo passo, multiplicou 2 por 41 e obteve 32, escrevendo, então, $x + 32 – 4x = 28$, o que inviabilizou todo o restante da solução.

Outros quatro estudantes representaram o sistema, isolaram o valor do carro (c) na segunda equação e substituíram na primeira, obtendo $2(28.000 – 2m) + m = 41.000$. No entanto, continuaram o processo escrevendo $56.000 – m = 41.000$, mostrando que não souberam efetuar $2(-2m)+m$. Desse mesmo tipo foi o erro cometido por dois alunos que, após isolarem o valor de c, não souberam fazer a substituição correta na primeira equação, esquecendo de somar o valor de m, obtendo $2(28.000 – 2m) = 41.000$.

No erro do tipo δ, o estudante tenta empregar uma estratégia padronizada para a resolução do sistema, mas mostra não entender a razão pela qual faz os cálculos. Como exemplo, reproduzimos a seguir a resolução de um aluno[5]:

[5] Optamos por digitar as soluções ao invés de apresentá-las em imagens porque só temos as provas fotocopiadas e o escaneamento não produziu figuras nítidas.

$2c + 1m = 41.000$ (2)
$2m + 1c = 28.000$

$4c + 2m = 82.000$
$1c + 2m = 28.000$

$5c = 110.000$

Nota-se que o aluno cancelou termos semelhantes, mesmo não sendo opostos.

Também reproduzimos outra solução semelhante, em que o aluno mostrou mais de um tipo de dificuldade relacionada com as operações algébricas:

$2c + m = 41.000$
$c + 2m = 28.000$

$c + m = 13.000$

$2(13.000 – m) + m = 41.000$
$-2m + m = 41.000 – 26.000$

$-m = 15.000$
$m = 15.000$

Vê-se, então, que o aluno subtraiu o menor do maior, não levando em conta que estava operando sobre equações. A seguir, tendo isolado o valor de c, substituiu na primeira equação e não se preocupou com o fato de que tinha obtido o oposto de *m*, simplesmente tirando o sinal e considerando *m* = 15.000.

Outro erro do mesmo tipo foi cometido pelo aluno cuja resolução reproduzimos a seguir:

$$\begin{array}{l} 2x + y = 41.000 \\ x + 2y = 28.000 \\ \hline 3y = 69.000 \\ y = 23.000 \end{array}$$

Neste caso, o aluno somou as equações, mas eliminou os termos em *x*, mostrando que lembrava de um padrão de resolução de sistemas, mas não tinha compreendido que só funcionava se os termos semelhantes fossem opostos.

O erro do tipo ε, cometido por apenas um estudante, evidencia o problema da incompreensão do significado do “passar para o outro lado”, expressão empregada como um “macete” para a resolução de equações. A partir de $2x + y = 41.000$, o aluno tentou isolar y, escrevendo $y = 20.500 - x$. Ou seja, “passou” x para o segundo membro, mas dividiu *41.000* por *2*.

Finalmente o erro do tipo θ, com quatro ocorrências, consiste em resolver por tentativa o sistema. Um aluno partiu de um sistema mal representado matematicamente, pois escreveu: *2 carros + 1 moto = 41.000 e 2 motos + 1 carro = 28.000*. Então supôs que o carro valesse 18.000 e escreveu: *2 carros a 18.000 x 2 – 41 = 5.000*. Da mesma forma, supôs o valor de 10.000 para a moto (talvez tendo obtido os valores na prova de outro colega) e escreveu: *2 motos 10.000 – 28.000 carro = 18.000*. Além da linguagem incorreta, o aluno não tentou resolver por adição ou substituição, apenas fez uso desses valores obtidos. Outros três estudantes, que também resolveram por tentativa, escreveram corretamente o sistema e, após, comprovaram, por substituição em cada uma das equações, os valores que supuseram para as incógnitas.

Considerações sobre a análise das produções dos alunos

Nas Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2002) são identificadas três grandes competências a serem desenvolvidas pelos alunos desse nível de ensino:

representação e comunicação; investigação e compreensão; contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural. Na explicitação dessas competências, é indicado que o aluno deve ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações, sendo citado, como exemplo, "transformar situações dadas em linguagem discursiva em esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, fórmulas ou equações matemáticas". (p. 114).

