Bolema, Rio Claro (SP), v. 23, nº 35B, p. 537 a 561, abril 2010 *ISSN 0103-636X*

O Contexto da História da Matemática como Organizador Prévio

The Context of the History of Mathematics as Previous Organizer

José Messildo Viana Nunes[1]
Saddo Ag Almouloud[2]
Renato Borges Guerra[3]

Resumo

Este artigo consiste em uma reflexão sobre a possibilidade de uso da História da Matemática como recurso pedagógico, para introdução de conceitos matemáticos, aliada à teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel. Tal imbricação pode nos auxiliar na elaboração/organização de sequências didáticas que possam favorecer a construção do conhecimento matemático pelo próprio aluno. Nesse caso utilizamos alguns exemplos da Geometria Euclidiana como referência para apresentar nossa concepção sobre como e por que concebemos o contexto da história da matemática como um legítimo *organizador prévio*.

Palavras-chave: História da Matemática. Aprendizagem significativa. Organizador Prévio.

[1] Doutorando em Educação Matemática - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP. Endereço para correspondência: Pas. São Raimundo, 52B – Marambaia, Belém-PA, CEP 66615-120. E-mail: messildo@ig.com.br

[2] Professor Doutor do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. Endereço para correspondência: Rua Marquês de Paranaguá, 111 – Consolação, São Paulo-SP, CEP 01303-050. E-mail: saddoag@pucsp.com.br

[3] Professor Doutor do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas – PPGECM – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico – NPADC da Universidade Federal do Pará – UFPA. Endereço para correspondência: Rua Tiradentes/303. Reduto-Belém-PA. CEP: 66053-330. E-mail: rguerra@ufpa.br

Abstract

This article consists of a reflection on the possibility of using the History of the Mathematics as a pedagogical resource for introduction of mathematical concepts, allied to the David Ausubel's theory of significant learning. This overlap can help us in the elaboration/organization of didactic sequences that can favor the construction of the mathematical knowledge by the pupil himself. In this case, we use some examples from Euclidean Geometry as a reference to present our conception on how and why we conceive the context of the history of the mathematics as a legitimate previous organizer.

Keywords: History of Mathematics. Significant Learning. Previous Organizer.

Introdução

Para Ausubel, Novak e Hanesian (1980), uma compreensão genuína de um determinado assunto implica o domínio de significados claros, precisos, diferenciáveis e inclusivos. Com efeito, se o educador estiver tentando propiciar a seus discentes uma aprendizagem significativa e para isso organiza atividades que relatem os atributos relevantes de um conceito ou os elementos essenciais de uma proposição, pode organizar materiais introdutórios que explicitem as novas ideias a serem assimiladas, e expressem um alto nível de generalidade e poder de inclusão, aos quais as informações mais detalhadas possam ser relacionadas. A perspectiva epistemológica da história de conceitos matemáticos, a nosso ver, corrobora tais características.

Nesse sentido, propomos uma conjunção entre a aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos e sua trajetória histórica, evidenciando a necessidade de se trabalhar com os alunos, primeiramente, atividades que os coloquem em contato com a construção das ideias matemáticas. Postulamos que uma das formas são as investigações históricas que visam à construção epistemológica dos conceitos. A concepção de uma aprendizagem significativa utilizando como recurso pedagógico a História da Matemática, nos termos sugeridos anteriormente, é, a nosso ver, ressaltada por Lakatos (1978, p. 183), ao afirmar que "não há teoria que não tenha passado por um período de progresso; além do mais, esse período é o mais interessante do ponto de vista histórico, e deve ser o mais importante do ponto de vista didático".

A aprendizagem significativa preconiza que as ideias novas sejam relacionadas às informações previamente adquiridas pelos discentes através de uma relação *não arbitrária e substantiva*. Uma relação não arbitrária e substantiva significa que as novas informações serão relacionadas a conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva do aluno, denominados *conceitos subsunçores,* de forma que esse consiga, com interpretação própria, conceituar o objeto em estudo.

A aprendizagem significativa pressupõe, ainda, que o aluno manifeste uma disposição para tal, caso contrário ocorrerá uma aprendizagem mecânica dos conteúdos estudados. Para Moreira e Masini (1982), a ocorrência da aprendizagem significativa de um conceito está condicionada a observações de regularidades ou de diferenças e semelhanças existentes entre o novo e o antigo conhecimento.

Para tal, Ausubel (2002) nos propõe que as atividades em sala de aula podem ser conduzidas pelos princípios da *diferenciação progressiva e reconciliação integrativa* dos conceitos; tais princípios podem ser auxiliados por materiais introdutórios identificados como *organizadores prévios.* A seguir, discorreremos com mais detalhes sobre a teoria ausubeliana e sua possível imbricação com a História da Matemática.

Tipos de aprendizagem

Do ponto de vista da aprendizagem escolar, é importante distinguir os tipos principais de aprendizagens que ocorrem em classe. Apesar da diversidade existente, atentaremos para a teoria ausubeliana, que estabelece uma distinção entre a *aprendizagem por recepção* e a *aprendizagem por descoberta* e outra distinção entre *aprendizagem significativa e mecânica* (Figura 1).

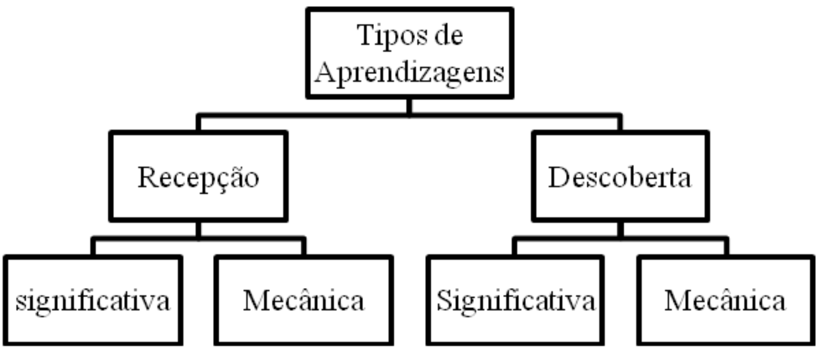

Figura1: Tipos de Aprendizagem Escolar Segundo Ausubel

É importante observar que a aprendizagem, quer seja por descoberta ou recepção, pode apresentar tanto caráter mecânico quanto significativo. Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), na aprendizagem por recepção o que deve ser aprendido é apresentado ao discente em sua forma final, enquanto que na aprendizagem por descoberta o conteúdo principal a ser aprendido é descoberto por ele. Entretanto, após a descoberta em si, a aprendizagem só é significativa se o conteúdo descoberto ligar-se a conhecimentos prévios já existentes na estrutura cognitiva, ou seja, quer por recepção ou descoberta, a aprendizagem só é significativa quando se conecta a conceitos *subsunçores*.

Aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica; materiais de aprendizagem e predisposição para aprendizagem

Segundo Ausubel (1976), a aprendizagem significativa consiste em relacionar, de forma não arbitrária e substantiva (não ao pé da letra), uma nova informação a outra com a qual o aluno já esteja familiarizado. Caso contrário, se a tarefa consistir em associações puramente arbitrárias com a exigência que o aluno reproduza exatamente o que lhe foi "ensinado", a aprendizagem é caracterizada por Ausubel como mecânica. Assim, quando apresentamos aos discentes a fórmula da área do círculo $A_c = \pi r^2$ sem fornecer uma justificativa conceitual e contextual, como, por exemplo, a perspectiva histórica[4], para tal relação, esta pode ser utilizada de forma mecânica. Por outro lado, a contextualização histórica que originou a fórmula em questão poderá culminar na compreensão e consequente aprendizagem significativa da área do círculo.

Ademais, é importante ressaltar que a aprendizagem mecânica, em determinados momentos, é tão importante quanto a aprendizagem significativa. O próprio Ausubel admite existir um c*ontinuum* entre as duas formas de aprendizagem. Em Matemática, podemos perceber a existência deste *continuum,* visto que constantemente lidamos com cálculos mentais, símbolos

[4] Podemos abordar a origem da constante π no cálculo da área do círculo feito pelos egípcios, babilônios e método da exaustão de Arquimedes, semelhanças e razão de semelhança entre áreas de figuras planas.

que representam números, os nomes de conceitos como, por exemplo, "área é a medida de uma superfície" (IMENES; LELLIS, 1998, p. 33) e objetos particulares como quadrado, retângulo, círculo; fórmulas, que após serem internalizadas servirão de subsunçores, dando suporte à aprendizagem significativa.

Moreira e Masini (1982) destacam a importância da aprendizagem mecânica principalmente quando os indivíduos adquiriram informações numa área de conhecimento completamente nova para eles, ou durante o processo de aquisição de conceitos pelas crianças pequenas. Em determinadas situações, algumas proposições não podem ser aprendidas significativamente. Na verdade, desde muito cedo nos apoiamos em aprendizagem mecânica para adquirirmos conhecimento a partir de então. Certamente todos nós podemos pensar em exemplos de conceitos que uma vez aprendemos mecanicamente para os quais mais tarde viemos a possuir estrutura conceitual que possibilitasse uma aprendizagem significativa.

> [...] muitas vezes, nossos alunos aprendem a repetir certo e rápido que $a^2 = b^2 + c^2$. Também aprendem a se lembrar dessa relação quando precisam trabalhar com triângulos retângulos. No entanto, podem levar anos para descobrir que essa relação matemática possui algum significado na forma do Teorema de Pitágoras, ou seja, apresentarem alguma compreensão além da repetição (BARALDI, 1999, p. 49).

Dependendo de uma série de fatores, um indivíduo pode oscilar, de vez em quando, entre um e outro estilo, dependendo da sua disposição para aprender. Não podemos menosprezar nem ignorar a importância da aprendizagem mecânica, pois, por vezes assimilamos significativamente determinados conceitos, e, ocasionalmente, temos que recorrer à aprendizagem mecânica para resgatá-los.

É importante ressaltarmos, também, que a elaboração do material de aprendizagem é de suma importância, levando em conta que não podemos afirmar de antemão que este seja significativo e sim potencialmente significativo. Um dos pré-requisitos que determina se a tarefa de aprendizagem é potencialmente significativa é o seu significado lógico[5]. O outro pré-requisito é a disponibilidade de conteúdo significativo na estrutura cognitiva do aluno. Quando o material de aprendizagem é internalizado pelo discente, o significado lógico passa a significado psicológico[6], o que demonstra o caráter idiossincrático da aprendizagem significativa. Postulamos que atividades que apresentem o desenvolvimento histórico de conceitos matemáticos favoreçam a passagem do lógico ao psicológico.

Com efeito, os materiais de aprendizagem podem apresentar critérios ausubelianos como *relação não arbitrária:* para isso é necessário que haja uma base adequada de conceitos *subsunçores* que os relacione de forma não arbitrária ao novo conhecimento. Um segundo critério é a *relação substantiva*: conforme tal critério, um mesmo conceito ou proposição pode ser compreendido na sua essência e expresso através de uma linguagem sinônima, sendo que a partir deste, o aluno pode ancorar novos conhecimentos que apresentem significados similares.

Se o aluno aprende significativamente o conceito de área do quadrado, ele poderá expressar sua compreensão de diversas formas, calculando, por exemplo, as áreas de qualquer retângulo, paralelogramo, triângulo e losango. A substantividade do aprendizado significa, então, que o aprendiz apreendeu o sentido, o significado daquilo que se ensinou, de modo que pode expressar este significado nas mais diversas tarefas.

Acreditamos que atividades com perspectivas históricas humanizam o estudo da disciplina, mostrando a Matemática como ciência em construção e em constante interação com outras ciências, sendo, a nosso ver, uma fonte de conhecimentos favoráveis à aprendizagem. Reconhecemos, desta forma, que recorrer à história da Matemática potencializa o aluno a internalizar o novo material de forma significativa realizando a passagem do lógico ao psicológico.

Assim, a descoberta histórica pode evidenciar o significado lógico e, por conseguinte, motivar o discente a se apropriar significativamente dos conceitos em estudo, chegando às generalizações a partir da contextualização

---

[5] O significado lógico é intrínseco ao próprio conteúdo de aprendizagem (tem significado em si próprio).

[6] O significado psicológico (real ou fenomenológico) é relativo à interpretação subjetiva que o aluno apresenta sobre o que lhe foi exposto.

das ideias, mesmo controversas, com suas "provas e refutações" que contribuíram para consolidação da Matemática que temos.

