Bolema, Rio Claro (SP), Ano 22, nº 33, 2009, p. 23 a 50

ARTIGOS

Avaliação Externa do Projovem: o caso de áreas e volumes

External Evaluation of the Projovem Program: the case of areas and volumes

Abraão Juvêncio de Araújo[1]
Marcelo Câmara dos Santos[2]

Resumo

Esse trabalho tomou por objetivo analisar o comportamento dos alunos do Programa ProJovem[3] na resolução dos itens do Exame Nacional Externo[4], realizado em 2007, sobre as grandezas geométricas área e volume. Além das respostas dos alunos, foi realizada também a análise praxeológica do Manual do Aluno do Programa[5] sobre tais grandezas. Os resultados, além de mostrarem um desempenho bastante sofrível, por parte dos sujeitos, permitem perceber que eles apresentam muitas dificuldades em construir significado para o enunciado dos problemas. Pode-se perceber a forte tendência em não buscar se apropriar destes significados. De fato, sempre que as alternativas permitem, a estratégia privilegiada por eles consiste em efetuar uma operação com os dados numéricos do problema. Uma hipótese explicativa para tais dificuldades pode estar no trabalho desenvolvido no Manual do Aluno, na medida em que os resultados da análise praxeológica mostram que as técnicas previstas para realizar os diferentes tipos de

[1] Professor do Colégio de Aplicação da UFPE. Rua Acadêmico Hélio Ramos, S/N, Cidade Universitária, Recife-PE, 50.000-000, E-mail: abraaojaraujo@hotmail.com.

[2] Professor do Colégio de Aplicação, do Programa de Pós-Graduação em Educação e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Rua Acadêmico Hélio Ramos, S/N, Cidade Universitária, Recife-PE, 50.000-000. E-mail marcelocamaraufpe@yahoo.com.br.

[3] O Programa Projovem contempla jovens que não obtiveram o ensino fundamental, que não tenham vínculo empregatício e que morem em capitais de estados brasileiros.

[4] Trata-se de um exame de certificação, em que o aluno do Projovem se habilita a receber o certificado de ensino fundamental.

[5] O Projovem conta com material didático próprio, composto de quatro unidades de estudo.

tarefas propostas são deixadas para serem elaboradas ou sistematizadas pelo próprio aluno.

Palavras-chave: Educação Matemática. ProJovem. Praxeologia. Áreas. Volumes. Avaliação.

Abstract

The objective of this study was to analyze the behavior of students in the ProJovem Program[6] in the solution of items on the National External Examination[7], carried out in 2007. The mathematical subjects considered were area and volume. In addition to the students' answers, praxiological analysis the Students' Program Manual[8] on these topics was also carried out of. The results, in addition to showing very poor performance on the part of the students, also show that they have many difficulties in constructing meanings for the statement of the problems. It can be noted that they generally do not make an effort to construct these meanings. In fact, whenever possible, they privilege the strategy of effecting an operation with the numerical data of the problem. One hypothesis for such difficulties might be in the work developed in the Students' Program Manual, as the results of the praxiological analysis show that the elaboration and systematization of the techniques students are expected to use to carry out the different types of tasks are left to the students themselves.

Keywords: Mathematics Education. ProJovem. Praxiology. Areas. Volumes. Evaluation.

Apresentação

As avaliações em larga escala podem apresentar resultados bastante úteis para o processo de ensino e aprendizagem, desde que não se limitem a apenas indicar se a situação está ruim, melhorou ou piorou. Mais do que isso, trata-se de um momento importante na medida em que pode nos possibilitar o acesso ao que o aluno está mostrando como conhecimento construído, por meio das estratégias que ele adota no processo de resolução de problemas.

Nesse trabalho, nosso objetivo foi de buscar esse conhecimento, tomando como meio de acesso as estratégias elaboradas pelos sujeitos na

---

[6] The Projovem Program contemplates young that had not gotten basic education, that does not have employment bond and that they live in capitals of Brazilian states.

[7] One is about a certification examination, where the pupil of Projovem if qualifies to receive the certificate from basic education.

[8] Projovem counts on proper, composed didactic substance of four units of study.

resolução de problemas envolvendo as grandezas geométricas áreas e volumes, e identificando, também, a praxeologia presente no Manual do Aluno do Programa ProJovem. A escolha desses objetos de aprendizagem se deu por diferentes motivos. Em primeiro lugar, trata-se de conhecimentos escolares que estão presentes de forma importante tanto no cotidiano de nossos alunos como no trabalho com outras disciplinas e áreas de conhecimento. Em segundo lugar, tiramos nossa motivação de trabalhos dessa natureza realizados anteriormente, mas com alunos em processo de escolarização regular, em avaliações em larga escala, realizadas no estado de Pernambuco (SOUZA e CÂMARA, 2005).

Além disso, diversos estudos têm mostrado as dificuldades que os alunos enfrentam no trabalho com as grandezas geométricas. Em grande parte, essas dificuldades aparecem ligadas ao próprio trabalho de sala de aula com esses objetos de ensino. Por exemplo, a ênfase dada em sala de aula ao trabalho com os aspectos numéricos, particularmente com fórmulas, leva o aluno a dificuldades em construir as idéias de perímetro, área e volume como grandezas (CÂMARA, 2000). É o caso de alunos que costumam confundir a área de uma figura (que é uma grandeza geométrica) com a medida dessa área (que é um número real positivo), afirmando, freqüentemente, que um quadrado tem área 36, e não que a medida da área desse quadrado é 36. Ou ainda, a falta de atividades em que os alunos sejam levados a comparar grandezas, sem medi-las, etc.

Para isso, nos parece de fundamental importância olhar o erro do aluno sob uma nova ótica, de certa forma contrária àquela normalmente adotada na maioria de nossas salas de aula, quando se fala em avaliação. Em outras palavras, é necessário considerar o erro do aluno não como uma “falta de conhecimento”, mas como “um certo conhecimento”, muitas vezes cristalizado, mas que se mostra inadequado a certas situações. Evidentemente poderíamos tratar grande parte desses erros como a manifestação de obstáculos, no sentido de Brousseau (1983), mas as limitações desse texto nos obrigam a deixar essa discussão para outra ocasião.

