Bolema, Rio Claro (SP), Ano 22, nº 34, 2009, p. 57 a 80

Proporcionalidade: estratégias utilizadas na Resolução de Problemas por alunos do Ensino Fundamental no Quebec[1]

Proportionality: problem-solving strategies used by Elementary School students in Quebec

Izabella Oliveira[2]

Resumo

Nosso estudo tem como objetivo explicitar as estratégias usadas por alunos do ensino fundamental (6ª série, 13-14 anos) no Quebec antes do ensino do conceito de proporção na escola. Mais especificamente, procuramos identificar as estratégias utilizadas pelos alunos para resolver problemas de proporção direta e inversa. Observaremos também se os alunos são capazes de identificar quais problemas são proporcionais e quais não são proporcionais. Por último, observaremos quais dificuldades aparecem quando os alunos resolvem problemas de proporção direta e inversa. Para isso, um estudo de caso foi feito com um grupo de alunos (33 alunos) de 6ª série de uma escola de Montreal no Quebec. A análise realizada mostra que os alunos utilizam diferentes estratégias para resolver problemas. Os resultados obtidos mostram também o potencial e a diversidade das estratégias utilizadas antes do ensino formal da proporcionalidade na escola e as dificuldades presentes.

Palavras-chave: Proporção. Resolução de Problemas. Ensino de Matemática.

[1] Esse estudo faz parte de uma pesquisa de doutorado mais ampla sobre práticas de ensino da proporcionalidade em relação com o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos na resolução de problemas de proporção.

[2] Professora adjunta, Université Laval, Faculté des sciences de l'éducation - Département d'études sur l'enseignement et l'apprentissage, *Pavillon des Sciences de l'éducation 2320, rue des Bibliothèques, Québec (Québec), Canadá, G1K 7P4. E-mail:* Izabella.oliveira@fse.ulaval.ca

Abstract

This study sought to determine the problem-solving strategies most used by 13- and 14-year-old 8th graders with regard to the concept of direct and inverse proportion. We also examined whether these students were able to recognize non-proportional contexts and specific challenges with regard to problem solving prior to learning the concept. Students from a Montréal, Québec Elementary School participated in this study. Our analysis revealed the used of several problem-solving strategies. The results show the potential and the diversity of the strategies employed prior to learning the concept of proportions and some of the challenges related to this concept.

Key-words: Proportionality. Problem Solving. Mathematics Instruction.

Résumé

Notre étude a comme objectif expliciter les stratégies les plus utilisées par les élèves du secondaire (secondaire 2, 13-14 ans) au Québec, avant enseignement de ce concept à l'école. Plus précisément, quelles stratégies sont utilisées par les élèves pour résoudre des problèmes de proportion directe et inverse. Nous voulons aussi voir si les élèves sont en mesure de reconnaître des situations non proportionnelles et quelles difficultés sont liées à la résolution de ces problèmes et à la reconnaissance des situations non proportionnelles. Une expérimentation a été conduite en ce sens auprès d'un groupe d'élèves de secondaire 2 provenant d'une école à Montréal au Québec. L'analyse fait ressortir une variété de stratégies de résolution mises en place par les élèves pour résoudre les problèmes. Les résultats nous montrent le potentiel et la diversité de stratégies utilisées avant enseignement et quelques difficultés qui sont présentes chez les élèves face au concept de proportionnalité.

Mots-clés : proportionnalité, résolution de problèmes, enseignement des mathématiques

Introdução

O conceito de proporção é um dos mais importantes conceitos matemáticos vistos no ensino básico. Ele é introduzido nas aulas de matemática no início do 3º ciclo (6ª série) e as aprendizagens realizadas são reutilizadas tanto em matemática como em outras disciplinas, durante toda a escolaridade. Assim, a importância da proporcionalidade no dia-a-dia, em matemática, em ciências, em economia, em ciências da saúde, em ciências humanas, é relatada por diversos autores (NUNES; SCHLIEMANN; CARRAHER, 1993, SOTO; ROUCHE, 1994, SOKONA, 1989). Muitas situações da vida cotidiana precisam do conceito de proporção para serem resolvidas/ compreendidas: aumentar uma receita, percorrer uma distância, etc.

Em Matemática, o conceito de proporção é utilizado no estudo da porcentagem (por exemplo, quando somente a porcentagem de um valor é conhecida e devemos encontrar o valor total), em geometria (no estudo da semelhança de figuras geométricas), em probabilidade, em álgebra, em estatística… Nas outras disciplinas, também podemos observar que o conceito de proporção é considerado importante. Por exemplo, em Medicina, onde algumas prescrições médicas e análises feitas em laboratórios necessitam a utilização do conceito de proporção; em Física, no cálculo de uma velocidade média, etc. Nesse sentido, muitos autores concordam com o fato de que a proporcionalidade ocupa um espaço privilegiado não somente na escola (em matemática e em outras disciplinas), mas também nas situações da vida cotidiana (LEVAIN; VERGNAUD, 1995, NUNES *et al*, 1993, SOKONA, 1989, LEVAIN, 1987, PEZARD, 1985).

> A proporcionalidade é sem dúvida um dos conceitos matemáticos mais importantes que encontramos desde o primário até o segundo grau. As suas inúmeras aplicações, nas diversas disciplinas (matemática, física, biologia, química, economia, ...) desempenham um papel vital no ensino. Também é importante mencionar a importância da utilização desse conceito no dia-a-dia. (SOKONA, 1989, p.5)

No Brasil os PCN's ressaltam a importância da aprendizagem da proporcionalidade. Diferentes pesquisas (OLIVEIRA, 2000, 2001, COSTA, 2007) feitas sobre a aquisição desse conceito e sobre a maneira como os alunos resolvem problemas de proporção em matemática mostram que os alunos apresentam uma certa dificuldade na aprendizagem desse conceito. Mas como a proporcionalidade é vista/ensinada no Quebec? O *Programa de Estudos da Escola Quebequense*[3] também ressalta a importância desse conceito na escola:

> A proporcionalidade constitui um tema fundamental em

[3] O « Programme d'études de l'école québécoise » é equivalente aos Parâmetros Curriculares Nacionais, no Brasil.