Com efeito, dar ênfase à situação problemática que deu origem a um conceito que se queira apresentar pode acentuar a lógica dos assuntos estudados, identificando também suas relações com outras disciplinas e com outros conceitos matemáticos que estejam relacionados de alguma forma ao assunto em estudo. A interpretação e a compreensão de um conceito matemático, a nosso ver, podem ser facilitadas quando, ao invés de o apresentarmos como verdade perfeita e acabada, destacarmos as ideias primeiras que originaram tais conceitos, com suas imperfeições e contínua construção.

De acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980), o conteúdo curricular, na melhor das hipóteses, pode ter significado lógico, pois sua relevância é inerente ao próprio currículo. Com efeito, cabe ao professor criar o ambiente necessário para que haja transformação do significado lógico em psicológico levando em conta uma série de fatores, como os conhecimentos prévios dos discentes, o material que será utilizado para o ensino e a disposição do aluno em aprender significativamente.

Compreender um teorema é um exemplo da relação estrita entre os significados lógico e psicológico. "No aprendizado de um novo teorema geométrico, cada uma das partes componentes já é significativa, mas a tarefa como um todo (compreender o teorema) ainda está por ser realizada" (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 42).

É importante ressaltar que a aprendizagem significativa leva em conta a dupla função dos materiais de aprendizagem significativa, visto que tais materiais podem ser entendidos tanto como o conteúdo, no caso, matemático a ser ensinado, quanto ao material pedagógico utilizado como estratégia de ensino pelo professor. No primeiro caso, devemos considerar que os conteúdos são apenas potencialmente significativos: a compreensão do material só será evidenciada quando o discente demonstrar predisposição, e também, como já foi dito, tiver adquirido conceitos relevantes em sua estrutura cognitiva. No segundo caso, é possível aumentar o potencial de aprendizagem significativa e consequentemente favorecer a passagem do significado lógico ao psicológico do conteúdo a ser ensinado, por meio da utilização de recursos pedagógicos que possam auxiliar no planejamento e na execução das atividades a serem desenvolvidas. A nosso ver, o contexto da História da Matemática contempla esta dupla função, já que o material enquanto conteúdo pode ser abordado simultaneamente ao material enquanto recurso pedagógico. De fato, o contexto em questão evidencia o significado lógico do assunto em estudo e motiva o discente a apropriar-se significativamente dos conteúdos apresentados.

Ausubel (2002) ressalta o caráter idiossincrático da aprendizagem significativa, ou seja, a predisposição para este tipo de aprendizagem. O aluno é tido como mola propulsora para ocorrência desta, visto que uma tarefa pode ser significativa para determinados alunos e mecânica para outros, dependendo dos conhecimentos prévios que estes apresentem. Muitas vezes o aluno não está familiarizado com o assunto em questão e pode utilizar a estratégia de internalizar a atividade de forma arbitrária, decorando literalmente o que lhe foi apresentado.

Sendo assim, acreditamos que o envolvimento dos alunos em atividades estruturadas baseadas na História da Matemática, explorando, descobrindo e reinventando pode contribuir para uma aprendizagem significativa, favorecendo as conexões entre informações novas e antigas.

Nossa proposição é que os alunos podem assimilar significativamente os conceitos a serem estudados, se estes descobrirem o encadeamento lógico na construção do conhecimento matemático. As situações-problema apresentadas em contextos históricos podem favorecer o processo de aprendizagem significativa, esclarecendo aos discentes sobre o significado epistemológico de determinado conceito, sem fornecê-lo arbitrariamente; além disso, podem motivar e, consequentemente, predispor os discentes a realizarem as atividades. Para tal podemos, por exemplo, organizar atividades pelas quais possamos analisar os procedimentos utilizados pelos egípcios ao buscarem a transformação de triângulos e trapézios em retângulos dando origem à ideia da busca de uma comparação entre áreas, além de apresentarem um resquício de demonstrações matemáticas (BOYER, 2003).

Tipos de aprendizagem significativa

Em situação de ensino e aprendizagem, em âmbito escolar, Ausubel (2002) distingue três tipos de aprendizagem significativa: representacional, proposicional e de conceitos, apresentando um desdobramento na aprendizagem de conceitos em formação de conceitos e assimilação de conceitos (Figura 2).

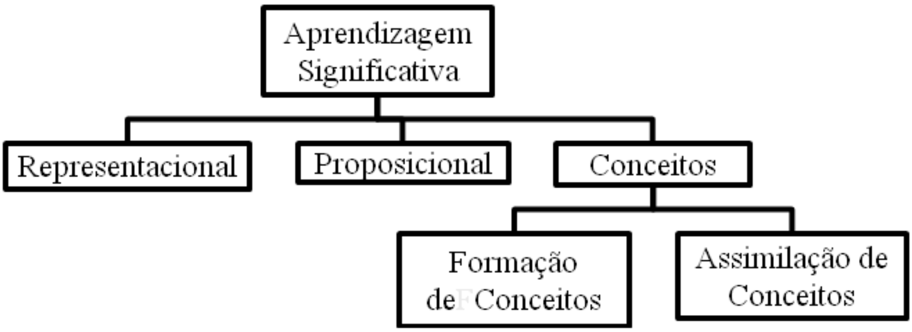

Figura 2 : Tipos de aprendizagem significativa segundo Ausubel

A aprendizagem **representacional** refere-se à aprendizagem inicial cuja característica principal é a assimilação de símbolos e seus significados particulares. Inicialmente podemos compará-la à aprendizagem mecânica; no entanto, as proposições de equivalência que são feitas entre os símbolos e seus significados são obviamente relacionáveis e, portanto significativas. Por conseguinte, a representação do objeto quadrado, nesta fase, passa a significar o próprio conceito de quadrado.

A aprendizagem **proposicional** diz respeito ao significado de ideias expressas por grupos de palavras combinadas em proposições ou sentenças, apresentando tanto o significado denotativo quanto o conotativo das palavras. Como por exemplo, a interpretação de um texto histórico em que solicitamos que o aluno realize procedimentos que o auxiliem na compreensão de algoritmos a partir das proposições enunciadas no texto.