Dessa forma tomamos como eixo desse nosso trabalho o estudo dos erros cometidos pelos alunos do Programa ProJovem na resolução de problemas relativos às grandezas geométricas no Exame de Avaliação Externa, e as possíveis relações entre esses erros e as atividades propostas no Manual do Aluno do Programa. A idéia subjacente que permeia nosso estudo é, de certa maneira, na direção de fazer avançar experiências de aprendizagem em matemática. Como diz Cury (2007), o estudo dos erros poderia proporcionar chaves sobre quais estratégias resultam mais convenientes na hora de levar adiante o processo de ensino e aprendizagem em matemática.

O Programa Projovem

O ProJovem – Programa Nacional de Inclusão de Jovens, é diretamente ligado à Presidência da República, e destina-se a executar ações educacionais que propiciem aos jovens com idade entre 18 e 24 anos – que tenham cursado a 4ª série mas não tenham concluído o Ensino Fundamental, e não possuam vínculos empregatícios formais – a conclusão dessa etapa de escolaridade, além de buscar um incremento de sua qualificação profissional inicial. É um Programa que se desenvolve nas capitais dos estados brasileiros. Além de contarem com material específico, os alunos do Programa se submetem a avaliações de rendimento que, ao final do curso, permitirão a sua certificação.

Ao ingressarem no Programa, os jovens passam por uma avaliação diagnóstica, de caráter censitário, que afere sua proficiência em Língua Portuguesa e Matemática, com o objetivo de orientar o trabalho dos docentes. Em uma segunda etapa, é realizado um processo avaliativo intermediário, de caráter amostral. Essas avaliações são concebidas na escala do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica. Além delas, os jovens matriculados no Programa passam por verificações internas de desempenho, de caráter formativo. Por fim, eles são submetidos ao Exame Final Nacional Externo, cujo objetivo é identificar o nível de proficiência alcançado por eles no decorrer do Programa. É nessa dimensão que se situa nosso trabalho, tendo sido analisado o resultado de 21 110 provas.

No caso de matemática, esse exame externo constou de cinco instrumentos, com 16 questões de múltipla escolha (com quatro alternativas), baseadas em descritores de uma Matriz de Referência. Em nosso trabalho, adotamos para o estudo um único descritor da matriz, o de número 11, que explicita: *Resolver problema envolvendo o cálculo da medida de perímetros, de áreas e volumes*. Na montagem das provas desse exame, buscou-se não somente traduzir, em termos de itens, esse descritor, mas, também, considerar a abordagem dos conceitos presentes no Manual de Estudo dos Alunos.

Isso nos levou a investigar também esse Manual. Para tanto realizamos a análise praxeológica, que explicitamos a seguir.

Análise Praxeológica do Manual do Aluno

Tomamos por base a teoria antropológica do didático, proposta por Chevallard (1999) para determinar as praxeologias matemáticas e didáticas. A análise da *praxeologia matemática* visa determinar a realidade matemática existente no Manual do Aluno (MA), em termos de *tipos de tarefas* (T) a serem cumpridas por meio de *técnicas* (τ), justificadas por *tecnologias* (θ) que são, em última instância, legitimadas pela *teoria* (Θ) das grandezas e medidas. O bloco formado pelos tipos de tarefas (T) e pelas técnicas (τ) designa o ***saber-fazer***, enquanto que o bloco formado pela tecnologia (θ) e pela teoria (Θ) designa o ***saber***. Por outro lado, a análise da *praxeologia didática* visa estudar a maneira como a praxeologia matemática se realiza, no MA, em termos dos seguintes momentos didáticos: o do primeiro encontro do aluno com a organização matemática; o da exploração dos subtipos de tarefa e elaboração de técnicas; o da constituição do ambiente tecnológico e teórico; o do trabalho da técnica; o da institucionalização; e o da avaliação.

Analisando a organização existente no MA, verificamos que as grandezas e medidas são desenvolvidas em 5 unidades, assim intituladas: **Medidas**, que trata da noção de comprimento destacando algumas de suas unidades de medidas; **Grandezas e medidas**, que explora alguns aspectos das noções de área, comprimento (perímetro) e massa; **Entendendo as medidas de volume**, que aborda essa noção destacando algumas relações existentes entre suas unidades de medidas; **Expressando áreas algebricamente**, que enfoca a construção de fórmulas para o cálculo da medida de áreas de retângulos, paralelogramos e triângulos; **Continuando com as áreas**, que aborda o trabalho de construção das fórmulas para o cálculo da medida das áreas de trapézios e de polígonos irregulares.

Uma primeira observação a ser feita está relacionada à grandeza massa. Embora logo no começo da unidade denominada "Grandezas e medidas" seja dito que o aluno "terá condições de trabalhar as grandezas área, comprimento e massa, além de algumas formas de medi-las", no texto, a única referência, implícita, existente em torno do conceito de **massa** é encontrada numa atividade em que se pede para o aluno calcular a *quantidade de reboco* a ser utilizada nas paredes de alguns ambientes que aparecem representados no desenho da planta baixa de uma casa.

Uma segunda observação está relacionada ao fato de que dentre as provas analisadas, apenas uma contemplou item que estaria relacionado à noção de perímetro. O contexto escolhido tratou da determinação do comprimento total de rodapé a ser aplicado em dois cômodos de uma residência. Dessa forma nos limitamos a apresentar os resultados das análises praxeológicas (matemáticas e didáticas) dos conceitos de área e volume.

Análise

Para a análise, dividimos os itens em dois grupos, de acordo com a grandeza geométrica que está sendo explorada. Para cada uma delas apresentamos a praxeologia adotada no Manual do Aluno (MA), com o objetivo de buscar relações entre os elementos apresentados nesse manual e as produções dos sujeitos no exame. No total foram analisadas oito questões, sendo quatro envolvendo áreas e quatro envolvendo volumes.

A análise será apresentada em dois blocos, um relativo a área e outro a volume. Para cada um deles será identificada a praxeologia presente no Manual do Aluno, seguida do resultado obtido pelos sujeitos em cada uma das questões. Ao final de cada bloco será realizada uma síntese da análise.

Áreas

A *organização matemática* proposta no Manual do Aluno para a aprendizagem do conceito de área se realiza em torno dos seguintes *tipos de tarefas*: T_1: Calcular a área de retângulos; T_2: Calcular a área de paralelogramos; T_3: Calcular a área de triângulos; T_4: Calcular a área de trapézios; T_5: Calcular a área de polígonos irregulares.