> matemática e muitos aspectos da realidade obedecem às regras da proporção. O raciocínio proporcional se revela, então, como sendo uma habilidade intelectual muito útil [...]. O desenvolvimento do raciocínio do tipo proporcional é fundamental e suas aplicações são inúmeras dentro e fora da disciplina (*referindo-se à matemática*)" (MEQ[4], 1994, p. 28-29).

Através dessa citação, podemos ver que o *Programa de Estudos* do Quebec leva em consideração diferentes aspectos para justificar a importância do ensino da proporcionalidade: primeiro, *o Programa* ressalta o fato de que a proporcionalidade "é um tema fundamental em matemática" e que está no centro da aprendizagem de outros conceitos na escola (probabilidade, porcentagem, geometria, física, biologia, artes, ...). Um outro aspecto importante levado em consideração pelo *Programa de Estudos* é a relação desse conceito com a realidade, pois "muitas situações da vida cotidiana obedecem às regras da proporção". Por exemplo, algumas situações de compra e venda, de velocidade média, etc. Podemos ver também que uma certa ênfase é dada à utilização de situações-problemas como meio para desenvolver o raciocínio proporcional.

> "O desenvolvimento do raciocínio proporcional deve ser baseado em atividades concretas, em questionamentos, em discussões, em exemplos e contra-exemplos. [...]. Dar ênfase muito cedo à aprendizagem de algoritmos pode impedir os alunos de assimilar e de aplicar corretamente os conceitos" (MEQ, 1994, p. 28).

Ora, mesmo que muitos autores e o *Programa de Estudos* do Quebec reconheçam a importância do raciocínio proporcional em matemática e em outras disciplinas (SOKONA, 1989, VERGNAUD, 1991, LEVAIN; VERGNAUD, 1995, OLIVEIRA, 2000, MEQ, 1994, 2003), e mesmo que possamos interpretar, através das orientações do *Programa de Estudos,* como poderia se caracterizar o ensino da proporcionalidade no início do 3º ciclo do ensino básico no Quebec, o que acontece realmente no ensino da proporcionalidade no que se refere à aprendizagem desse conceito pelos alunos?

[4] MEQ – Ministério da Educação do Quebec

Muitas pesquisas investigaram a aprendizagem do conceito de proporção. Elas nos permitiram identificar as estratégias desenvolvidas pelos alunos na resolução de situações proporcionais (OLIVEIRA, 2000, OLIVEIRA; CÂMARA, 2001, LEVAIN, 1987, DUPUIS; PLUVINAGE, 1981, KARPLUS *et al*, 1974, NOELTING, 1978), como também alguns dos erros e dificuldades mais freqüentes. Outras pesquisas permitiram observar tanto o nível de complexidade dos problemas de proporção como as variáveis que podem influenciar os alunos na resolução desse tipo de problema (VERGNAUD, 1991, RENÉ DE COTRET, 1991).

Tendo em vista o fato de que a proporcionalidade é considerada como um conceito importante e de difícil aquisição pelos alunos, investigar como esses últimos resolvem problemas de proporção direta e inversa, no contexto do Quebec, é de fundamental importância para uma compreensão mais profunda desse conceito. De maneira geral, essa compreensão objetiva contribuir para a melhoria do ensino desse conceito nas escolas.

Para que o ensino da proporcionalidade possa evoluir de maneira a ajudar os alunos na compreensão das relações proporcionais mais difíceis, é importante que o professor possua o maior número possível de informações sobre as estratégias utilizadas pelos alunos, assim como sobre as dificuldades mais presentes. Por conseguinte, nós nos interessamos pelos dados relacionados com os seguintes aspectos: como os alunos resolvem, espontaneamente, problemas de proporção direta e inversa? Quais as estratégias de que lançam mão? Quais são as dificuldades que enfrentam? Sobre quais conhecimentos anteriores poderia se apoiar a introdução da proporcionalidade no ensino básico sem perder de vista o contexto de ensino da proporcionalidade no Quebec?

Antes de respondermos essas questões é importante discutirmos um aspecto importante das pesquisas feitas sobre o conceito de proporção. Mesmo se a literatura mostra, como nós vimos, que o conceito de proporção é importante no desenvolvimento dos alunos, tanto dentro como fora da escola, porque as pesquisas feitas em educação matemática, depois alguns anos, parece se interessar pouco a esse conceito do ponto de vista da aprendizagem do aluno? Algumas hipóteses podem ser feitas:

Primeiro, vários estudos foram feitos sobre os alunos (OLIVEIRA, 2000, OLIVEIRA; CÂMARA, 2001, LEVAIN, 1987, RENÉ DE COTRET, 1991, KARPLUS; KARPLUS; WOLLMANN, 1974, DUPUIS; PLUVINAGE, 1981, NUNES *et al*, 1993). Nós encontramos também algumas pesquisas, mais recentes, feitas sobre o ensino da proporcionalidade (GNASS, 2000, VERGNAUD, 1991) ou sobre a análise de práticas de ensino da proporcionalidade (ADJIADE; PLUVINAGE, 2007, HERSANT, 2001, 2004).

Do nosso ponto de vista, o que se passa não é um desinteresse dos pesquisadores pela aprendizagem ou ensino do conceito de proporção, mas uma mudança dos interesses dos pesquisadores em relação aos estudos feitos sobre o conceito de proporção. Uma passagem do estudos das aprendizagens dos alunos a um estudo sobre os professores e as práticas de ensino. Entretanto, esses dois lados do estudo da relação de ensino-aprendizagem da proporcionalidade, não foram analisados de maneira conjunta.