Nesse sentido, a aprendizagem proposicional pode ser evidenciada no seguinte caso: dado um círculo de diâmetro unitário, podemos supor que o comprimento da circunferência do círculo situa-se entre o perímetro de qualquer polígono regular inscrito e o de qualquer polígono regular circunscrito. Desta forma, podemos calcular os perímetros dos hexágonos regulares inscritos e circunscritos, obtendo assim aproximações para π, desde que sejam conhecidas fórmulas[7] para obtenção dos perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos com o dobro do número de lados. E, por aplicações sucessivas desse processo, podemos calcular os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos de doze, vinte e quatro, quarenta e oito, e noventa e seis lados e, dessa forma, obter limites cada vez mais próximos de π. Foi isso que essencialmente fez Arquimedes, chegando à conclusão de que π está entre 223/71 e 22/7 ou que, até a segunda casa decimal, π é dado por 3,14 (EVES, 2004).

Ao sugerirmos aos discentes que utilizem as proposições anteriores para determinarem um valor aproximado para o comprimento da circunferência do círculo unitário, tentamos, na realidade, evidenciar o desenvolvimento epistemológico do conceito em questão.

Temos ainda a **aprendizagem de conceitos:** de acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 72), "os conceitos constituem-se em abstrações dos atributos essenciais que são comuns a uma determinada categoria de objetos, eventos ou fenômenos". Os autores destacam dois tipos de aquisição de conceitos:

- **Formação de conceitos:** Processo indutivo, significativo, orientado por hipóteses e atividades empírico-concretas que caracterizam a fase inicial de aquisição de conceitos pelos alunos. Por exemplo, solicitar que os discentes meçam as dimensões do quadro, da sala de aula, da quadra, assim como que estimem as áreas destes objetos a partir de passos, palmos, braços e lajotas, a fim de evidenciar a necessidade de se estabelecer unidades de medidas.
- **Assimilação de conceitos:** Após a etapa de formação de conceitos, o aluno se encontrará em uma fase de maturidade que lhe permite

---

[7] $P2n = 2\,\dfrac{pn.Pn}{pn + Pn}$; *pn* e *Pn* denotam respectivamente, os perímetros dos polígonos regulares de n lados inscritos e circunscritos ao mesmo círculo.

relacionar à estrutura cognitiva os atributos essenciais abstratos de novas ideias genéricas, caracterizando a assimilação de conceitos. Assim, por exemplo, entender que a partir da área do quadrado unitário podemos determinar as áreas dos outros quadriláteros só será de fato significativo para o aluno, se de alguma forma houver uma clara relação entre estas áreas.

De acordo com Ausubel (2002), na aprendizagem de conceitos ou na aprendizagem proposicional a relação pode ser: subordinativa, superordenada ou combinatória, havendo um desdobramento da subordinativa em derivativa e correlativa (Figura 3).

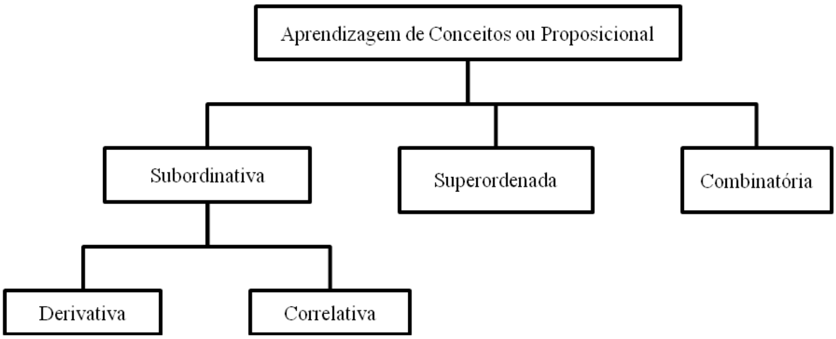

Figura 3 : Tipos de aprendizagem de conceitos segundo Ausubel

Quando as novas informações são vinculadas a informações pré-existentes na estrutura cognitiva, a aprendizagem de proposições ou de conceitos é dita *aprendizagem subordinativa*, que se apresenta de duas formas:

- **Subordinação derivativa:** ocorre quando o novo material de aprendizagem é compreendido como um exemplo específico de um conceito já estabelecido na estrutura cognitiva. Por exemplo, o problema 51 do Papiro de Ahmes mostra que a área de um triângulo isósceles era obtida tomando a metade da base e multiplicando esta medida pela altura. Ahmes justificou seu método para achar a área sugerindo que o triângulo isósceles pode ser pensado como dois triângulos retângulos, um dos quais pode ser deslocado de modo que os dois juntos formem um retângulo (BOYER, 2003).

- **Subordinação correlativa:** ocorre quando o novo conteúdo for extensão, elaboração, modificação ou qualificação de conceitos já assimilados. Temos, como exemplo, no estudo de áreas de figuras planas, o conceito de medida, que é mais abrangente, pois apresenta um alto nível de generalidade e inclusão. E, juntamente com os outros conceitos geométricos que o sucedem, como os conceitos de medida de comprimento e de área, servirá de subsunçor para as novas informações.

Caso conceitos estabelecidos na estrutura cognitiva sejam assimilados por conceitos mais inclusivos, identificamos a aprendizagem como *superordenada.* Como exemplo, o conceito de quadrilátero pode desenvolver uma condição superordenada em relação aos conceitos de quadrado, retângulo, paralelogramo, losango e trapézio.

A aprendizagem significativa de proposições novas que não apresentam uma relação subordinativa ou superordenada com ideias particulares relevantes na estrutura cognitiva, ou seja, não estão subordinadas a determinadas proposições e não podem condicionar o aparecimento de determinadas ideias é denominada *aprendizagem combinatória.*

Um exemplo deste tipo de aprendizagem pode ser evidenciado no cálculo aproximado da área do círculo de raio unitário, por meio da inscrição deste em um quadrado de lado igual ao seu diâmetro, dividindo o quadrado em nove partes iguais e posteriormente estimando um valor para a área do círculo unitário. Nesse caso, usam-se conceitos já dominados pelos discentes com relação à área do quadrado, para ensinar conceitos novos e que guardam alguma relação com os antigos que serviram como âncora. Mas a área do círculo não é uma generalização e nem um exemplo de área do quadrado.