As técnicas esperadas que o aluno mobilize para realizar esses tipos de tarefas são: τ_0: Contar quadradinhos de uma unidade de área; τ_1: Aplicar a fórmula $A = b \times h$, onde *b* é a medida da base e *h* é a medida da altura; τ_2: Aplicar a fórmula $A = b \times h$, onde *b* é a medida da base e *h* é a medida da altura; τ_3: Aplicar a fórmula $A = \frac{b \times h}{2}$, onde *b* é a medida da base e *h* é a medida da altura relativa ao lado *b*; τ_4: Aplicar a fórmula $A = \frac{(B+b) \times h}{2}$, onde B é a medida da base maior, *b* é a medida da base menor e *h* é a medida da altura; τ_5: Somar as áreas dos triângulos obtidos por triangulação de polígonos irregulares.

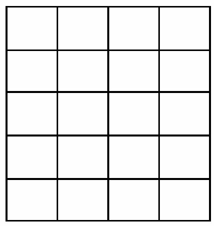
Os elementos tecnológicos destacados no texto (de forma mais ou menos explícita) para explicar e justificar a elaboração das técnicas τ_2 e τ_3 são: θ_1: Representação do desenho de um retângulo em malha quadriculada; θ_2: Idéia de que a quantidade de quadradinhos representados em linhas e colunas pode ser obtida por uma multiplicação ; θ_3: O princípio da igualdade das áreas obtidas por (de)composição de formas planas. Para elaboração dos demais tipos de tarefas, além de θ_3, utiliza-se uma das técnicas já elaboradas. Por exemplo: recorre-se à técnica τ_2 para elaborar a técnica τ_3, e à técnica τ_3 para elaborar τ_4.

A análise da *organização didática* adotada nos permite verificar que o primeiro encontro do aluno com esse conceito é programado para ocorrer na unidade “Grandezas e medidas”, por meio de uma atividade em que se analisa a funcionalidade da planta baixa de uma casa:

> Perceba também que as medidas assinaladas (na planta) permitem que consigamos medir algumas grandezas importantes, como perímetro e área. Você sabe o que são estas grandezas, lembra-se?

Este momento é seguido do momento de *oficialização* da técnica τ_4, que constitui uma ferramenta para realizar o tipo de tarefa T_4, conforme se pode observar a partir do extrato abaixo:

> Para medirmos superfícies utilizamos, dentre outras unidades, o m^2. Veja figura abaixo.

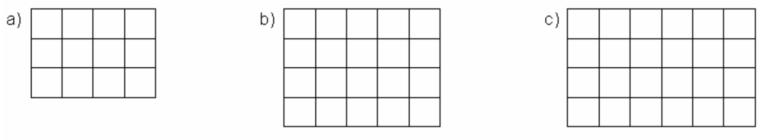


> Se um quadrado possui lados com 1m de medida dizemos que a área é $1m^2$. Sendo assim, se desejarmos saber a área do retângulo, basta contarmos quantos quadradinhos de 1m de lado cabem dentro dele".

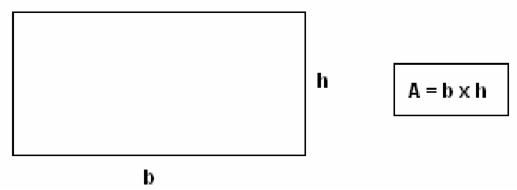
Como se pode observar, este é também o momento de constituição do ambiente tecnológico, isto é, o momento de explicitação dos elementos tecnológicos a serem utilizados na elaboração da técnica τ_0. O último momento dessa organização didática existente nesta seção consiste do *trabalho da técnica*, que se realiza por meio de dois exercícios em que se pede para o aluno calcular as áreas de algumas superfícies retangulares (terreno ou cômodos) representadas nos desenhos de duas plantas baixas.

O trabalho de exploração desse conceito se prossegue na unidade "Expressando áreas algebricamente" por meio de situações de constituição do ambiente tecnológico que permitem a elaboração das técnicas τ_1 a τ_5, enunciados acima. Contudo, o livro só apresenta o trabalho de elaboração e de sistematização da técnica $\tau_{1,}$ conforme extrato abaixo.

Em cada retângulo abaixo calcule a quantidade de quadradinhos e expresse esta quantidade por meio de uma multiplicação.



Ao contar os quadradinhos estamos calculando a área do retângulo... Perceba que você pode calcular esta área a partir de uma multiplicação. Se um retângulo possui dimensões não conhecidas **b** (base) e **h** (altura), então podemos representar esta área (A) por **b** x **h**



Nos demais casos, há um trabalho iniciado de constituição do ambiente tecnológico para elaboração das técnicas τ_2 a τ_5 cujas sistematizações são deixadas sob a responsabilidade do aluno (ou professor), como é o caso da elaboração da técnica τ_4, a ser utilizada para realizar o tipo de tarefa T_4: Calcular a área de trapézios.

O último momento dessa organização didática consiste do *trabalho das técnicas*, proposto para ocorrer por meio de uma atividade em que se pede para o aluno encontrar algumas dimensões e calcular as áreas de dois triângulos e de um paralelogramo (dados). Como no caso da grandeza comprimento, não há atividades que possam caracterizar o momento dedicado à avaliação das técnicas.

Quatro questões contemplaram a idéia de área de figuras planas. Três delas relativas ao tipo de tarefa T_1 (Calcular a área de formas retangulares) e a outra associada ao subtipo de tarefa de T_1, que consiste em "calcular o lado de um retângulo" (no caso de um quadrado) conhecendo-se sua área. Este subtipo de tarefa não é contemplado Manual do Aluno.

Questão A-1:

Nessa questão a demanda se apóia na determinação da medida da área de um dos quartos, aquele que apresenta todas as suas medidas expressas por números inteiros (embora seja utilizada a notação decimal).

A técnica τ_1 (A= **b** x **h**), que consiste em multiplicar as duas medidas explícitas (3 e 4 metros), parece ter sido a estratégia adotada por 54,3 % dos sujeitos, como mostra o quadro abaixo.

