Bolema, Rio Claro (SP), v. 23, nº 36, p. 597 a 624, agosto 2010 ISSN 0103-636X

Somando Funções Trigonométricas: uma reconstrução didática do conceito de timbre a partir de duas experiências pedagógicas

Adding Trigonometric Functions: a didactic reconstruction of the timbre concept based on two pedagogical experiences

Francisco Nairon Monteiro Júnior[1]

Resumo

O presente artigo centra sua atenção no desenvolvimento de uma abordagem interdisciplinar das funções trigonométricas através da análise da representação matemática do conceito de timbre. Numa primeira etapa, apresentamos um resumo dos conceitos necessários ao estudo do timbre de instrumentos musicais, onde as séries de Fourier e as séries harmônicas jogam papel fundamental. Numa segunda etapa, levantamos um quadro da apresentação do citado conceito a partir de uma revisão de alguns dos principais textos didáticos do segundo ano do ensino médio. Nesta etapa, apontamos possíveis falhas destas apresentações textuais, à luz do referencial teórico da acústica. Por fim, apresentamos duas experiências didáticas no ensino do conceito de timbre que podem ser utilizadas tanto por professores de matemática no estudo das funções trigonométricas quanto por professores de física, no estudo da mecânica ondulatória, interessados numa prática de ensino construtivista.

Palavras-chave: Séries de Fourier. Timbre. Instrumentos Musicais. Educação Matemática. Educação em Física.

[1] Mestre em Educação nas Ciências pela Universidade Federal Rural de Pernambuco/UFRPE. Professor do Departamento de Educação da Universidade Federal Rural de Pernambuco/UFRPE. Recife/PE, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Estevão de Sá, 346. Várzea.Recife/PE. CEP: 50740-270. E-mail: naironjr@ded.ufrpe.br

Abstract

This study focuses on the development of an interdisciplinary approach to trigonometric functions through analysis of the mathematical representation of the timbre concept. First we present a summary of necessary concepts to study the timbre of musical instruments in which the Fourier series and harmonic series play an essential role. Secondly we describe the presentation of this concept based on a review of the main textbooks used in the second year of high school. We point out possible failures of textbook presentations regarding acoustics theory. Finally, we present two didactic approaches to teaching the timbre concept which can be used by math teachers while addressing trigonometric functions as well as physics teachers working with acoustics, when these teachers are interested in constructivism.

Keywords: Fourier Series. Timbre. Musical Instruments. Mathematics Education. Physics Education.

Introdução

As ligações entre matemática e música são inúmeras, tanto no campo da acústica física, quanto nos desdobramentos de sua aplicação na acústica musical. Os estatutos gerais da acústica musical e, mais particularmente, os estudos relativos ao entendimento dos fundamentos científicos da construção e funcionamento de instrumentos musicais, bem como o entendimento das relações entre os sons musicais, que se situa no campo de estudo da harmonia, utilizam-se da modelagem matemática como processo fundamental na organização das suas idéias. São inúmeros os referenciais científicos que abordam este tema (BACKUS, 1977; BENADE, 1990; BERG; STOCK, 1995; JOHNSTON, 1989; LEVARIE; LEVY,1980; MACONIE, 1997; PIERCE, 1983; RIGDEN, 1985; ROTHSTEIN, 1996). Considerando os estudos psicofísicos relativos ao entendimento das relações entre estímulo físico e resposta fisiológica no campo da percepção do som, é vasta ainda a quantidade de referências que apresentam as interpretações fisiológicas dos estímulos sonoros, evidenciando, em particular, que o entendimento dos conceitos de altura, intensidade e timbre transpassa o universo da física, enveredando nos campos da fisiologia e da percepção (ROEDERER, 1998; ROSSING, 1990). A compreensão, por parte dos professores de matemática, do universo da percepção do som pelo ser humano é de fundamental importância para o desenvolvimento de materiais instrucionais no ensino da matemática que se utilizem das experiências no campo da música, como as experiências didáticas propostas neste artigo.