A aprendizagem significativa apresenta alguns princípios peculiares que podem favorecer a aquisição do conhecimento escolar. Ausubel (2002) postula que os discentes podem realizar aprendizagem significativa dos conceitos estudados, quando os mesmos estiverem organizados segundo uma sequência lógica, denominada *diferenciação progressiva*, além de sugerir uma dinâmica que permite constantes retomadas de conceitos já desenvolvidos, proporcionando revisões frequentes, caracterizando a *reconciliação* *integrativa*. Durante o desenvolvimento das ações contidas nas tarefas potencialmente significativas, o que provavelmente facilitará a assimilação dos conceitos são as atividades desencadeadoras dos conteúdos a serem estudados, que Ausubel denomina *organizadores prévios*.

Princípios norteadores para aprendizagem significativa

Os novos conceitos ou proposições ancoram-se a conceitos ou proposições já adquiridos, modificando-os e sendo modificados por estes, e posteriormente organizados cognitivamente de forma sequencial. Se os conceitos ou proposições são relacionados por aprendizagem superordenada ou combinatória, surgirão novos significados e significados conflitantes que podem ser resolvidos por um processo de revisão de conceitos já subsumidos pelos alunos.

Diferenciação progressiva

A aquisição de conhecimento pode se dar de forma indutiva ou dedutiva. De qualquer maneira os conteúdos assimilados são organizados na estrutura cognitiva hierarquicamente. Podemos aproximar o ensino à forma como o conteúdo é organizado cognitivamente, ou seja, organizando materiais introdutórios que apresentem as ideias mais gerais e inclusivas do conceito a ser abordado como nos orienta o princípio da diferenciação progressiva. Vejamos como Moreira (2000, p. 4) caracteriza este princípio.

> [...] é o princípio programado segundo o qual as idéias mais gerais e inclusivas da matéria de ensino devem ser apresentadas desde o início da instrução e, progressivamente, diferenciadas em termos de detalhes e especificidade. Não se trata de um enfoque dedutivo, mas sim de uma abordagem na qual o que é mais relevante deve ser introduzido desde o início e, logo em seguida, trabalhando através de exemplos, situações, exercícios. As idéias gerais e inclusivas devem ser retomadas periodicamente favorecendo assim sua progressiva diferenciação.

Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), durante o curso da aprendizagem significativa ocorrem dois importantes processos correlatos. Quando submetemos uma nova informação a um determinado conceito já subsumido, primeiramente a nova informação é assimilada, e, posteriormente, o conceito anterior, *subsunçor*, é modificado pelo processo de ancoragem do novo conceito. Esse processo de inclusão, que ocorre uma ou mais vezes, motiva a diferenciação progressiva do conceito que engloba novas informações.

Embora esse princípio pareça pertinente para introduzir novos conceitos, ele raramente é seguido nos procedimentos de ensino ou na organização da maioria dos livros-texto. Segundo Ausubel (2002), a prática mais comum é segregar materiais topicamente homogêneos em capítulos e subcapítulos separados e ordenar a organização dos tópicos e subtópicos. Por exemplo, em vez de estudarmos isoladamente o assunto *semelhança* somente com base na relação tópica, poderíamos considerar o seu nível relativo de abstração, generalidade e inclusividade, como suas aplicações à trigonometria e na formulação da área do círculo.

Com efeito, um subordinador apropriadamente relevante e inclusivo pode ser disponibilizado para oferecer um arcabouço ideativo para cada unidade componente do assunto a ser estudado. Além do mais, as ideias dentro de cada unidade, assim como as várias unidades em relação com as outras podem ser progressivamente diferenciadas.

Quando submetemos uma nova informação a um determinado conceito ou proposição, a nova informação é aprendida e o conceito ou proposição inclusiva sofre modificações. Esse processo de inclusão ocorre uma ou mais vezes refinando o significado e aumentando o potencial para criação de uma base para posterior aprendizagem significativa. O relacionamento desses conceitos pode gerar significados conflitantes que podemos resolver com o auxílio do que Ausubel denomina *reconciliação integrativa*.

Reconciliação integrativa

Os conhecimentos prévios ancoram os novos conhecimentos, apresentando diferenças e semelhanças entre si, o que gera, por vezes, conflitos cognitivos.

Devemos, então, rever os conceitos anteriormente adquiridos, observando as devidas diferenças e semelhanças para que não ocorram inconsistências ao novo conteúdo assimilado. Este procedimento é denominado por Ausubel *reconciliação integrativa*.

A maioria dos alunos afirmava que a base do poliedro não poderia ser face, senão todas as faces poderiam ser bases. Desse modo precisamos voltar aos conceitos mais abrangentes (diferenciação progressiva): polígonos, poliedros, faces, poliedros particulares (prismas e pirâmides), base, sanando distorções entre os conceitos e suas relações. (BARALDI, 1999, p. 54)

Podemos observar que a ocorrência da aprendizagem significativa na perspectiva ausubeliana de um conceito está condicionada a observações de regularidades ou das diferenças e semelhanças existentes entre o novo e o antigo conhecimento. A comparação entre o que se quer assimilar e o conhecimento já adquirido é uma propriedade evidente da reconciliação integrativa.

Segundo Ausubel (2002), o princípio da reconciliação integrativa pode melhor ser descrito como antítese às práticas usuais contidas na maioria das propostas dos livros didáticos que compartimentalizam e segregam ideias ou tópicos particulares dentro de seus respectivos capítulos e subcapítulos.

Por exemplo, os alunos podem saber que a diagonal do retângulo e a hipotenusa do triângulo retângulo se equivalem, mas esta ideia volta a ser abordada posteriormente na distância entre dois pontos e no módulo de um complexo. A confusão inicial que o aluno pode experimentar é resolvida quando aprende novos significados combinatórios e compreende que a aplicação de uma mesma ideia matemática pode gerar vários conceitos correlatos, mas distintos; os conceitos e as proposições aprendidos anteriormente são, desta forma, modificados, e os novos significados são adicionados à estrutura cognitiva.

Parece razoável postular que podemos ajudar o aluno a resolver as inconsistências ou os conflitos aparentes entre conceitos ou proposições, com auxílio da reconciliação integrativa. Assim, as novas ideias de esteio capacitariam o aluno a mais tarde compreender as ideias e as informações mais detalhadas do assunto a serem aprendidas com menos ambiguidades (AUSUBEL, 2002).