Neste artigo, analisamos as produções de alunos calouros ao resolverem uma questão em que deveriam transformar uma situação real em um sistema de equações e, na sua resolução, deveriam interpretar os símbolos empregados, a saber, as letras que representam as incógnitas (os valores dos carros e das motos). No entanto, pelas resoluções apresentadas, notamos que muitos desses estudantes ainda apresentam dificuldades no uso da simbologia necessária a um aluno de Cálculo Diferencial e Integral ou de Álgebra Linear.

Os estudantes que representaram o sistema por $\begin{cases} C1 + C2 + M1 = 41.000,00 \\ M1 + M2 + C1 = 28.000,00 \end{cases}$ parecem estar ainda muito fixados nas particularidades de cada situação real. Efetivamente, um estabelecimento pode vender carros e motos de marcas e preços distintos, mas se foi indicado no problema que os carros têm o mesmo preço (bem como as motos), o solucionador precisa usar esse dado para ter um ponto de partida para a simbolização, caso contrário terá um sistema de duas equações com quatro incógnitas.

Essa habilidade de transformar uma situação dada em linguagem discursiva em um sistema de equações lineares é um passo anterior a qualquer manipulação algébrica que venha a ser feita na resolução e, pelas nossas experiências com problemas de Cálculo Diferencial (por exemplo, taxas relacionadas ou otimização), temos notado que essa é a primeira dificuldade que o calouro apresenta na sua resolução. Portanto, os dados da análise da questão apresentada neste artigo podem sugerir, também, discussões sobre outras habilidades não necessariamente relacionadas à representação e resolução de um sistema de equações, mas de qualquer problema que possa ser modelado matematicamente.

A síntese dos livros de Ensino Fundamental mostrou que o estudo de equações e sistemas de equações lineares é desenvolvido desde a 6ª série e que, portanto, alunos ingressantes em um curso superior deveriam dominar a modelização do problema e o uso dos métodos de resolução.

O estudo do tema nos livros de Álgebra Linear aprofunda os tópicos que já foram apresentados no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, caso o aluno tenha estudado matrizes, determinantes e sistemas de equações nesse último nível de ensino. De qualquer forma, no estudo de operações elementares sobre linhas ou colunas de uma matriz, por exemplo, o aluno apenas estará revisitando os princípios aditivo e multiplicativo já vistos anteriormente.

Na categorização das respostas dos participantes da pesquisa, as classes A e B mostram produções de estudantes que modelam o problema dado por um sistema de equações e sabem resolvê-lo. A classe D indica aqueles que não adquiriram a habilidade de representar o problema por duas equações lineares e, portanto, não têm sequer o sentido do símbolo. Assim, é na classe C, em que estão agrupados os casos em que o estudante identificou que o problema poderia ser modelado por um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, corretamente expressas, mas não soube resolvê-lo, que nos detivemos na análise das resoluções apresentadas.

Os alunos cujas resoluções se enquadram nessa categoria parecem ter uma das componentes do sentido do símbolo, reconhecendo a forma apropriada de representar o problema, mas não têm o sentido da estrutura, pois não parecem reconhecer o método adequado para a solução nem as manipulações algébricas possíveis ou utilizáveis.

Dos exemplos de resoluções da classe C, consideramos como evidências claras de falta de sentido da estrutura aquelas produções em que os estudantes têm dificuldades em utilizar o princípio multiplicativo para determinar equações equivalentes que, somadas, permitem cancelar termos semelhantes e isolar uma das incógnitas. Afinal, sendo esses procedimentos desenvolvidos desde a 7ª série, como vimos nos livros-texto citados, o fato de não haver o reconhecimento da possibilidade de obter termos semelhantes por meio de operações elementares inviabiliza a resolução do sistema de equações e, em nosso entender, caracteriza um obstáculo ao estudo de disciplinas matemáticas em cursos superiores.

Conclusões

Com este artigo, apresentando um recorte de uma pesquisa sobre erros cometidos por estudantes calouros de disciplinas matemáticas, nosso objetivo foi mostrar que a análise da produção escrita pode ser enfocada sob vários aspectos. Com um conjunto de 138 resoluções, foi possível relacionar conteúdos estudados no Ensino Fundamental, presentes em avaliações de larga escala aplicadas no Brasil e em livros-texto desse nível de ensino, a conceitos apresentados por pesquisadores da área da Psicologia da Educação Matemática, tais como "sentido do símbolo" e "sentido da estrutura".