Percentual por opção de resposta

A	B	C	D	B/N
10,80 m^2	12,00 m^2	16,00 m^2	18,00 m^2	-----
11,7 %	54,3 %	19,3 %	14,5 %	0,2 %

A alternativa incorreta privilegiada (19,3 %) foi considerar o quarto com a forma quadrada, determinando a medida de sua área por meio do produto 4 x 4, obtendo 16 m^2. Essa escolha pode ser devida à atratividade da forma do quadrado, particularmente no trabalho com medidas de áreas. Em segundo lugar aparece a escolha da alternativa que apresenta 18 m^2 como a medida da área do quarto (14,5 %). A estratégia que nos parece ter sido adotada nesse caso consiste em adicionar todas as medidas explícitas que são representadas por números inteiros (4+3+4+3+4). A observação do conjunto de respostas dadas pelos sujeitos nas provas nos leva a reforçar essa hipótese.

Finalmente, a terceira alternativa incorreta adotada (11,7 %) consistiu em determinar a medida da área do outro quarto representado no suporte do item, possivelmente motivado pelo fato do aluno não ter lido corretamente as informações na planta e pensar que o segundo quarto é aquele mais distante da sala.

É importante ressaltar que, nessa questão, não aparecem alternativas que apresentem como resultado a soma das duas medidas explícitas (4m + 3m = 7m) ou delas com as duas medidas implícitas, fornecendo 14m como resultado. É preciso ressaltar também que esse tipo de tarefa (com o mesmo suporte) é bastante explorado no manual do aluno.

Questão A-2:

A segunda questão tratando do conceito de área apresenta como suporte o anúncio de venda de um terreno em que aparecem duas medidas explícitas, representadas por números inteiros, e o valor do terreno; o suporte não apresenta figura. É importante observar que, como se pode ver no enunciado abaixo, a apresentação das medidas explícitas sugere a operação a ser realizada no cálculo da medida da área.

Recebi um encarte com o seguinte anúncio:

VENDO TERRENO RETANGULAR Condomínio Mar Azul 20m X 25m

Preço total: R$ 120.000,00

Qual é a área total do terreno anunciado?

A) 45 m^2
B) 50 m^2
C) 500 m^2
D) 1200 m^2

Apesar da aparente facilidade da questão, reforçada pelos elementos presentes no suporte, apenas 34,5 % dos sujeitos mobilizaram a técnica correta, reconhecendo que as duas medidas explícitas apresentadas no suporte (20m e 25m) correspondem às medidas dos lados opostos do terreno retangular, como mostra o quadro seguinte.

Percentual por opção de resposta

A	B	C	D	B/N
45 m^2	50 m^2	500 m^2	1 200 m^2	-----
45,2 %	8,5 %	34,5 %	10,8 %	0,9 %

Podemos observar que quase a metade dos sujeitos apresentou 45 m^2 como resposta. A técnica subjacente consiste em somar as duas medidas explícitas (20m + 25m). A mobilização dessa técnica inadequada, possivelmente, resulta de uma elaboração inadequada da técnica que permite calcular área de um retângulo.

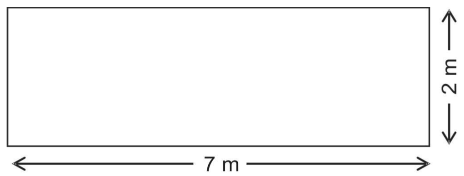
A falta de uma estratégia segura e consistente termina também por levar o sujeito a buscar no enunciado da questão elementos que se aproximem das alternativas de resposta. É o que aconteceu com 10,8 % dos sujeitos, que marcaram 1 200 m^2 como resposta. Para eles, a alternativa foi associar o preço do terreno à resposta correta.

Finalmente, encontramos 8,8 % dos sujeitos apresentando 50 m^2 como resposta. Nesse caso, fazemos a hipótese que ele efetua a multiplicação das duas dimensões do terreno para determinar a medida de sua área, mas comete um erro na multiplicação.

Questão A-3:

A terceira questão apresenta como suporte a figura de um retângulo, com duas medidas explícitas e representadas por números inteiros. Trata-se de um contexto bastante utilizado em sala de aula.

Quantos metros quadrados de grama são necessários para cobrir totalmente o jardim representado na figura abaixo?



A) 7 metros quadrados.
B) 9 metros quadrados.
C) 14 metros quadrados.
D) 18 metros quadrados.

Mais ainda que no anterior, trata-se de um contexto bastante comum no ambiente escolar e com medidas representadas por números inteiros. Apesar disso, apenas 37,9 % dos sujeitos mobilizaram a técnica adequada, como mostra o quadro seguinte.

Percentual por opção de resposta

A	B	C	D	B/N
7 m^2	9 m^2	14 m^2	18 m^2	-----
8,7 %	30,3 %	37,9 %	22,4 %	0,7 %

Da mesma forma que na questão anterior, a técnica (incorreta) que consiste em somar as duas medidas apresentadas no enunciado também foi bastante mobilizada nesse item; quase um terço dos sujeitos fizeram uso de tal técnica.

A confusão entre área e perímetro aparece de maneira evidente para quase um quarto dos sujeitos. Para eles, a figura apresentada (retângulo, dadas duas medidas) pode ter influenciado na escolha da alternativa D, qual seja, determinar a medida do perímetro da figura (18m). É importante ressaltar também que, no Manual do Aluno, as duas grandezas são trabalhadas de forma simultânea o que, segundo Câmara (1999), pode se caracterizar como uma das razões desse tipo de comportamento por parte dos alunos.

Encontramos 8,7 % dos sujeitos escolhendo, como resposta, uma das medidas apresentadas no enunciado, estratégia bastante utilizada pelos sujeitos em outros itens.

Questão A-4:

A última questão tratando do conceito de área se diferencia completamente das anteriores. O único suporte apresentado é um texto, com dimensões representadas por números inteiros. Além disso, o comando não demanda unicamente o cálculo direto da medida da área, necessitando também a determinação do lado do quadrado que apresenta a mesma área cuja medida deve ter sido determinada anteriormente.

Com a quantidade de cerâmica que Rogério possui, é possível revestir um piso retangular de 9 metros de comprimento por 4 metros de largura. Desejando revestir um piso quadrado, com essa mesma quantidade de cerâmica, qual deve ser a medida do comprimento desse piso?

A) 5 metros.
B) 6 metros.
C) 7 metros.
D) 8 metros.