Para Ausubel (2002), um dos atributos essenciais aos professores é que tenham amplitude suficiente de conhecimento e experiência em sua área para que possam estar aptos a contribuir com seus alunos dotando-os de meios para formularem suas próprias reconciliações integrativas.

Os princípios supracitados acontecem simultaneamente em todos os instantes. Dessa forma, temos que organizar o material de ensino com o objetivo de facilitarmos os processos de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa; para isso, Ausubel (2002) nos recomenda a utilização dos *organizadores prévios*.

Organizadores prévios

Segundo, Ausubel, Novak e Hanesian (1980), *organizadores prévios* são materiais introdutórios apresentados antes do próprio material a ser aprendido. Quando os conceitos *subsunçores* são pouco elaborados ou inexistentes, cabe ao professor utilizar-se dos *organizadores prévios*, que servem de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele vai aprender. São as *pontes cognitivas*.

Esses organizadores servem de âncora para a nova aprendizagem e são os facilitadores da aprendizagem subsequente.

> [...] servem tanto para fornecer a ligação entre a nova informação e os conhecimentos relevantes anteriores, como também para fornecer conceitos relevantes não-existentes para a ancoragem da nova aprendizagem. Os organizadores prévios podem aparecer sob diversas formas – uma pergunta ou um problema, um filme, um texto, uma demonstração, atividades lúdicas ou "concretas" – oferecendo ao aluno idéias essenciais e mais inclusivas sobre o assunto, ou ainda apontando quais idéias anteriores precisam ser retomadas e delineadas (BARALDI, 1999, p. 53).

De acordo com Ausubel (2002), os organizadores prévios podem servir, em parte, para focalizar a atenção do aprendiz em elementos ou atributos de materiais de estudo que poderiam passar inteiramente despercebidos sem induzir a disposição que pode por ele ser oferecida, característica, a nosso ver, presente nas investigações históricas.

Para o autor, em um contexto amplo, os organizadores orientam os estudantes para o estabelecimento de uma disposição para aprendizagem, podendo influenciar significativamente a maneira pela qual a informação é internalizada na estrutura cognitiva, ou seja, a motivação também é um pressuposto comum tanto dos organizadores prévios quanto da História da Matemática.

A concepção do contexto da História da Matemática como organizador prévio

Nossas reflexões nos conduzem a postular que a história é um dos instrumentos que pode promover a aprendizagem significativa da Matemática e esclarecer os conceitos e as teorias estudadas. Mendes (2006) afirma que a interpretação das informações históricas, incorporadas à estrutura cognitiva dos alunos, favorece a abstração dos conceitos matemáticos.

Propomos, também, que a reconstrução teórica e/ou prática dessa história pode proporcionar ao aluno oportunidades para evidenciar os significados da aprendizagem, evidenciando os obstáculos que surgiram na construção do conhecimento.

Já destacamos que se os conceitos relevantes não estivessem disponíveis na estrutura cognitiva, o organizador prévio servirá para ancorar novas aprendizagens e levar ao desenvolvimento de um conceito *subsunçor* que facilitasse a aprendizagem subsequente. Por outro lado, se os conceitos adequados estivessem disponíveis, o organizador prévio poderia servir como elemento de ligação entre a nova aprendizagem e os *subsunçores* relevantes específicos (NOVAK, 1981). Nosso pressuposto é que o contexto histórico da Matemática pode ser um elemento facilitador de uma aprendizagem significativa, na medida em que se habilite como organizador prévio.

Para Ausubel (2002, p. 41, grifos do autor, tradução nossa) as razões para se implementar os organizadores se baseiam principalmente em fatores como:

> 1. A importância de ter idéias pertinentes ou apropriadas em algum sentido já estabelecidas e disponíveis na estrutura

> cognitiva para fazer com que as novas ideias *logicamente* significativas e *potencialmente* significativas sejam *realmente* significativas (ou seja, que produzam novos significados), além de oferecer uma ancoragem estável.
>
> 2. As vantagens de se usar as ideias mais gerais e inclusivas de uma disciplina na estrutura cognitiva como ideias âncoras ou subsumidoras, modificando-as adequadamente para uma maior particularidade de sua pertinência dentro do material de instrução. Devido ao caráter mais oportuno e específico de sua pertinência, também desfrutam de uma maior estabilidade intrínseca, de maior poder expositivo e de uma maior capacidade integradora.
>
> 3. O fato de que os próprios organizadores pretendam identificar os conteúdos pertinentes já existentes na estrutura cognitiva (e de relacionar-se explicitamente com eles) e indicar de forma explícita tanto a pertinência do conteúdo já existente como sua própria pertinência para o novo material de aprendizagem.

O contexto da História da Matemática como organizador prévio se justifica, então, pelas mesmas razões pelas quais os organizadores prévios se justificam dentro da teoria ausubeliana.

Em consonância com a primeira razão, acreditamos que introduzir um conceito por meio de uma contextualização histórica favorece a compreensão do conceito, incorporando à estrutura cognitiva do aluno *subsunçores* necessários à ancoragem da aprendizagem posterior. O contexto da História da Matemática pode contribuir, também, para evidenciar o significado lógico de conceitos potencialmente significativos, e tais qualidades, em nossa concepção, podem potencializá-la como organizador prévio.

Em relação à segunda razão, postulamos que a estrutura dos assuntos a serem desenvolvidos focalizando os aspectos histórico-epistemológicos identifica os conceitos mais gerais e inclusivos dos conteúdos matemáticos a serem estudados. Uma exposição introdutória baseada em contextos históricos pode explicitar as novas ideias, expressando um alto nível de generalidade e poder de inclusão, às quais as informações mais detalhadas possam ser relacionadas.

Relacionamos a terceira razão com o contexto histórico da seguinte forma: caso os conceitos já estejam estabelecidos na estrutura cognitiva, a contextualização histórica identificará tais conceitos, mostrando sua relevância para a época de sua construção assim como sua aplicabilidade atual, além de destacar sua importância para aquisições de conceitos subsequentes que estejam relacionados aos anteriores.