Considerando o referencial histórico, podemos ainda afirmar que a utilização de estruturantes matemáticos no estudo da acústica física e fisiológica constitui-se matéria de pesquisa desde a antiguidade. Uma leitura crítica da história da acústica e da teoria musical pode revelar a importância da matemática no entendimento do universo do som que se retrata desde a Grécia antiga, através dos relatos de experiências com o monocórdio, as quais marcaram a primeira tentativa de modelar matematicamente as relações naturais entre os sons de uma corda posta a vibrar em determinadas frações do seu comprimento útil (ABDOUNUR, 1999; MONTEIRO Jr., 1999). Da escola pitagórica vieram os primeiros registros de estudos sobre a harmonia, cujo objetivo foi representar através de frações numéricas os princípios da consonância musical. Utilizando-se de um monocórdio, Pitágoras observou que os intervalos de quarta, quinta e oitava eram produzidos quando a corda era posta a vibrar, respectivamente, a 3/4, 2/3 e 1/2 do seu tamanho original que, por sua vez, produzia o tom fundamental (MATTÉI, 2000). A associação dos intervalos consonantes (quartas justas, quintas justas e oitavas) à frações matemáticas não constituem uma casualidade histórica, mas retratam a necessidade de se representar matematicamente a realidade percebida, embasada na crença de que tudo podia ser representado através de um número. A análise deste e de outros sistemas vibrantes levou à crescente necessidade de lançar mão de arcabouços matemáticos mais organizados. Por exemplo, a contenda que se desenrolou a partir da segunda metade do século XVIII acerca da solução matemática para o problema da vibração de uma corda levou ao desenvolvimento de importantes ferramentas matemáticas tais como as equações diferenciais parciais e as séries de Fourier (KLEINER, 1993; MONTEIRO Jr.; MEDEIROS, A., 2001a; MONTEIRO Jr.; MEDEIROS, A., 2001b; WHELLER; CRUMMETT, 1987).

Como a análise acima sugere, o desenvolvimento histórico da ciência do som sempre andou lado a lado com o desenvolvimento da música. A própria acústica musical e a acústica física se confundem em seus campos de estudo (ROSSING, 1990). A amplitude com que se pode compreender o fenômeno sonoro transpassa o universo da física, da matemática e da própria arte, enveredando em direção à interface entre estímulo físico e resposta fisiológica, mergulhando no universo da percepção, onde é necessário lançar mão de modelos psicofísicos no entendimento deste fenômeno tão amplo e impressionante (ROEDERER, 1998). Ferramentas matemáticas como as séries de Fourier foram impulsionadas por problemas como a vibração de uma corda de um instrumento musical (LINDSAY, 1973). Contudo, pouco desta história tem sido resgatado em direção ao desenvolvimento de estratégias de ensino da matemática. O desenvolvimento de materiais instrucionais para o ensino da matemática e da física, dentre os quais estão os livros didáticos, parece ainda andar em descompasso com os resultados de pesquisa em educação matemática e em educação em física, veiculados por diversos periódicos nacionais e internacionais. Tais textos didáticos ainda se caracterizam por uma veiculação abstrata, longe da realidade dos estudantes e destituída de ligações com experiências cotidianas, servindo muito mais para treiná-los no uso de um formalismo matemático exacerbado e nos croquis de resolução de problemas padrões que são cobrados nos exames de admissão à universidade. Tal modelo tem gerado uma grande dificuldade de aprendizagem, aliada a um desinteresse cada vez mais crescente na disciplina. Dentre tais propostas de ensino de conteúdos matemáticos utilizando o universo musical, poderíamos citar diversas propostas didáticas, tais como a análise da matemática subjacente às escalas musicais (MALCOLM, 1972), o estudo das razões e proporções através dos conceitos de melodia, harmonia e ritmo (NISBET, 1991) e a aplicação do conceito de média harmônica no entendimento do processo de afinação (ARNOLD, 1991). Como forma de promover um estudo da matemática mais interativo, Abdounur (1999) propõe o desenvolvimento de oficinas pedagógicas interdisciplinares, ligando matemática e música. Partindo do resgate de experimentos históricos tais como o monocórdio de Pitágoras, propõe atividades no estudo das frações através da reprodução das consonâncias perfeitas, desenvolvendo atividades posteriores em direção à construção de conceitos como o de intervalo musical, superposição de intervalos e construção da escala pitagórica, culminando com a emergência do temperamento e das séries de Fourier. Numa outra sequência, propõe o desenvolvimento de uma atividade de observação da relação entre altura e freqüência, utilizando-se de um alto-falante ligado a um frequencímetro, na qual discute ainda o conceito de afinação através do cálculo de médias harmônicas e aritméticas. Posteriormente, discute as modificações propostas por Zarlino nas relações subjacentes aos intervalos de terça e sexta, fortemente associadas às séries de Fourier e ao desenvolvimento histórico da consonância. Com referência às contribuições de Galileu e Mersenne ao desenvolvimento da acústica musical, Abdounur (1999) propõe atividades que buscam trabalhar as relações entre altura e freqüência, bem como entre intensidade musical e amplitude, em direção ao desenvolvimento da relação entre séries de Fourier e séries harmônicas, fundamentais no desenvolvimento do conceito de timbre.