Na análise das resoluções de estudantes de qualquer nível de ensino a questões de testes, seja em avaliações de larga escala ou em projetos de pesquisa que enfocam dificuldades com conteúdos específicos, consideramos que não basta apontar os erros cometidos, sem discuti-los à luz de teorias sobre ensino e aprendizagem. De maneira geral, há muitas publicações que enfocam erros em resoluções de estudantes, ainda que não explicitem a palavra "erro", mas mencionem dificuldades ou problemas; no entanto, as avaliações continuam a detectar as mesmas dificuldades e não são, em geral, aprofundadas as suas causas. Se tivermos condições de realizar outras pesquisas e discuti-las sob o enfoque de novos constructos teóricos, como os que têm sido apresentados por pesquisadores do ensino e da aprendizagem da Álgebra escolar, talvez possamos estabelecer relações entre a forma de ensinar um determinado conteúdo (como equações e sistemas de equações lineares) e as produções dos estudantes ao resolver problemas sobre tal conteúdo. É com esse objetivo que procuramos, neste texto, trazer os conceitos de "sentido do símbolo" e "sentido da estrutura" e aproximá-los às resoluções de um sistema de equações, apresentadas por alunos ingressantes em cursos universitários que já deveriam ter domínio desse conteúdo e das habilidades necessárias para a resolução do problema.

Referências

ANTON, H.; BUSBY, R. C. **Álgebra Linear Contemporânea**. Porto Alegre: Bookman, 2006.

ARCAVI, A. Developing and using symbol sense in mathematics. **For the Learning of Mathematics**, v. 25, n. 2, p. 42-47, July 2005.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1979.

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim**. São Paulo: FTD, 2002a. v. 6.

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim**. São Paulo: FTD, 2002b. v. 7.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + Ensino médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf> . Acesso em 30 jul. 2008.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matriz de Referência de Matemática da 8ª série do Ensino Fundamental**. 2007. Disponível em: <http://provabrasil.inep.gov.br/index.php?option=com_wrapper&Itemid=148>. Acesso em 20 jul. 2008.

BURIASCO, R. L. C.; SOARES, M. T. C. Avaliação do rendimento em Matemática nas escolas do Paraná: estudo descritivo da prova da 4ª e 8ª séries do ensino fundamental. **Estudos em Avaliação Educacional**, v. 18, n. 38, p. 85-109, set./ dez. 2007.

CURY, H. N. Análise de erros em disciplinas matemáticas de cursos superiores In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2006, Águas de Lindóia. **Anais...** Recife: SBEM, 2006. 1 CD-ROM.

CURY, H. N., BISOGNIN, E. Calculando o volume de um sólido: como a análise de erros pode auxiliar professores a elaborar atividades de ensino para calouros de engenharia In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, n. 34, 2006, Passo Fundo. **Anais...** Passo Fundo: Abenge, 2006. 1 CD-ROM.

CURY, H. N., MOTTA, C. E. M. Análise de erros e raiz da soma de reais: como superar a sobregeneralização? In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 3., 2006, São Paulo. **Anais...** São Paulo: PUCSP, 2006. 1 CD-ROM.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática**. São Paulo: Ática, 2002a. v. 6.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática**. São Paulo: Ática, 2002b. v. 7.

DREYFUS, T.; HOCH, M. Equations: a structural approach. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, Bergen, Norway. **Proceedings…** Bergen: PME, 2004. v. 1, p. 152-155.

HOCH, M.; DREYFUS, T. Structure sense in high school Algebra: the effects of brackets. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, Bergen, Norway. **Proceedings…** Bergen: PME, 2004. v. 3, p. 49-56.

LAY, D. C. **Álgebra Linear e suas aplicações**. 2. ed. Rio de janeiro: LTC, 1999.

LINCHEVSKI, L.; LIVNEH, D. Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. **Educational Studies in Mathematics**, v. 40, n. 2, p. 173-196, 1999.

PIERCE, R.; STACEY, K. Monitoring progress in algebra in a CAS active context: symbol sense, algebraic insight and algebraic expectation. **International Journal for Technology in Mathematics Education**, v. 11, n.1, p. 3-11, 2004.

RIO GRANDE DO SUL. Secretaria da Educação. **Boletim Pedagógico de Avaliação da Educação**: SAERS 2007. Juiz de Fora: UFJF, 2007. Disponível em: <http://www.technainformatica.com.br/projetos/saers/#menuClick('paginas/boletins.htm')> . Acesso em 29 jul. 2008.

Aprovado em outubro de 2008
Submetido em agosto de 2008