Nós consideramos que para compreender a prática de ensino de um professor sobre um conteúdo específico, não podemos separá-la do que fazem os alunos (compreensão, estratégias e dificuldades), nem antes, nem depois do ensino formal na escola. A prática de ensino constitue um momento-chave a ser levado em consideração para poder entender a maneira como os alunos resolvem problemas os problemas de proporção (OLIVEIRA, 2000). Mas o que guia o professor no seu ensino? Na busca dessa resposta desenvolvemos nossa tese de doutorado. Entretanto, no presente artigo, nós apresentaremos somente os resultados relativos as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de proporção simples antes do ensino formal da proporção em classe. Na nossa tese de doutorado, os resultados dessa análise foram usados para analisar a atividade matemática induzida nos alunos pela prática de ensino do professor[5].

Objetivo do presente estudo

O objetivo do presente estudo é de relatar, no contexto do ensino da proporcionalidade no Quebec, as estratégias utilizadas por alunos do início

[5] En uma outra ocasião, nós apresentaremos os resultados relacionados com a prática de ensino da proporcionalidade e a atividade matemática induzida nos alunos.

do 3º ciclo (6ª série) do ensino básico na resolução de problemas de proporção simples, antes do ensino formal da proporcionalidade; identificar a influência do tipo de problema (proporção direta ou inversa) proposto aos alunos em relação as estratégias privilegiadas e verificar se esses alunos reconhecem situações não proporcionais como tais.

Um segundo objetivo é de verificar se as estratégias utilizadas pelos alunos no Quebec corroboram com os dados obtidos em estudos anteriores realizados pela autora no contexto do Brasil (OLIVEIRA, 2000).

Metodologia

A partir do objetivo de relatar as estratégias utilizadas pelos alunos, um estudo de caso foi feito com uma turma de 2° ano do 3° ciclo (33 alunos entre 13 e 14 anos), antes do ensino formal da proporcionalidade no Quebec[6]. Cada aluno respondeu individualmente a um teste escrito contendo 7 problemas[7]: 3 problemas de proporção direta, 2 problemas de proporção inversa e 2 problemas não proporcionais. Os problemas foram apresentados aos alunos de maneira aleatória.

Principios que nos orientaram na construção do teste e na escolha dos problemas

A escolha dos problemas para esse teste foi feita a partir de situações tiradas de pesquisas feitas em didática da matemática[8], levando em consideração as variáveis dos problemas que são conhecidas como possíveis de influenciar a resolução e a escolha das estratégias privilegiadas pelos alunos (RENÉ DE COTRET, 1991, DUMAS; JAQUET, 2001, OLIVEIRA, 2000, CUELLO, 1994, NOELTING, 1978, KARPLUS *et al*, 1974). Como nosso objetivo não é de verificar se os alunos sabem calcular, mas o raciocínio proporcional utilizado (as estratégias espontâneas que eles são capazes de utilizar antes do ensino formal da proporção), os problemas apresentarão

[6] Esse estudo não tem a intenção de generalizar as estratégias utilizadas pelos alunos de uma classe para toda uma região, mas somente de obter um retrato das estratégias possíveis de serem encontradas no contexto específico do Quebec.

[7] O enunciado de todos os problemas serão apresentados na análise dos resultados.

[8] Nesse sentido, todos os problemas já foram experimentados em pesquisas anteriores e fizeram objeto de uma análise das resoluções dos alunos.

somente cálculos fáceis a serem realizados (números pequenos).

Problemas de proporção direta: A presença desses problemas tinha como objetivo observar as estratégias privilegiadas pelos alunos quando a relação multiplicativa entre as duas grandezas homogêneas não é óbvia (razão não inteira); nos casos em que a razão entre os números considerados não é um número inteiro, ou então quando o contexto do problema faz referência ao conceito de velocidade.

Exemplo: Em um banquete no qual se oferece uma degustação de ostras, considera-se que são necessárias 72 ostras para 6 pessoas. Quantas ostras deverão ser compradas para poder receber 17 pessoas?

Problemas de proporção inversa: Esses problemas tinham como objetivo observar quais estratégias os alunos utilizam, antes do ensino formal da proporcionalidade, para resolver um problema de proporção inversa.

Exemplo: Um carro percorre a distância entre duas cidades em 5 horas a uma velocidade de 90 quilômetros por hora. Em quanto tempo ele fará essa mesma viagem, se a velocidade média for de 75 quilômetros por hora?

Problemas não proporcionais: O objetivo desses problemas era observar até que ponto os alunos são capazes de identificar se uma situação é proporcional ou não.

Exemplo: A altura de Ophélie era de 83 cm aos 2 anos de idade e de 1,66 cm, aos 16 anos. Qual é a altura de Ophélie atualmente, sabendo-se que ela acabou de fazer 32 anos? E qual era a altura dela quando tinha 1 ano, 4 anos e 8 anos?

Algumas estratégias utilizadas pelos alunos sublinhadas nas pesquisas feitas em educação matemática

Entre as estratégias identificadas em diferentes estudos (OLIVEIRA, 2000, VERGNAUD, 1991, RENÉ DE COTRET, 1991, TOURNAIRE, 1986, NOELTING, 1978, KARPLUS *et al*, 1974), as mais frequentes são: estratégia **aditiva** (nesse caso apropriada), **busca do valor unitário**, estratégia **escalar**, estratégia **funcional**, estratégia **linear** e **grandeza intermediária**. Alguns estudos identificam também estratégias que são utilizadas pelos alunos, mas que são inadequadas (OLIVEIRA; CÂMARA, 2001, VERGNAUD,

1991, BROUSSEAU, 1981, CÔTÉ; NOELTING, 1971): estratégia **aditiva errada**, por exemplo. A utilização dessa estratégia pelos alunos, nos indica o quanto a passagem das estruturas aditivas as estruturas multiplicativas pode ser difícil para os alunos.