Mais recentemente, Monteiro Jr., Medeiros, A. e Medeiros, C.F. (2003) propõem uma atividade prática no âmbito do estudo das progressões geométricas através da análise do padrão de intervalos das escalas cromática e diatônica. Partindo da premissa de que o padrão de intervalos da escala de doze tons (escala cromática) obedece a uma progressão geométrica de razão $\sqrt[12]{2}$, o autor descreve a construção desta escala, determinando através do cálculo dos termos desta progressão o valor das freqüências das notas musicais da oitava central do piano, cujo Lá (A) central possui freqüência padrão de $f = 220Hz$. Neste contexto de discussão, introduz o conceito de intervalo como sendo a razão entre as freqüências de duas notas musicais consecutivas, apresentando os diversos intervalos maiores, menores, justos, aumentados e diminutos. Partindo da escala cromática, constrói as escalas maior e menor natural, definindo seus padrões de intervalos. Em seguida, apresenta a lógica matemática embutida na construção da escala do braço do violão cujos trastes servem para diminuir o comprimento útil da corda na mesma razão da progressão geométrica apresentada acima. Finalmente, apresenta uma interessante oficina didática que se serve tanto para o ensino das progressões geométricas quanto para o ensino da mecânica ondulatória. Nesta oficina, propõe a construção de um conjunto de tubos sonoros cujos comprimentos seguem o padrão de intervalos da escala maior. Quando este conjunto de tubos é movimentado na vizinhança da orelha, o que se ouve é uma sequência de tons bem familiares que, na verdade, são os tons constituintes da escala maior. Tal experimento, além de possibilitar uma interessante ligação experimental entre matemática, física e música, possibilita ainda uma discussão no campo da percepção, na análise da relação entre estímulo físico e resposta fisiológica. No caso, permite a análise da relação entre freqüência natural de vibração e altura de uma nota musical. Muito embora a diminuição do comprimento nos doze tubos sonoros seja calculada, a partir do mais longo (freqüência fundamental), numa progressão geométrica de $\sqrt[12]{2}$, o que é percebido pelo ouvido é uma escala ascendente de graus iguais. O ouvido parece linearizar (percepção) uma progressão geométrica (estímulo físico).

Apesar do desinteresse de parte dos autores dos textos didáticos em optarem por uma apresentação mais contextualizada da matemática, muito são os resultados de pesquisa no ensino de diversos temas da matemática utilizando-se do universo da música. Como vimos acima, há uma riqueza muito grande de possibilidades de enriquecimento do ensino da matemática utilizando o universo da experiência sonora que os estudantes trazem para a sala de aula. É dentro desta linha de abordagem que propomos, a seguir, duas atividades práticas para aplicação no ensino das funções trigonométricas que se situam no contexto da análise das curvas de timbre de instrumentos musicais. Para tanto, faremos inicialmente uma análise da relação entre séries de Fourier e séries harmônicas, apresentando o conceito de timbre a partir destas duas idéias. Em seguida, faremos uma apresentação resumida das falhas encontradas nas apresentações textuais do conceito de timbre em livros didáticos do 2° ano do ensino médio.