O organizador prévio que utiliza o contexto da História da Matemática, em nossa concepção, além de contextualizar o aprendizado de um determinado conteúdo, mostra formas de conectar essas novas ideias com outras já existentes na estrutura cognitiva. Ademais, pode ser altamente motivador para os alunos, uma vez que apresenta situações-problema cuja solução bem sucedida requer poder de raciocínio, flexibilidade de pensamento, improvisação, sensibilidade, astúcia tática para compreender os princípios subjacentes, habilidade, destreza e conhecimentos prévios. Atuando como elemento motivador, o organizador pode instigar o aluno a continuar o processo de ensino-aprendizagem compreendendo-se como parte integrante do mesmo e não como um mero receptor e espectador reproduzindo as informações apresentadas.

Vejamos como as proposições contidas em textos históricos podem introduzir conceitos relevantes que servem de *subsunçores*. Segundo Eves (2004), é provável que nenhum outro problema tenha exercido um fascínio maior ou mais duradouro do que aquele de construir um quadrado de área igual à área de um círculo dado. Já em 1800 a.C. os egípcios haviam "resolvido" o problema, tomando o lado do quadrado igual a 8/9 do diâmetro do círculo dado.

Nesse exemplo, observamos que o contexto da História da Matemática pode ser relevante, também, para introdução de conceitos e que seu poder de inclusividade é suficientemente amplo para servir de *subsunçor* das ideias e conceitos que serão trabalhados posteriormente.

A discussão das ideias contidas nesse contexto pode evidenciar vários pontos de vista para solução do mesmo problema. Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), quando um conceito é encontrado numa ampla variedade de concepções, os atributos que o definem são mais rapidamente apreendidos.

Podemos, por exemplo, confrontar as ideias dos egípcios à dos babilônios que consideravam uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e a área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência respectiva. Mostra-se, assim, que os conceitos matemáticos não são criados arbitrariamente: eles surgem da ação sobre outros já existentes, que, por sua vez, foram criados para atender as necessidades de atividades cotidianas.

Nossa perspectiva, ao adotar o contexto da História da Matemática como organizador prévio, é de, também, mostrar que a origem do conhecimento matemático não está dissociada das necessidades humanas, sendo experimental, e gerada a partir das tentativas de solução dos problemas reais que surgem em uma determinada época ou comunidade.

O contexto da História da Matemática como organizador prévio pode, também, favorecer a prática dos princípios de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa. Isto é, antes mesmo de iniciar um assunto, é possível conhecer as ideias mais gerais e mais amplas, para depois partir para as específicas a que se pretende chegar, estabelecendo comparações entre os conceitos já conhecidos e o novo.

A concretização dessa proposta pode ser evidenciada em algumas pesquisas que passaremos a descrever em seguida.

Brighenti (2003) propõe como exemplo de organizador prévio que os professores, antes de expor os alunos aos primeiros contatos com os conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo, utilizem textos históricos.

> [...] que descreva como os egípcios do século 6º a.C, de posse de alguns conhecimentos geométricos, resolviam problemas cotidianos, como por exemplo, determinar a altura de um barranco utilizando-se da medida de sua sombra, quando o Sol estivesse a 45º do horizonte. Neste caso o conceito de medida é o mais abrangente, pois apresenta um nível de abstração, generalidade e inclusão e, juntamente com outros conceitos geométricos (a medida da soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º; definição de triângulo retângulo e de triângulo isósceles), servirá de subsídio ancoradouro para a nova informação. (BRIGHENTI, 2003, p. 40).

A autora indica, também, outros problemas desafiadores, como por exemplo, os procedimentos utilizados por Thales de Mileto, para calcular a altura de uma pirâmide no Egito[8]. Assim, teremos um

> [...] organizador prévio, que além de motivar os alunos para aprendizagem do novo assunto, também os prepara para desenvolver ações extraclasse como, por exemplo, medir a altura de algo no pátio da escola, utilizando-se dos procedimentos empregados por Thales de Mileto [...] (BRIGHENTI, 2003, p. 41).

Com efeito, as atividades assim concebidas podem ligar o que se deve aprender a conhecimentos previamente apreendidos no contexto histórico apresentado, possibilitando uma visão mais ampla, geral e inclusiva em relação aos conceitos que serão abordados a partir desse organizador.

Neto (2005) afirma que a História da Matemática, como organizador prévio, deve ser utilizada para cada um dos tópicos que serão trabalhados em classe, a fim de ancorar os novos conceitos a serem apresentados.

> [...] entendemos que a utilização da história da matemática como organizador prévio, remete-nos à preocupação [...] que esse material deve apresentar para que exerça, adequadamente, sua função de subsunçor, ou seja, de relacionar o que o aluno já sabe com os conhecimentos que deve adquirir para que a aprendizagem ocorra mais facilmente (NETO, 2005, p. 107).

Em consonância com essa concepção, Andrade (2007) utilizou o contexto da história da Matemática como organizador prévio, focando o surgimento da Geometria Analítica e dos Vetores, visando incentivar a descoberta das possíveis conexões deste com outros assuntos não só dentro da Matemática, mas também com assuntos de outras áreas do conhecimento.

> O objetivo deste organizador prévio foi detectar a existência dos conhecimentos que os alunos já possuem, como por exemplo, semelhança de triângulos, lei dos cossenos e outros da geometria euclidiana e da álgebra. Caso não seja detectada a existência desses conhecimentos, necessários para a aprendizagem da geometria analítica e vetores, será

---

[8] Segundo Eves (2004), há duas versões de como Tales, supostamente, tenha obtido a altura da pirâmide egípcia. A primeira diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A segunda afirma que ele fincou verticalmente uma vara e fez uso de semelhança de triângulos.

> função dos organizadores prévios fornecê-los. (ANDRADE, 2007, p. 51)

O autor utilizou o contexto histórico como organizador prévio em dois momentos de sua pesquisa: inicialmente, propôs que os alunos fizessem pesquisa sobre a epistemologia da Geometria Analítica e dos Vetores indicando alguns *sites*, e deixando os discentes livres para realizarem a pesquisa que pôde ser feita não só na Internet, mas também na biblioteca da escola e/ou em outras fontes de pesquisa. Em um segundo momento, ofereceu como fonte de pesquisa aos alunos livros que tratam da História da Matemática e textos selecionados da Internet que tratam do surgimento da Geometria Analítica e dos Vetores.