A estratégia correta, adotada por um em cada quatro sujeitos, consiste em mobilizar a técnica que permite calcular a área de retângulos para, inicialmente, determinar a medida da área do piso retangular a partir das medidas explicitadas, e, posteriormente, determinar o lado de um quadrado que tenha essa mesma área. Essa estratégia implica em que o sujeito reconheça o quadrado como sendo um retângulo particular com lados iguais e cuja medida pode ser obtida calculando a raiz quadrada de 36, no caso 6.

Percentual por opção de resposta

A	B	C	D	B/N
5 m	6 m	7 m	8 m	-----
26,0 %	24,4 %	2,0 %	28,6 %	1,0 %

Também aqui, as duas estratégias incorretas mais adotadas pelos sujeitos fazem apelo a operações com os dados do enunciado. Na primeira, que obteve a preferência de 26,0 % dos sujeitos, é utilizada a subtração das medidas explícitas (9m – 4m), obtendo-se 5 metros como resposta.

Na segunda, adotada por 28,6 % dos sujeitos, podemos levantar a hipótese que a referência ao quadrado, presente no enunciado, induz o sujeito a descartar o retângulo que dá origem ao problema. Dessa forma, eles podem ter considerado "um quadrado de lado 4m" e, de acordo com a tendência observada nesse trabalho, os sujeitos tomam como tarefa "obter a área do quadrado de lado 4m", obtendo, então, 8 metros como resposta (4m + 4m).

A análise praxeológica realizada no MA nos permitiu verificar que organização matemática do conceito de área se realiza em torno da exploração de diferentes tipos de tarefas relativas ao cálculo de áreas de diferentes formas geométricas (retângulos, paralelogramos, triângulos, trapézios, além de outros polígonos irregulares), bem como da elaboração das respectivas técnicas de resolução. Contudo, neste instrumento de avaliação só foram encontrados tipos de tarefas relativas ao cálculo da área de formas retangulares. Esta opção não permite obtermos informações sobre o desempenho do aluno para realizar os demais subtipos de tarefas relativos ao cálculo da área.

Ao direcionarmos nossa análise para determinar as praxeologias do aluno em termos das estratégias adotadas, isto é, das técnicas mobilizadas pelos sujeitos durante a realização das questões relativas ao tipo de tarefa "calcular áreas de formas retangulares", deparamo-nos com uma outra limitação; nem sempre as alternativas apresentadas nas questões são elaboradas em termos de técnicas (adequadas ou inadequadas) ou tecnologias possíveis de serem mobilizadas pelo aluno no momento de resolução dos itens. Por exemplo, a confusão entre área e perímetro, que consiste em mobilizar a técnica para calcular o perímetro e somar as medidas dos lados ao invés de multiplicá-las.

Apesar dessa limitação, os resultados apresentados acima nos revelam que, nas questões em que tais alternativas estavam presentes, os percentuais de mobilização das técnicas inadequadas foram significativos – como acontece nas alternativas B e D da questão A-3 –, chegando, inclusive, a superar o percentual de acerto, como no caso da alternativa B da questão A-2. A falta de alternativas que explicitem possíveis erros, nos leva a outra hipótese, qual seja, de que nas questões em que tais alternativas não estavam contempladas entre as respostas, os sujeitos foram "obrigados" a adotarem outras estratégias, algumas delas parecendo, até mesmo, absurdas.

Volume

A *organização matemática* determinada no Manual do Aluno para a aprendizagem do conceito de volume se realiza em torno dos *tipos de tarefas* T_6 (Calcular a medida do volume de prismas retos) e T_7 (Transformar unidades de medida de volume).

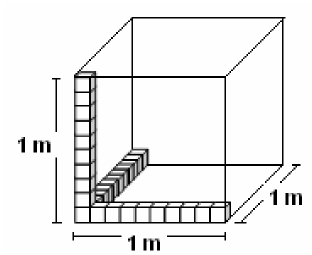
A técnica esperada que o aluno elabore (possivelmente com a ajuda do professor) para realizar o tipo de tarefa T_6 é τ_6: Volume = largura x profundidade x altura. Para tanto, são dados de forma mais ou menos explícita os seguintes elementos tecnológicos: θ_4: A representação de um cubo (por meio de um desenho) formado por vários cubinhos de dimensões menores; θ_5: A idéia de que a quantidade de cubinhos dispostos em forma cúbica pode ser representada por uma multiplicação. No caso do tipo de tarefa T_7, a técnica esperada que o aluno mobilize para resolver esse tipo de tarefa se confunde com os elementos tecnológicos que consistem das relações existentes entre metro cúbico e litro, metro cúbico e centímetro cúbico, litro e centímetro cúbico, mililitro e centímetro cúbico.

Ao analisarmos a *organização didática* existente para realizar essa *organização matemática*, verificamos que o momento do primeiro encontro do aluno com essa temática ocorre por meio de um texto que trata da necessidade dele (o aluno) se apropriar do conceito de volume, das unidades de medida de volume, das relações existentes entre as unidades de medidas de volumes, bem como sobre a forma de medi-lo. Estas informações são seguidas dos seguintes enunciados tecnológicos:

Volume ou capacidade de um corpo (ou recipiente) é a quantidade de espaço que esse corpo ocupa ou do qual ele dispõe para armazenar.

O litro é a quantidade de líquido capaz de encher completamente um cubo oco, com 10 cm de aresta.

O momento de exploração do tipo de tarefa T_6, que é também o momento de constituição do ambiente tecnológico e de elaboração da técnica τ_6 (Volume = largura x profundidade x altura), ocorre por meio das situações 1 e 2, cuja sistematização é deixada sob a responsabilidade do aluno ou professor, cf. extrato:



Situação problema I

Quando precisamos medir grandes volumes utilizamos o metro cúbico como unidade de medida e não o litro. Quantos litros cabem um 1 metro cúbico? Para responder esta pergunta, basta contar a quantidade de cubinhos de 1 litro que cabem em um cubo de 1 metro cúbico.

E mais adiante, na situação 2, em que se espera que o aluno faça a transição da técnica que permite contar a quantidade cubinhos de um cubo para a técnica que permite calcular o volume de um paralelepípedo (ver extrato).