AS SÉRIES DE FOURIER E AS SÉRIES HARMÔNICAS - O CONCEITO DE TIMBRE

A história do desenvolvimento da representação matemática do movimento de uma corda presa em suas extremidades foi marcada por uma célebre controvérsia que se desenrolou durante a segunda metade do século XVIII e que envolveu proeminentes físicos e matemáticos como Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), Leonhard Euler (1707-1783), Daniel Bernoulli (1700-1782) e Luigi de La Grange Tounier (1736-1813). Este período de disputa entre estes personagens acerca da solução do problema da corda vibrante levou a importantes avanços na matemática do século XVIII (WHELLER; CRUMMETT, 1987; KLEINER, 1993), além de ajudar a fundamentar a teoria física do movimento ondulatório. O conceito de função teve de ser estendido para incluir funções com várias expressões e curvas livres. Outro importante estruturante matemático impulsionado por este período de disputa foi a da representação de funções através das séries de Fourier. Contudo, a aceitação à época de que uma função pudesse ser decomposta e representada através uma série de seno e cosseno teve de ser acompanhada de uma ampliação de seu conceito, bem com do desenvolvimento do princípio da superposição. No caso do problema da corda vibrante, a superposição das vibrações. Como este modelo matemático veio a ser utilizado como solução para o problema da corda vibrante e, mais tarde, para a representação matemática dos componentes harmônicos de um som na análise espectral? A resposta foi primeiro encontrada num artigo de Georg Simon Ohm em 1843, intitulado "*On the Definition of a Tone with the Associated Theory of the Siren and Similar Sound Producing Devices*". Neste trabalho, Ohm faz um estudo pioneiro no campo da psicoacústica, incorporando elementos ao estudo da audição humana, inaugurando o estudo instrumental da percepção do som. Fazendo uso de aparatos como tubos sonoros, sirenes de discos, dentre outros, identificou relações entre a frequência de um som e a altura percebida por um ouvido normal. Analisou a influência das freqüências dos harmônicos na percepção de um som complexo. Segundo Ohm (1843), o ouvido analisa os sons complexos numa combinação de tons puros, sugerindo uma decomposição do que seria a série harmônica do som ouvido. Esse resultado foi redescoberto por Hermann Von Helmoltz em 1860 (DAINTITH; MITCHELL; TOOTILL, 1981). As contribuições de Ohm à psicoacústica foram o ponto de partida para os trabalhos de Lord Rayleigh e Helmoltz, tendo este último introduzido os ressonadores esféricos na análise de sons complexos, cujos estudos permanecem ainda como referência básica. As séries de Fourier nasceram num contexto de pesquisa alheio ao problema da corda vibrante. Fourier não estava preocupado com o desenvolvimento da acústica e sim com o problema da condutividade térmica. O modelo matemático desenvolvido por ele para explicar a propagação do calor nos sólidos levaram ao desenvolvimento de uma solução por séries de funções trigonométricas. Muito embora tal solução tenha se mostrado infrutífera no contexto da termodinâmica, levou ao desenvolvimento deste arcabouço matemático que seria utilizado por Ohm como solução matemática para o problema da vibração de uma corda.

A compreensão de que um som produzido por um instrumento musical é composto de tons puros, cuja superposição gera o som característico daquele instrumento é mais do que um princípio teórico, é uma idéia fundamental na aprendizagem do conceito de timbre. De fato, qualquer estratégia de ensino deste conceito deve incorporar reflexões acerca do princípio da superposição.

A decomposição de um som complexo em seus harmônicos é chamada de análise de Fourier e o conjunto destes harmônicos é chamado de série harmônica do som analisado. Nesta decomposição, cada um dos harmônicos possui uma freqüência própria e tem sua representação a partir de funções de seno ou cosseno. Suponhamos que f(t) seja uma função periódica de período $T = {}^{1}\!/_{f}$ representativa de um som complexo que se deseje analisar harmonicamente. De acordo com o teorema de Fourier (KREYSZIG, 1978, p. 491-520), qualquer função periódica pode ser decomposta numa série de funções trigonométricas de seno e cosseno (série de Fourier) da forma:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t + b_n sen\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t \qquad \text{cuja expansão será:}$$

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + b_1 sen\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \ldots + a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n sen\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + \ldots$$

Estes harmônicos, também chamados de parciais do som analisado, têm seus coeficientes determinados através das equações:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, sen\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt$$

Em geral, cada harmônico de um som é representado por uma função de seno ou cosseno com coeficiente ‘n’ inteiro que indica o número do harmônico, o qual possui sua freqüência e amplitude características. O primeiro harmônico da série é chamado de fundamental, o qual determina a freqüência e a altura da nota musical. Assim, quando nos referimos a uma nota musical emitida, por exemplo, por um violão, cuja freqüência seja de 440 Hz, devemos entender que esta freqüência é a freqüência do modo fundamental, do primeiro harmônico.

Quando tocamos, por exemplo, a corda de um violão, ela vibra fundamentalmente em toda a sua extensão, produzindo um harmônico fundamental cujo comprimento de onda é igual ao dobro do comprimento da corda. Contudo, vibra, ao mesmo tempo, no segundo modo normal, no terceiro, e assim sucessivamente, com freqüências que são, respectivamente, iguais a 2f, 3f e, assim, sucessivamente, onde f é a freqüência do modo fundamental. Este conjunto de parciais compõe a série harmônica do violão. Por exemplo, se tocamos a 6ª corda violão solta, tangendo-a próximo ao rastilho, a maior parte dos harmônicos serão exibidos. Sendo seu comprimento ‘l’, o comprimento de onda ‘λ’ e a freqüência de vibração ‘f’, os seis primeiros parciais de sua série harmônica serão:

Harmônico	λ	f (Hz)	Componente de Fourier	Nota	Intervalo em relação à tônica	Intervalo sobreposto
1°	$2.l$	82,407	$b_1.sen(wt)$	E_2		
2°	l	164,814	$b_2.sen(2wt)$	E_3	Oitava	Oitava
3°	$2l/3$	247,221	$b_3.sen(3wt)$	B_3	Quinta Justa	Quinta Justa
4°	$l/2$	329,627	$b_4.sen(4wt)$	E_4	Oitava	Quarta Justa
5°	$2l/5$	412,034	$b_5.sen(5wt)$	$G\#_4$	Terça Maior	Terça Maior
6°	$l/3$	494,441	$b_6.sen(6wt)$	B_4	Quinta Justa	Terça Menor

Quadro I: Harmônicos naturais da sexta corda (Mi) de um violão

Intervalo pode ser entendido como sendo a distância entre dois sons. Numa significação física, tal conceito está relacionado à razão entre as freqüências destes sons, ou seja, $I = f_2/f_1$. Por exemplo, o intervalo de quinta justa ocorre quando $I = 3/2$, o de quarta justa quando $I = 4/3$ e o de oitava, quando $I = 2$. Em música, diz-se que quando duas notas estão separadas por um intervalo de oitava, elas são iguais, e, toda escala musical começa e termina na mesma nota musical, separadas por um intervalo de oitava, ou seja, começa com uma nota de freqüência f e termina com a mesma nota, agora com freqüência 2f. Podemos então dizer que a estrutura harmônica moderna é baseada neste padrão de intervalos, conhecido como escala temperada ou escala cromática. Assim, para construirmos a escala cromática, dividimos o intervalo de oitava em 12 partes, numa progressão geométrica, criando-se, então, doze intervalos iguais em altura musical, chamados semitons. Desta forma, a freqüência de cada nota da escala cromática será vezes maior que a sua anterior, definindo uma progressão geométrica cuja razão é este número (MONTEIRO Jr.; MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. F. 2003). O quadro II mostra a disposição das notas musicais em sete oitavas.

NOTA MUSICAL	INTERVALO MUSICAL	OITAVAS (freqüências medidas em Hertz)						
		1ª	2 ª	3 ª	4 ª	5 ª	6 ª	7 ª
A	Uníssono	27,5	55	110	220	440	880	1760
A#/Bb	Segunda menor	29,2	58,3	116,5	233,1	466,2	932,3	1864,7
B	Segunda maior	30,9	61,7	123,5	246,9	493,9	987,8	1975,5
C	Terça menor	32,7	65,4	130,8	261,6	523,3	1046,5	2093
C#/Db	Terça maior	34,6	69,3	138,6	277,2	554,4	1108,7	2217,5
D	Quarta justa	36,7	73,4	146,8	293,7	587,3	1174,7	2349,3
D#/Eb	Quarta aumentada ou Quinta diminuta	38,9	77,8	155,6	311,1	622,3	1244,5	2489
E	Quinta justa	41,2	82,4	164,8	329,6	659,3	1318,5	2637
F	Quinta aumentada ou sexta menor	43,6	87,3	174,6	349,2	698,5	1396,9	2793,8
F#/Gb	Sexta maior ou sétima diminuta	46,2	92,5	185	370	740	1480	2960
G	Sétima menor	49	98	196	392	784	1568	3136
G#/Ab	Sétima maior	52	103,8	207,7	415,3	830,6	1661,2	3322,4
A	Oitava	55	110	220	440	880	1760	3520

SIMBOLOGIA PADRÃ O: Lá (A), Si (B), Dó (C), Ré (D), Mi (E), Fá(F), Sol (G) - Sustenido (#) e Bemol (b)

Quadro II: Frequências das notas da escala cromática nas sete oitavas do teclado do piano.

Como podemos ver no quadro II, as notas musicais se dispõem em cada oitava de Lá a Lá, segundo uma progressão geométrica. Se olharmos para os valores das freqüências de uma mesma nota musical (qualquer uma das linhas do quadro II), veremos que cada valor de freqüência desta dada nota numa determinada oitava será duas vezes o valor da sua freqüência na oitava anterior. Assim, temos que a série harmônica é o conjunto dos harmônicos (componentes de Fourier) que compõem um som complexo emitido por um instrumento. Por outro lado, tais freqüências, consideradas com suas respectivas intensidades, compõem o que chamamos de espectro sonoro ou espectro do som. Dois sons de mesma altura e mesmo volume, com a mesma série harmônica e espectro sonoro diferente, soarão diferentemente aos nossos ouvidos. Além destes dois fatores, outros ainda interferem no timbre de um instrumento musical, tais como as fases dos parciais, o ataque e o decaimento.