Por sua vez Nunes (2007) utilizou o contexto da história da Matemática elaborando um texto a partir de fragmentos de um capítulo do livro de Eves (2004) intitulado *A Matemática babilônica e egípcia*, com a finalidade de ancorar o estudo de áreas de figuras planas, justificando sua proposta da seguinte forma:

> O uso deste organizador torna desnecessário muitas das memorizações mecânicas às quais os alunos tantas vezes recorrem devido à exigência para que realizem cálculos de áreas de figuras planas antes de terem disponível um número suficiente de idéias âncoras. Tal organizador foi proposto em função dos pré-requisitos que julgamos relevantes, de modo a promoverem os meios necessários a fim de que os novos conceitos a serem trabalhados possam se relacionar de forma não-arbitrária e substantiva com conceitos previamente existentes na estrutura cognitiva do aluno. (NUNES, 2007, p. 67)

O autor conclui afirmando que o contexto da História da Matemática, como organizador prévio, propiciou maior compreensão sobre área de figuras planas, favorecendo uma aprendizagem significativa.

Dito isso, postulamos que os organizadores, que recorrem a contextualizações históricas da Matemática, podem ser elaborados em vários níveis, como por exemplo, na introdução de uma disciplina, na introdução das várias partes de uma dada disciplina e/ou na introdução dos vários assuntos relativos a cada parte de uma disciplina.

O papel assumido pelo organizador é, portanto, aproveitar as possíveis analogias, evidenciando as peculiaridades, as semelhanças e as diferenças existentes entre o conjunto de ideias já subsumidas e as ideias mais inclusivas relativas ao conteúdo que desejamos ensinar. Uma vez estabelecidas as bases necessárias para a aprendizagem significativa do novo conteúdo, ele passa a ser trabalhado através do princípio da diferenciação progressiva em direção aos conceitos sucessivamente mais específicos. Neste caso, o organizador funciona no sentido de evidenciar a origem de diversos conceitos a serem apreendidos.

Considerações finais

Em nossa proposta, as atividades matemáticas podem ser elaboradas a partir de um diálogo conjuntivo entre as informações históricas e a aprendizagem significativa, mudando, assim, a imagem acerca da Matemática como conhecimento pronto e acabado. Dessa forma, o conhecimento, oriundo da atividade, poderá ser apreendido e ressignificado pelos alunos a partir de informações históricas, de acordo com a contextualização sociocultural que revestiu essas informações.

Consideramos, assim, que o contexto da História da Matemática como organizador prévio pode propiciar maior compreensão sobre conceitos matemáticos. As atividades elaboradas nesse contexto, para introduzir conceitos, revelam-se como legítimos organizadores prévios, pois coadunam com suas características essenciais, visto que os organizadores devem apresentar as seguintes características: clareza, estabilidade, relevância e inclusividade, apresentando também níveis superiores de abstração e generalidade do que se vai ensinar. Observamos, neste sentido, uma possível imbricação entre a construção histórica do conceito e a aprendizagem significativa.

Referências

ANDRADE, R. C. D. **Geometria analítica plana:** praxeologias matemáticas no ensino médio. 2007. 121 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2007.

AUSUBEL, D. P. **Adquisición y retención del conocimiento:** una perspectiva cognitiva. Barcelona: Paidós, 2002.

AUSUBEL, D. P. **Psicologia educativa**: un punto de vista cognoscitivo. México: Trillas, 1976.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK. J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional.** 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BARALDI, I. M. **Matemática na escola**: que ciência é esta? Bauru, SP: Edusc, 1999.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. Trad.: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 2003.

BRIGHENTI, M. J. L. **Representações gráficas:** atividades para o ensino e a aprendizagem de conceitos trigonométricos. Bauru, SP: Edusc, 2003. (Coleção Educar).

EVES, H**. Introdução à história da Matemática.** Tradução: Higino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Microdicionário de Matemática**. São Paulo: Scipione, 1998.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático**: provas e refutações. Trad.: Nathanael C. Caixeiro. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

MENDES, I. A., A investigação histórica como agente da cognição Matemática na sala de aula. Iran A. In: MENDES, I. A. (org.) **A História como um agente de cognição na educação Matemática**. 1. ed. Porto Alegre: Sulina, p. 79-136, 2006.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. A. F. S. **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa crítica**. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/linguagem.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2006.

NETO, F. R. B. **Uma proposta para ensinar os conceitos da análise combinatória e de probabilidade:** uma aplicação do uso da história da Matemática, como organizador prévio, e dos mapas conceituais. 2005. 271 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

NOVAK, J. D. **Uma teoria da educação**. Tradução: Marco Antônio Moreira. São Paulo: Pioneira, 1981.

NUNES, J. M. V. **História da Matemática e aprendizagem significativa da área do círculo:** uma experiência de ensino-aprendizagem. 2007. 109 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2007.

Aprovado em julho de 2009
Submetido em abril de 2009

ULBRA

ACTA SCIENTIAE

Revista de Ensino de Ciências e Matemática

A Revista *Acta Scientiae* teve sua origem em 1999, mediante publicação de artigos oriundos dos pesquisadores das áreas de Ciências Naturais e Exatas da Universidade Luterana do Brasil – ULBRA – Canoas (RS). Com sua indexação junto ao IBICT – *Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia* (ISSN no. 1517-4492), é reconhecida como um espaço de publicação tanto de Ciências e Matemática como de Ensino dessas áreas. Entretanto, a partir do Volume 7, Número 1, 2005, Jan-Jun, a revista passa a publicar artigos exclusivos da área de Ensino de Ciências e Matemática, sendo editada desde sua fundação em dois números anuais. Assim, constitui-se em mais uma opção para publicação de artigos científicos dessa região de inquérito.

Confira: **http://www.ulbra.br/actascientiae**

Você poderá realizar download dos exemplares da revista, encontrará informações para submissão e avaliação dos artigos.

Atenção!

A Revista Acta Scientiae é de fluxo contínuo para o recebimento de artigos. Além disso, ela é uma revista de divulgação impressa e online.

Informações:

mauriciomatematica@gmail.com

actascientiae@ulbra.br