Nós faremos uma breve descrição de cada uma das estratégias citadas. A lista das estratégias mais utilizadas para resolver problemas de proporção simples, nos guiará na análise das estratégias utilizadas pelos alunos participando a essa pesquisa[9].

Estratégia aditiva (apropriada): Os alunos resolvem o problema adicionando várias vezes a relação estabelecida no problema, até que eles encontrem o valor solicitado.

Exemplo: Para fazer uma receita de crepe, eu preciso de 200gr de farinha de trigo, 600ml de leite, 2 ovos. Com essa receita, eu posso fazer 12 crepes. Se eu quisesse fazer 36 crepes, qual seria a nova receita?

Para fazer 36 crepes, eu preciso de 12+ 12+ 12 crepes, então eu vou precisar de:

200 + 200 + 200 = 600 g de trigo
600 + 600 + 600 = 1800 ml de leite
2 + 2 + 2 = 6 ovos

Busca do valor unitário: Os alunos resolvem o problema buscando o valor que indica a unidade. Em seguida, eles usam esse valor para responder à questão do problema.

Exemplo: Mantendo uma mesma velocidade, um carro percorre 500km em 10 horas. Quantos quilômetros percorrerá em 30 horas?

Em 10 horas, ele percorreu 500km. Em 1 hora, ele percorre dez vezes menos, então 50km e em 30 horas, ele percorrerá 30 vezes mais, ou seja, 1500km.

Estratégia escalar: Os alunos resolvem o problema através do estabelecimento do fator de proporcionalidade entre as grandezas homogêneas do problema (grandezas de mesma natureza).

Exemplo: Mantendo uma mesma velocidade, um carro percorre 500km em 10 horas. Quantos quilômetros percorrerá em 30 horas?

---

[9] É importante dizer que por causa da natureza própria a cada estratégia, nós não poderemos utilizar o mesmo exemplo (algumas estratégias funcionam localmente e serão privilegiadas em função dos números presentes no problema).

O tempo necessário para fazer a viagem é 3 vezes maior. Então, com a mesma velocidade, o carro percorrerá 1500km (a distância será 3 vezes maior que a distância inicial, 500 x 3 = 1500).

Estratégia funcional: Os alunos resolvem o problema através do estabelecimento do fator de proporcionalidade entre as grandezas não-homogêneas do problema (grandezas de natureza diferentes).

Exemplo: Mantendo uma mesma velocidade, um carro percorre 500km em 10 horas. Quantos quilômetros percorrerá em 30 horas?

A distância percorrida (500km) é 50 vezes maior que o tempo necessário (10h). Então, a nova distância percorrida será de 1500km (50 vezes mais que 30h).

Estratégia linear: Os alunos resolvem o problema utilizando uma combinação entre uma estratégia aditiva (correta) e uma estratégia multiplicativa:

Exemplo: Para fazer uma receita de crepe, eu preciso de 200gr de farinha de trigo, 600ml de leite, 2 ovos. Com essa receita, eu posso fazer 12 crepes. Se eu quisesse fazer 42 crepes, qual seria a nova receita?

Para fazer 42 crepes, eu vou fazer 3 vezes mais de crepes (36 crepes) mais 6 crepes, ou seja, a metade da primeira receita.

3 vezes mais (36 crepes)	**A metade da primeira receita (6 crepes)**
3 x 200 = 600 g de trigo	200 : 2 = 100 g de trigo
3 x 600 = 1800 ml de leite	600 : 2 = 300 ml de leite
3 x 2 = 6 ovos	2 : 2 = 1 ovo

Para 42 crepes

600 + 100 = 700 g de trigo

1800 + 300 = 2100 ml de leite

6 + 1 = 7 ovos

Busca de uma grandeza intermediária[10]: Os alunos resolvem o problema passando por uma grandeza intermediária (reconstrução de um « todo fictício ») para em seguida utilizar o valor encontrado para responder o problema.

---

[10] Essa estratégia, encontrada na resolução de certos tipos de problemas (problemas de velocidade, por exemplo) foi identificada inicialmente em Oliveira (2000). Nesse momento, havíamos chamado essa estratégia de **grandeza total**.

Exemplo: Um carro percorre a distância entre duas cidades em 5 horas a uma velocidade de 90 quilômetros por hora. Em quanto tempo ele fará essa mesma viagem, se a velocidade média for de 75 quilômetros por hora?

Com uma velocidade de 90 km/h em 5 horas o carro vai percorrer 450 quilômetros ao todo (90 x 5 = 450). Para percorrer a distância de 450km com uma velocidade de 75km/h (450 : 75 = 6), ele vai precisar então de 6 horas.

Essa análise destaca as estratégias mais utilizadas pelos alunos para resolver problemas de proporção simples. Mesmo se as pesquisas mostram que os alunos podem usar essas estratégias antes do ensino formal da proporção (OLIVEIRA, 2000, TOURNAIRE, 1986), como os alunos de uma escola no Quebec resolvem esse tipo de problema? Quais estratégias eles privilegiam? Uma resposta a essa questão ajudará na caracterização das estratégias utilizadas e das dificuldades presentes de um ponto de vista mais largo (em um contexto de ensino diferente).

Resultados

Análise das produções dos alunos

Nós apresentaremos inicialmente as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de proporção direta, seguidas daquelas usadas na resolução de problemas de proporção inversa e por fim o reconhecimento das situações não proporcionais. É importante mencionar que todos os exemplos apresentados nessa etapa foram tirados dos protocolos dos alunos e eles serão transcritos de maneira idêntica ao que os alunos escreveram.