O que é um paralelepípedo? Pesquise e discuta com seus colegas e professor(a). Muitos objetos que conhecemos possuem forma de paralelepípedo... Muitas vezes precisamos medir a capacidade desses objetos.

No caso da elaboração da técnica (τ_{11}) para realizar o tipo de tarefa T_{11}, são apresentados (de forma mais ou menos explícita) os seguintes elementos tecnológicos:

Você sabe o que é o litro? O litro é a quantidade de líquido

> capaz de encher completamente um cubo oco, com 10 cm de aresta.... Quando precisamos medir grandes volumes utilizamos o metro cúbico como unidade de medida e não o litro.

E, mais adiante,

> Para medir volumes pequenos precisamos de unidades de medidas menores, para que se consiga uma maior precisão... para medirmos quantidades menores que um litro utilizamos o mililitro. Mas o que é mililitro? Podemos dizer que mililitro é a quantidade de líquido capaz de encher completamente um cubo oco, com 1 cm de aresta.

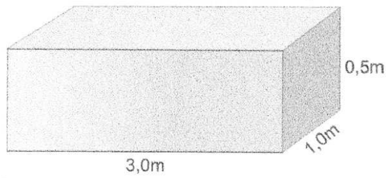
O momento do trabalho dessas técnicas é proposto para ser realizado nas atividades 8, 9 e 10.

Em todas as questões analisadas é exigida a realização sucessiva dos tipos de tarefas T_6 (calcular a medida do volume de primas retos) e T_7 (transformar uma unidades de medida de volume em outra), uma outra questão exige apenas a realização do tipo de tarefa T_6. É importante observar que em todas as questões que demandam a realização de T_7, seus enunciados apresentam de maneira explícita a relação entre metros cúbicos e litros (1 m^3 = 1 000 L).

Questão V-1:

Essa questão demanda de forma direta e exclusiva a realização do tipo de tarefa "calcular a medida do volume de prismas retos". Aqui, é apresentado como suporte a figura de um bloco retangular com duas dimensões inteiras e uma decimal, na posição em que a base é representada pela face de maiores dimensões. O contexto é de uma caixa d'água, e a forma é apresentada como "um prisma reto de base retangular".

A caixa d'água de um canteiro de obras tem a forma de um prisma reto de base retangular. As medidas usuais desta caixa d'água estão representadas na figura abaixo. Veja!



Sabendo-se que 1m³ = 1 000 ℓ, quantos litros serão necessários para encher essa caixa d'água?
A) 1 000 ℓ
B) 1 500 ℓ
C) 3 500 ℓ
D) 3 000 ℓ

A estratégia correta, adotada por 24,8 % dos sujeitos, consiste em mobilizar adequadamente as técnicas que permitem:

I. calcular a medida do volume da caixa ($3x1x0,5=1,5m^3$);
II. transformar metros cúbicos em litros, determinando como resposta 1500 litros.

Percentual por opção de resposta

A	B	C	D	B/N
1 000 L	1 500 L	3 500 L	3 000 L	-----
7,0 %	24,8 %	49,6 %	18,3 %	0,3 %

Também nessa questão, as alternativas não contemplam a mobilização de técnicas inadequadas para calcular a medida do volume do prisma, tais como somar todas as medidas explícitas. A estratégia incorreta privilegiada por 49,6 % dos sujeitos consistiu em calcular a área da base, multiplicando as duas medidas representadas (3 x 1 = 3) para, em seguida, somar com a medida da altura (3 + 0,5), obtendo 3,5 metros cúbicos, o que transformado daria como resposta 3 500 litros. Percebe-se, portanto, que no trabalho com as medidas de volume também aparece, de forma bastante forte, a tendência dos sujeitos em operarem com as medidas explícitas apresentadas no enunciado para obter a resposta.

O que nos parece diferente, em relação ao trabalho com áreas, é que no caso de volumes os sujeitos mostrariam certa tendência a efetuar algum tipo de multiplicação, enquanto com as áreas o privilégio recai na soma das medidas apresentadas. É importante destacar, mais uma vez, que nessa questão não é oferecida nenhuma alternativa de resposta que contemple a soma das três medidas apresentadas ($3 + 1 + 0,5 = 4,5\ m^3 \Rightarrow 4\ 500$ litros).

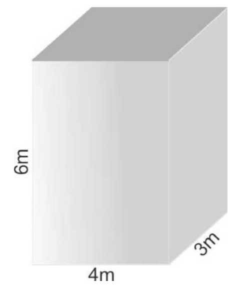
As duas outras estratégias incorretas adotadas pelo sujeitos consistem em escolher uma das medidas explícitas e aplicar a relação entre litros e metros cúbicos. Assim percebe-se que 18,3 % dos sujeitos adotaram a aresta de 3 metros e multiplicaram esse valor por 1000, obtendo 3 000 litros como resultado, enquanto 7,0 % escolheram a aresta de 1 metro para realizar o mesmo procedimento.

Uma questão que fica em aberto é como os sujeitos iriam reagir se houvesse uma alternativa representando 500 ou 5 000 litros, que estaria associado à terceira medida apresentada. Que percentual dos sujeitos escolheriam essa alternativa, particularmente pelo fato da medida aparecer na sua representação decimal?

Questão V-2:

Essa questão se assemelha bastante à anterior. O contexto também é de uma caixa d’água e também apresenta uma figura como suporte. Como diferenças, notamos que as três medidas fornecidas são números naturais, a posição do bloco apresentado na figura foge um pouco ao modelo prototípico, aparecendo com a menor face voltada para baixo, e a forma é denominada “paralelepípedo”.

Um reservatório de água tem a forma de um paralelepípedo, com as medidas representadas na figura abaixo.



Sabendo que um metro cúbico equivale a 1 000 litros, quantos litros de água podem ser armazenados nesse reservatório?

A) 12 000 litros.

B) 13 000 litros.

C) 18 000 litros.

D) 72 000 litros.

O desempenho dos sujeitos nessa questão também foi bastante baixo. Apenas 19,2% deles mobilizaram a técnica adequada, que consiste em multiplicar as três medidas explícitas (6x4x3), obtendo 72 m^3 e, em seguida, transformar metros cúbicos e litros, para obter 72 mil litros.