• *Estratégias utilizadas na resolução de problemas de proporção direta*

Para ilustrar as estratégias usadas pelos alunos, nós partiremos do problema “Receita especial de suco”. Nesse problema, o aluno deverá refazer a receita levando em consideração o número de porções e a quantidade de ingredientes.

Um problema de receita
30 ml de suco de kiwi
15 ml de leite condensado
30 ml de suco de laranja
60 ml de suco de abacaxi

Misturar bem todos os ingredientes e colocar sobre o gelo triturado em um grande copo. Decorar com uma fatia de kiwi e uma cereja. Dá em média 4 porções.

a) Refazer essa receita para 8 pessoas

b) Refazer essa receita para 6 pessoas

c) Qual seria a receita especial de kiwi com 40 ml de licor de kiwi para obter o mesmo sabor?

a) receita para 8 pessoas:

Nesse problema (questão **a**), a estratégia mais utilizada pelos alunos foi a **escalar** : “para 8 pessoas, será necessário usar uma quantidade 2 vezes maior de cada ingrediente” (n=25/33)[11]:

30 x 2 = 60	60 ml de suco de *kiwi*
15 x 2 = 30	30 ml de leite condensado
30 x 2 = 60	60 ml de suco de laranja
60 x 2 = 120	120 ml de suco de abacaxi

b) receita para 6 pessoas:

Podemos ver que, quando a quantidade muda (6 pessoas ao invés de 8), as estratégias utilizadas pelos alunos também mudam. Essa mudança nos informa sobre a importância dos números presentes no problema. Assim, para a questão **b**, a estratégia mais utilizada foi a estratégia **linear** (as quantidades para 4 pessoas mais as quantidades para 2 pessoas – a metade das quantidades para a 1ª receita), (n=16/33).

Exemplo:

30 : 2 = 15	15 + 30 = 45 ml de suco de *kiwi*
15 : 2 = 7,5	7,5 + 15 = 22,5 ml de leite condensado
30 : 2 = 15	15 + 30 = 45 ml de suco de laranja
60 : 2 = 30	30 + 60 = 90 ml de suco de abacaxi

[11] O « n » representa, em todo o documento, o número de alunos que usaram essa estratégia para resolver o problema sobre o número total de alunos que participaram a essa pesquisa.

c) receita com 40 ml de suco de *kiwi*:

A influência dos números presentes no problema é confirmada, mais uma vez, na **questão c** (40 ml de suco de *kiwi* ao invés de 30 ml). Aqui, nós notamos que quando a questão muda de 30ml para 40ml, então +10, os alunos acrescentam 10 à todos os outros ingredientes (a quantidade inicial), sem levar em consideração o fator de proporcionalidade. Essa estratégia é caracterizada como a estratégia aditiva errada.

Os exemplos mostrados aqui nos permitem compreender a diferença entre uma estratégia **linear** e uma estratégia **aditiva errada.** Nos dois casos a diferença na quantidade do primeiro ingrediente é de +10 (passagem de 30 ml a 40 ml). Entretanto, quando um aluno usa a estratégia **linear,** a relação entre os ingredientes é constante (co-variação), ou seja, acrescentar 1/3 da quantidade inicial. Por outro lado, quando um aluno usa a estratégia **aditiva errada,** a quantidade +10 é acrescentada indiscriminadamente a todos os ingredientes. Aqui, a relação de 1/3 não é respeitada pelo aluno. O exemplo que segue nos possibilita ver as diferenças entre o uso de uma estratégia linear e o uso de uma estratégia aditiva errada.

Estratégia **linear** (n= 4)	**Aditiva errada** (adiciona 10 ml) (n=9)
30 : 3 = 10 + 30 = 40 ml *kiwi*	30 + 10 = 40 ml de suco Kiwi
15 : 3 = 5 + 15 = 20 ml de Amaretto	15 + 10 = 25 ml de leite condensado
30 : 3 = 10 + 30 = 40 ml de vodca	30 + 10 = 40 ml de suco de laranja
60 : 3 = 20 + 60 = 80 ml suco de abacaxi	60 + 10 = 70 ml de suco de abacaxi

Um problema de velocidade

Um carro anda sempre à mesma velocidade. Ele faz 24 km em 12 minutos ou 36 km em 18 minutos. Nesse ritmo, o carro fará 40 km em quantos minutos?

O fato que os números do problema apresentem uma relação proporcional fácil (uma razão de 1:2) e que eles sejam apresentados em 3 duplas de correspondência, provoca uma mudança, mais uma vez, nas estratégias privilegiadas pelos alunos. Para esse problema, a estratégia **funcional** (n=20/33) foi a mais utilizada:

"24 = 12 = 1/2 de 24 40 : 2 = 20

Res.: O número de quilômetros é sempre o dobro do número de minutos"

Alguns alunos (13/33) utilizaram uma estratégia de busca do **valor unitário**

"24 km em 12 min = 2 km por minuto

36 km em 18 min = 2 km por minuto"

Um problema de banquete

Nesse problema: *Em um banquete, no qual se oferece uma degustação de ostras, considera-se que são necessárias 72 ostras para 6 pessoas. Quantas ostras deverão ser compradas para poder receber 17 pessoas?*, a relação entre as grandezas de mesma natureza não é óbvia (relação proporcional). Essa relação levou os alunos a mudarem de estratégia, em comparação com os outros problemas apresentados. Na realidade, a única estratégia utilizada pelos alunos foi a busca do **valor unitário** (n=30/33), mas ele poderia ter sido resolvido através uma estratégia linear ou funcional, como nos problemas anteriores.