Percentual por opção de resposta

A	B	C	D	B/N
12 000l	13 000 l	18 000 l	72 000 l	-----
16,5 %	50,0 %	13,2 %	19,2 %	1,0 %

Nessa questão aparece como alternativa a resposta contemplando a soma das três medidas apresentadas ($6 + 4 + 3 = 13 \Rightarrow 13\ 000$ litros), o que, como havíamos previsto, atraiu metade dos sujeitos.

Da mesma forma, como dissemos na análise da questão anterior, aparece de forma bastante nítida a tendência de efetuar algum tipo de multiplicação com as medidas explícitas. De fato, podemos observar que 16,5 % dos sujeitos adotam como estratégia multiplicar as medidas 3 e 4, abandonando a terceira medida (6), enquanto 13,2 % privilegiaram a multiplicação das medidas 3 e 6, abandonando a medida 4. Esses resultados reforçam a idéia que, no caso do cálculo da medida de volumes, os sujeitos adotam a concepção que “deve ser feito algum tipo de multiplicação”; isso talvez se deva à ênfase dada na abordagem didática que privilegia as “fórmulas”, em detrimento de uma verdadeira compreensão do conceito.

É importante ressaltar que o Manual do Aluno também enfatiza sobremaneira o estabelecimento de fórmulas. Além disso, no MA, a forma do paralelepípedo é bastante explorada, com poucas situações que poderiam levar o sujeito à construção do conceito de volume.

Questão V-3:

Nessa questão nenhuma figura foi apresentada como suporte. O contexto é de uma piscina em que são dadas as suas medidas, solicitando o cálculo da medida do volume de água dessa piscina. As medidas explícitas se apresentam, duas como números naturais, e a terceira como um número decimal.

Sabendo que 1 metro cúbico equivale a 1 000 litros, quantos litros de água são necessários para encher uma piscina de 6m x 8m x 2,5 m?

A) 120 litros.

B) 1 200 litros.

C) 12 000 litros.

D) 120 000 litros.

Apesar da aparente facilidade da questão, apenas um terço dos sujeitos mobilizou a técnica adequadamente, que consiste em multiplicar as três medidas explicitadas (6 x 8 x 2,5), obtendo 120 metros cúbicos, para, em seguida, utilizar a relação de litros com m^3 para chegar à resposta esperada, 120 000 litros.

Percentual por opção de resposta

A	B	C	D	B/N
120l	1 200l	12 000l	120 000l	-----
10,0 %	25,2 %	31,7 %	32,0 %	1,2 %

Como nas questões anteriores, aqui não aparecem alternativas representando a soma de medidas explicitadas no enunciado, ou o produto de algumas delas, o que dificulta a possibilidade de levantarmos hipóteses sobre possíveis técnicas mobilizadas inadequadamente para calcular o volume deste prisma. Nessa questão, todas as alternativas foram pensadas em termos da possibilidade dos sujeitos fazerem as transformações de forma inadequada. Isto nos permite apenas levantar a hipótese de que o baixo índice de acerto, comparado aos demais, pode ter origem na transformação incorreta da unidade de volume m^3 para litro, tendo em vista que as alternativas sempre se referem a 12 multiplicado por uma potência de 10. De fato, podemos verificar que o percentual de escolhas das respostas cresce junto com o aumento da capacidade do reservatório. Assim temos, para 120 litros, a escolha de 10 % dos sujeitos; para 1 200 litros aparecem 25 % dos sujeitos, chegando a 32 % dos sujeitos escolhendo a capacidade de 12 000 litros para a piscina.

Isso nos leva a pensar que, apesar da pouca compreensão demonstrada pelos sujeitos sobre áreas e volumes, até agora, eles parecem estar levando em consideração, no momento de escolher a alternativa correta, algumas de suas experiências de vida. De fato, é bastante comum, atualmente, encontrarmos nas portas de armazéns de construção caixas de água plásticas com grandes capacidades, tais como 5 mil litros, 8 mil litros, etc. Dessa maneira nos parece que os sujeitos levam em consideração que 120 ou 1 200 litros seria muito pouco para encher uma piscina, por menor que ela seja.

Questão V-4:

Essa foi a única questão da série que explorou o volume do cubo. Não foi apresentada nenhuma figura, nem qualquer contexto articulado com o cotidiano dos sujeitos. A aresta do cubo envolvido na questão aparece na forma de número natural.

Qual a medida do volume de uma caixa na forma cúbica com 2m de aresta?

A) 2 metros cúbicos.
B) 4 metros cúbicos.
C) 6 metros cúbicos.
D) 8 metros cúbicos.

Ainda nessa questão, apesar de sua aparente facilidade, apenas 16,8 % dos sujeitos mobilizaram adequadamente a técnica que consiste em multiplicar as três medidas explicitadas (2x2x2), obtendo 8 metros cúbicos. Devemos ressaltar que o manual do aluno não contempla o trabalho com recipientes de forma cúbica.

Percentual por opção de resposta

A	B	C	D	B/N
2 m^3	4 m^3	6 m^3	8 m^3	-----
21,8 %	41,7 %	18,8 %	16,8 %	0,8 %

Neste caso, as medidas das três arestas não são apresentadas de forma explícita, o que exige dos sujeitos uma reflexão sobre o que venha a ser um cubo. Mesmo assim, somar as medidas das três arestas foi a técnica mobilizada por 18,8% dos sujeitos. No entanto, aparece como alternativa mais adotada (41,7 % dos sujeitos) a resposta 4 metros cúbicos. Podemos aqui pensar que duas estratégias estariam sendo elaboradas pelos sujeitos. Na primeira ele estaria adicionando duas das medidas explícitas. Na segunda, ele estaria fazendo o produto de duas dessas medidas, abandonando a terceira. Nossa hipótese, tendo em vista a tendência dos sujeitos demonstrada anteriormente nesse trabalho, é que a estratégia privilegiada implica na multiplicação de duas dimensões.

Em segundo lugar, em termos de estratégias elaboradas (21,8 %), aparece a resposta 2, que pode corresponder à estratégia de adotar uma única dimensão da figura geométrica, comportamento também bastante presente nos sujeitos.

A análise praxeológica realizada no MA nos permitiu verificar que organização matemática do conceito de volume se realiza em torno de exploração de tipos de tarefas relativas ao cálculo da medida do volume de prismas ortogonais retangulares e das transformações de unidades de volume, bem como da elaboração das respectivas técnicas de resolução, tarefas estas que foram contempladas neste instrumento de avaliação.