"72 : 6 = 12

12 x 17 = 204 resp. : 204 ostras

Res.: Dividimos o número de ostras pelo número de pessoas. Achamos assim o número de ostras por pessoa. Depois, só temos que multiplicar o número de ostras obtido por 17 pessoas."

• *Estratégias utilizadas na resolução dos problemas de proporção inversa*

A presença de problemas inversamente proporcionais faz com que apareça uma estratégia não identificada nos problemas diretamente proporcionais, ou seja, a busca de uma **grandeza intermediária**. Aqui, os alunos resolvem o problema passando por uma grandeza intermediária (reconstrução de um "todo fictício") para em seguida utilizar esse valor na resolução do problema, como nós podemos notar no exemplo a seguir:

Um problema de velocidade média

Um carro percorre a distância entre duas cidades em 5 horas a uma velocidade de 90 quilômetros por hora. Em quanto tempo ele fará essa mesma viagem, se a velocidade média for de 75 quilômetros por hora?

"90 x 5 = 450 km

450 km : 75 = 6 horas

Se ele faz 90km por hora, quer dizer que há 450 km entre as 2 cidades. Temos somente que dividir por 75 para obter a resposta." (n=19/33)[12]

Um problema de construção

No segundo problema de proporção inversa: *4 máquinas levam 300 dias para fabricar todos os tijolos que vão ser utilizados na construção de uma casa. Em quantos dias 8 máquinas fabricarão a mesma quantidade de tijolos?*, os alunos utilizaram principalmente a estratégia **escalar** (n=27/33) para resolver o problema. Mesmo se essa estratégia é normalmente usada na resolução de problemas diretamente proporcionais. Aqui, os alunos usam-na fazendo referência a um raciocínio inversamente proporcional, como nós podemos notar no exemplo que segue:

"4 máquinas = 300 dias

8 máquinas = 150 dias

8 máquinas é o dobro de 4. Então, a gente divide o número de dias em 2.

Res. : 150 dias."

O que sobressai da análise das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de proporção

De uma maneira geral, nós pudemos notar que os alunos, antes do ensino formal da proporcionalidade na escola, apresentam todo um potencial de estratégias que eles mobilizam na resolução dos problemas de proporção. Para o professor, levar em consideração essa diversidade de estratégias (estratégia escalar, linear, funcional, valor unitário, grandeza intermediária...),

---

[12] É importante mencionar que vários alunos não compreenderam a relação proporcional entre as grandezas do problema. Essa questão será abordada posteriormente.

pode ser um ponto de partida na hora de preparar uma seqüência de ensino sobre a proporcionalidade, mas o que interfere na escolha dessas estratégias?

• A escolha dos números

Os números utilizados no enunciado dos problemas (relação entre as grandezas inteiras ou decimais) parecem ter uma influência sobre as estratégias privilegiadas pelos alunos, orientando as escolhas que eles fazem. Além disso, constatamos que os alunos dispõem de muitas estratégias e que são capazes de passar de uma estratégia a outra dependendo da situação com as quais se deparam, o que nos informa sobre a flexibilidade deles na resolução de problemas.

Se a mudança nos números presentes nos problemas, nos permite identificar o potencial de estratégias dos alunos, eles nos permitem também identificar algumas das dificuldades presentes. Por exemplo, as dificuldades relativas à passagem de uma estrutura aditiva para uma estrutura multiplicativa. Quando, no problema da receita de *kiwi*, a quantidade muda de 30 ml para 40 ml, os alunos tendem a adicionar 10 aos outros ingredientes, sem levar em consideração a relação proporcional. Nas outras questões do problema, por exemplo, a passagem de uma receita de 6 para 8 pessoas, os alunos resolvem o problema respeitando a relação proporcional estabelecida (receita inicial mais a metade dessa receita, ao invés de adicionar 2 a todos os ingredientes). A utilização da estratégia aditiva errada nos mostra que os alunos têm certos conhecimentos sobre a proporção, mas que essa aprendizagem só será finalizada depois de uma passagem pelo ensino formal do conceito.

Notamos que essa dificuldade é identificada somente em situações específicas, que não fazem necessariamente parte de situações vividas no dia-a-dia. Esses resultados nos dão algumas pistas sobre questões importantes que devem ser trabalhadas em classes de 6ª série para que os alunos avancem em seus conhecimentos e superem dificuldades inerentes principalmente à relação de co-variação (aditiva errada, por exemplo).

• Os problemas de proporção inversa

A análise da resolução dos problemas de proporção inversa nos permitiu observar o uso da estratégia **grandeza intermediária**. Essa estratégia é utilizada pelos alunos somente para resolver problemas de proporção inversa.

Também pudemos notar que mesmo se esses alunos nunca tivessem estudado de maneira formal o conceito de proporção, eles seriam capazes de resolver problemas de proporção inversa apoiando-se, para isso, em estratégias próprias e de maneira consciente/ controlada. A capacidade de resolver problemas de proporção inversa, antes do ensino formal, indica-nos o potencial das estratégias desses alunos e a capacidade que eles têm de se adaptar em função do contexto e da estrutura matemática do problema.

Pudemos também observar nesses problemas que alguns alunos apresentam certa dificuldade na compreensão da relação multiplicativa (relação proporcional) própria ao problema. Essa dificuldade foi observada principalmente no problema de velocidade, no qual os alunos resolvem um problema de proporção inversa como se fosse um problema de proporção direta, sem levar em consideração as relações entre as grandezas do problema. Por exemplo:

"5h - 90 90 : 5 = 18
? - 75 75 : 18 = 4,16 horas"

No caso desse problema, os alunos não percebem que com uma velocidade menor, não é possível levar menos tempo para fazer a mesma viagem.

• *O reconhecimento de situações não proporcionais*

A maneira pela qual os alunos resolvem os problemas "não proporcionais" e as estratégias que utilizam para isso (estratégias proporcionais) indica-nos que esses alunos, dependendo do contexto, não reconhecem as situações como sendo não proporcionais.

Por exemplo, na resolução do problema sobre a **Altura de Ophélie**: *A altura de Ophélie era de 83cm aos 2 anos de idade e de 1,66m aos 16 anos. Qual é a altura de Ophélie atualmente, sabendo-se que ela acabou de fazer 32 anos? E qual era a altura dela quando tinha 1 ano, 4 anos e 8 anos?*.

Poucos alunos (8/33) reconheceram esse problema como sendo uma situação não proporcional. Esses alunos davam, por exemplo, como resposta: "Impossível, porque uma pessoa para de crescer na adolescência". Ou então, "mais ou menos 1,66m, porque uma pessoa para de crescer mais ou menos aos 16 anos". Para os alunos que não reconheceram o problema como sendo não proporcional, encontramos respostas como a seguinte: "Ophélie terá 269,75m de altura aos 32 anos."

O fato de uma tal resposta parecer aceitável leva-nos a questionar o significado que esses alunos atribuem à resolução de um problema, a como eles interpretam a resposta obtida e mais precisamente, como eles compreendem as relações proporcionais.

Na resolução do problema sobre a **receita de geléia** : *Uma receita de geléia diz que se colocarmos 4kg de morangos, temos que colocar 2kg de açúcar, ou então, se colocarmos 8kg de morangos, temos que colocar 6kg de açúcar. Se quisermos fazer a receita com 10kg de morangos, que quantidade de açúcar vamos precisar colocar?* Todos os alunos (33 alunos) identificaram esse problema como sendo não proporcional. Eles procuraram encontrar uma regularidade no problema utilizando uma regra aditiva (+2, entre a quantidade de açúcar e de morangos). A maioria das vezes, utilizaram uma tabela de valores como apoio à resolução.

Uma das explicações possíveis para que esses alunos tenham identificado esse problema como não proporcional é que eles estudaram na escola as seqüências matemáticas imediatamente antes de terem resolvido esses problemas (alguns dias antes). Dessa maneira, eles identificam mais facilmente a estrutura do problema. Porém, através dos nossos dados, não podemos indicar o que leva os alunos a identificarem o problema da receita de geléia como sendo não proporcional e a não identificar o problema da Altura de Ophélie como tal. Essa questão ainda precisa ser explorada.

Discussão

Esse estudo tinha como objetivo, em primeiro lugar, identificar as estratégias utilizadas pelos alunos de 6ª série do ensino fundamental no Quebec, antes do ensino formal da proporcionalidade na escola. Em segundo lugar, ele tinha como objetivo observar a influência do tipo de problema proposto aos alunos (proporção direta ou inversa) em relação às estratégias privilégiadas.

A análise dos dados permitiu-nos constatar que os alunos que ainda não passaram pelo ensino formal da proporcionalidade são capazes de resolver alguns tipos de problemas que apresentam uma estrutura matemática simples tanto em proporção direta quanto inversa, e cujo contexto é mais próximo do dia-a-dia. Além disso, esse estudo também nos permitiu observar o potencial e a diversidade das estratégias utilizadas por alunos. Esse dado é completado pelo fato de que os alunos apresentam uma certa flexibilidade no que se refere à escolha da estratégia a ser utilizada. Eles passam de uma estratégia a outra em função do contexto, mas sobretudo em função das relações numéricas que estão em jogo no problema.

A análise dos problemas nos permite também destacar certas dificuldades presentes nos alunos no tocante à aquisição do conceito de proporção. Por exemplo, a passagem das relações aditivas as relações multiplicativas. Essa dificuldade pode ser observada através da utilização da estratégia aditiva errada, principalmente no problema da receita *especial de kiwi*.

Uma outra dificuldade foi observada no reconhecimento de situações não proporcionais. Aqui, os alunos tratam o problema sobre a a*ltura de Ophélie* como sendo uma situação proporcional e encontram como resposta uma altura de quase 3 metros aos 32 anos. Não sendo capazes de utilizar um julgamento crítico quanto às relações proporcionais, os alunos acabam por considerar essa resposta como sendo uma resposta "possível". Nós poderíamos também abordar esse tipo de resposta como o resultado de um contrato didático no qual um cálculo matemático é sempre aceitável, no contexto escolar, embora a resposta não seja vista como possível na vida real.

Os resultados obtidos nesse estudo, realizado no contexto quebequense, vêm corroborar os resultados obtidos por Oliveira (2000) e Oliveira e Câmara (2001) em outro estudo realizado no contexto brasileiro. Isso nos mostra, de uma certa maneira, que o ensino da proporcionalidade e as dificuldades vividas pelos alunos ultrapassam o contexto específico do ensino. Esses resultados nos levam a questionar o ensino da proporção na escola e a propor algumas pistas relacionadas com a introdução desse conceito em sala de aula[13].

Levando em consideração os dois contextos de ensino, Brasil e Quebec, notamos que os alunos, de maneira geral, possuem uma grande variedade de estratégias que lhes possibilitam resolver de maneira "correta" os problemas propostos. Os dados analisados nos permitem também observar que esses alunos apresentam certas dificuldades, principalmente no que se refere à passagem das estruturas aditivas às estruturas multiplicativas e em seguida à identificação de algumas situações não proporcionais.

No que diz respeito à compreensão da proporcionalidade pelos alunos, vimos que eles apresentam diferentes estratégias para resolver problemas. Vimos também que certas situações são mais difíceis que outras. Essas informações, em nossa opinião, são de grande importância no momento de preparar as aulas relacionadas com a introdução do conceito de proporção em sala de aula.