Porém, semelhantemente ao que ocorreu com tipos de tarefas relativos ao cálculo de áreas, as alternativas existentes em cada questão não favorecem a determinação, de maneira mais precisa, das praxeologias dos sujeitos em termos das técnicas mobilizadas durante a realização das questões relativas a esses tipos de tarefas. Naquelas que exigiam dos sujeitos a capacidade de mobilizar técnicas para calcular a medida do volume de prismas, bem como para realizar transformações de metro cúbico para litro, as alternativas propostas nem sempre foram pensadas de modo a favorecer a identificação de técnicas inadequadas para a realização de tais tarefas, além da correta, como por exemplo, somar as medidas das arestas. Apesar disso, os resultados apresentados nos revelam que somar as arestas parece ser uma técnica bastante mobilizada pelos sujeitos no momento de calcular a medida do volume de um prisma.

Considerações finais

Nosso trabalho tomou por objetivo analisar o comportamento dos alunos do Programa ProJovem na resolução das questões do Exame Nacional Externo. Os objetos matemáticos considerados foram as grandezas geométricas área e volume e suas medidas.

Algumas questões se destacaram, por fornecerem elementos bastante interessantes sobre o comportamento dos sujeitos, particularmente sobre as estratégias por eles adotadas e quais concepções estariam por trás destas estratégias. Elas portaram sobre os conceitos de área e volume.

Os resultados, além de mostrarem um desempenho bastante sofrível dos sujeitos, permitem perceber que os alunos do Programa apresentam forte dificuldade em atribuir significado aos enunciados dos problemas, apresentando, muitas vezes, respostas que podem nos parecer como absurdas, embora, como dissemos anteriormente, são carregadas de conhecimentos, mesmo que inadaptados.

Particularmente no trabalho com áreas, pudemos perceber a forte tendência dos sujeitos em buscar uma operação a ser realizada com os dados do enunciado. O ato de somar os dados apresentados aparece como estratégia privilegiada, quando seu resultado aparece como uma das alternativas apresentadas na questão. Os sujeitos buscam, de forma sistemática, somar as medidas apresentadas, como se estivessem determinando a medida do perímetro. Devemos ressaltar que o Manual do Aluno apresenta as duas grandezas (área e perímetro) de forma simultânea, o que tem se mostrado uma abordagem que promove diferentes dificuldades de ordem didática (CÂMARA, 2000).

No caso do trabalho com volumes, a estratégia privilegiada pelos sujeitos consiste em, na impossibilidade de somar as três medidas, escolher duas das medidas apresentadas e multiplicá-las, abandonando a terceira. Foi possível observar também que essa terceira medida rejeitada pelo sujeito geralmente é aquela que não é representada por um número inteiro.

Finalmente, tanto no caso de áreas como no caso de volumes, a terceira estratégia mobilizada pelos sujeitos consiste em apenas repetir, como resultado do cálculo da medida de áreas e volumes, uma das medidas apresentadas no enunciado do problema.

Um aspecto positivo, porém, se destacou nesse trabalho; pudemos perceber, em algumas questões, que os sujeitos buscam, em algumas situações mais próximas de seu cotidiano, mobilizar conhecimentos construídos a partir de suas experiências pessoais, como podemos ver no problema da piscina.

Uma hipótese explicativa para tais dificuldades pode estar no trabalho apresentado no MA. Os resultados das análises das organizações didáticas determinadas para o ensino das grandezas área e volume mostram que, de forma geral, as técnicas projetadas na organização matemática para realizar os diferentes tipos de tarefas propostos, são deixadas para serem elaboradas ou sistematizadas pelo aluno (ou professor). São poucas as técnicas efetivamente elaboradas e sistematizadas no MA. Outros elementos observados na análise praxeológica do MA acerca desses conceitos, e que podem estar na origem dessas dificuldades, dizem respeito ao fato de não haver, nessas organizações matemáticas propostas, tipos de tarefas relativos à comparação das grandezas área e volume, que constituem elementos tecnológicos importantes para a sua compreensão e a elaboração das respectivas técnicas de medição. De forma geral, o trabalho é planejado e direcionado para a elaboração de técnicas de medição. A falta de atenção para esses aspectos certamente pode ter sido responsável pelo comprometimento de uma aprendizagem desses conceitos de forma mais significativa.

Para encerrar, não podemos deixar de ressaltar que estudos dessa natureza, ou seja, que buscam identificar conhecimentos subjacentes a erros de alunos, não podem se encerrar em si mesmos; é fundamental, que outros estudos busquem construir, de forma adequada aos fundamentos teóricos da Educação Matemática, situações de ensino-aprendizagem que permitam fazer com que o aluno supere essas dificuldades. Porém, antes de qualquer outra coisa, é preciso que a escola, em qualquer modalidade de ensino, seja capaz de fazer com que os alunos atribuam significado aos conceitos matemáticos, pois, sem isso, qualquer tentativa de aprendizagem estará invariavelmente fadada ao fracasso.

Referências

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistemologiques et les problèmes em mathématiques. In: **Recherches em Didactiques des Mathématiques,** Grenoble, La Pensée Sauvage, v.4, n.2, p.165-198, 1983.

CÂMARA, M. Efeitos de uma seqüência didática para a construção do conceito de perímetro no 2º ciclo do Ensino Fundamental. In: **Reunião Anual da ANPED,** n. XIX, 1999, Caxambú, Anais... Caxambu: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 1999.

CÂMARA, M. Um dispositif de recherche/formation sur lês grandeurs dans Le cadre de La coopération franco-bresiliènne PROMATEMÁTICA. In XIII **Séminaires de Mathématiques de Rennes, Rennes:** Institut de Mathématiques de Rennes, pp. 122-147. 2000.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, v.19, n.2, p.221-266, Grenoble : La Pensée Sauvage, 1999.

CURY, H N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.** Belo Horizonte. Ed. Autêntica, 2007.

SOUZA, J.C.A.; CÂMARA, M. Análise de estratégias de resolução de problemas de grandezas geométricas em avaliações em larga escala de redes públicas do estado de Pernambuco. **Educação Matemática em Revista,** Recife, n.18/19. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p.79-83, 2005.

Aprovado em janeiro de 2009
Submetido em julho de 2008