Levar em consideração, durante a construção de uma seqüência de ensino, os conhecimentos já existentes sobre os procedimentos e dificuldades dos alunos no que se refere a um conceito matemático, poderia facilitar o avanço dos conhecimentos dos alunos. Por exemplo, se, antes de planejarmos a aula, sabemos que os alunos compreendem certos problemas de proporção simples e quais são as estratégias mais utilizadas em relação à estrutura do problema, e que, por outro lado, eles têm dificuldade em compreender certos problemas, principalmente os que não apresentam uma estrutura matemática habitualmente encontrada nos livros didáticos. Podemos, então, optar por dedicar mais tempo a esse tipo de problema (problema que apresenta maiores dificuldades) e menos tempo aos problemas mais comuns.

Seria também importante analisar as escolhas feitas pelos professores na hora de planejar uma seqüência de ensino para introduzir a proporcionalidade em classe. Sobre esse tema, temos a intenção de, em um artigo futuro, apresentar uma análise sobre a prática docente da proporcionalidade e a aprendizagem dos alunos.

---

[13] Nós somos conscientes que um estudo de caso não pode ser considerado como representativo de toda uma região. Entretanto, o fato que os resultados obtidos no quebec com 33 alunos confirmem os obtidos no Brasil com aproximadamente 120 alunos, nos levam a pensar que existe uma generalização possível entre as estratégias e as dificuldades encontradas pelos alunso nos dois contextos.

Referências

ADJIAGE, R; PLUVINAGE, F. An experiment in teaching ration and proportion. **Educational studies in mathematics,** v. 65, n. 2, 149-175: Springer, 2007.

BROUSSEAU, G. Problèmes de didactique des décimaux. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 2, n. 1, p. 37-127, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1981.

COSTA, S. **O raciocínio proporcional dos alunos do 2º ciclo do ensino básico**. 136 folhas. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2007.

CÔTÉ, B.; NOELTING, G. **Qu'est-ce qu'apprendre, comprendre, savoir?** Fonctionnement cognitif et apprentissage de la mathématique. Québec : Téléuniversité, 1971.

CUELLO, R. M. **Razão e proporção:** o processo evolutivo da compreensão dos conceitos. 121 folhas. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1994.

DUMAS, J.-P.; JAQUET, F. Les tentations de la proportionnalité. **Math-école,** n. 198, p. 33-42, Québec, 2001.

DUPUIS, C.; PLUVINAGE, F. La proportionnalité et son utilisation. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 2, n. 2, p. 165-212, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1981.

GNASS, I. **Étude du raisonnement proportionnel chez les élèves en troubles de comportement et d'apprentissage de deuxième secondaire.** 200 folhas. Dissertação (Mestado em Educação matemática) - Université du Québec à Montréal, Montréal, 2000.

HERSANT, M. **Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège**. 497 folhas. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Université Paris 7 - Denis Diderot, Paris, 2001.

HERSANT, M. Caractérisation d'une pratique d'enseignement des mathématiques: le cours dialogué. **Revue Canadienne de l'enseignement des Sciences des Mathématiques et des Technologies**, v.4, n. 2, p. 243-261, 2004.

KARPLUS, E. F.; KARPLUS, R.; WOLLMANN, W. The influence of cognitive style. **School Science and Mathematics**, n. 6, p. 476-482, 1974.

LEVAIN, J.-P.; VERGNAUD, G. Proportionnalité simple, proportionnalité multiple. **Grand N**, n. 56, p. 55 – 66, 1995.

LEVAIN, J.-P. **Faire des mathématiques autrement:** développement cognitif et proportionnalité. Paris: L'Harmattan, 1987.

LEVAIN, J.-P. Proportionnalité, agrandissement et échelle. **Petit x**, n. 31, p. 15–34, 1993.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (MEQ). **Programme d'étude de mathématiques du secondaire**, Québec: Les publications du Gouvernement du Québec, 1994.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (MEQ). **Programme d'études du secondaire**. Document de travail aux fins de validation. Québec: Les publications du Gouvernement du Québec, 2003.

NOELTING, G. **La construction de la notion de proportion chez l'enfant et l'adolescent et les mécanismes d'équilibration**. Numéro spécial de L'APAME, École de Psychologie, Université Laval, Québec, 1978.

NUNES, T.; SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. **Street mathematics and school mathematics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

OLIVEIRA, I.; CÂMARA, M. Problemas de proporção simples : o que os alunos estão errando. In: ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL DO NORTE E NORDESTE, n.15, 2001. **Anais do XV EPENN.** São Luis: (CDD: 370.981), 2001.

OLIVEIRA, I. A. F. G. **Um estudo sobre a proporcionalidade:** a resolução de problemas de proporção simples no ensino fundamental. 2000. 127 folhas. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2000.

PEZARD, M. **Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves instituteurs**. 1985. 337 folhas. Tese (Doutorado em Educação matemática) - Université Paris 7, Denis Diderot, Paris, 1985.

RENÉ DE COTRET, S. **Étude de l'influence des variables indice de proportionnalité du thème et nombre de couples de données sur la reconnaissance, le traitement et la compréhension de problèmes de proportionnalité chez des élèves de 13-14 ans**. 276 folhas. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Université Joseph Fourier, Grenoble, 1991.

SOKONA, S.-B. Aspects analytiques et aspects analogiques de la proportionnalité dans une situation de formulation. **Petit x**, n. 19, p. 5-27, 1989.

SOTO, I.; ROUCHE, N. Résolution de problèmes de proportionnalité par des paysans chiliens. **Repères – IREM**, n. 14, p. 5-19, 1994.

TOURNIAIRE, F. Proportions in elementary school. **Educational Studies in Mathematics,** n. 17, p. 401– 412, 1986.

VERGNAUD, G. **El niño, las matemáticas y la realidad:** problemas de la enseñanza de las matemáticas. México: Trillas, 1991.

Aprovado em novembro de 2008
Submetido em setembro de 2008