Outro fator igualmente importante na determinação do timbre de um instrumento musical diz respeito à eficiência das cavidades e de suas caixas ressonantes, tal como ocorre com o piano, o violino e o violão. Num instrumento como estes, o espectro sonoro das cordas pode ser fortemente alterado, dependendo da forma como a caixa do instrumento responde às diversas faixas de freqüência ressonantes. Cada uma das faixas de freqüência ressonantes é chamada de formante. As caixas ressonantes possuem vários formantes e, dependendo da eficiência de cada formante, alguns harmônicos superiores podem ter suas amplitudes aumentadas a valores, muitas vezes, maiores do que os alcançados pela amplitude inicial do harmônico fundamental. Muitas vezes, as caixas ressonantes possuem tantos modos normais de vibração, tão próximos uns dos outros, que a sua resposta se apresenta quase contínua para toda a série harmônica produzida pelas cordas. Podemos então entender que o timbre é a qualidade psicofisiológia do sistema auditivo que nos permite distinguir dois sons complexos de mesma magnitude e com a mesma freqüência fundamental, mas que possam diferir em uma ou mais características físicas, tais como série harmônica, espectro sonoro, ou outras temporais, tais como o ataque e o decaimento.

A partir desta análise, podemos aquilatar o caráter multidimensional do conceito de timbre. Sua conceituação deve contemplar, obviamente, todos estes detalhes, uma vez que todos influenciam o resultado do som de um instrumento. Qualquer tentativa de conceituação que se limite apenas à série harmônica de um instrumento musical é reducionista e distorcida. Muito embora a análise acima possa ser rica em detalhes e propicie ao estudante uma análise mais próxima da realidade do conceito de timbre, o que encontramos na maioria dos textos didáticos de ensino médio que tratam do conceito em questão está longe de uma proposta que permita ao estudante entender o que acontece por traz das afirmações que sugerem defini-lo. A seguir, analisaremos as falhas que comumente comprometem a qualidade deste material didático.

O CONCEITO DE TIMBRE NOS LIVROS DIDÁTICOS DO 2° ANO DO ENSINO MÉDIO

As pesquisas em análise de livros didáticos têm apontado que tais textos cometem frequentemente distorções na apresentação dos conteúdos da física clássica. Parte destas distorções conceituais deve-se à tentativa de tornar determinados conteúdos mais "fáceis" de serem ensinados. No processo de transposição didática, os autores insistem em simplificar ou tornar menos complexo aquilo que se pretende ensinar e o resultado é a quase ausência de um material didático que seja consonante com a natureza problemática da construção dos conceitos no processo de ensino e aprendizagem.

No caso da apresentação do conceito de timbre pelos livros didáticos de física, Monteiro Jr. (1999) aponta várias distorções de natureza conceitual. Nesta pesquisa foram analisadas as apresentações do conceito de timbre em dez livros do 2° ano do ensino médio, segundo as três categorias de análise apresentadas no quadro III. Como podemos ver neste quadro, quase a metade dos textos analisados não considera, nas suas apresentações do citado conceito, a existência de uma série harmônica, sendo o som emitido por um instrumento algo holístico e provido de uma essência sonora que o caracteriza. Nestes textos, a curva de timbre (forma de onda) é tomada como sendo o retrato característico resultante da vibração do instrumento como um todo. Não há a análise, em separado, da fonte vibrante (cordas ou colunas de ar) e do resto do instrumento (corpo, sistemas ressonantes, etc.).

POSICIONAMENTOS CONCEITUAIS	
É clara a relação entre altura de uma nota musical e freqüência do 1º harmônico ou fundamental, constituinte do som analisado. Neste caso, o timbre é explicado em termos da diferença entre os harmônicos superiores superpostos ao som fundamental.	6/10
O timbre é apresentado como algo holístico, em que os diversos harmônicos presentes são substituídos, distorcidamente, por um som único. Assim, a distinção entre as fontes é explicada em termos da distinção entre as formas de onda.	4/10
O timbre é apresentado distorcidamente como resultado da 'união' entre o som produzido pela fonte (corda do instrumento, por exemplo) e os harmônicos produzidos pelas outras partes do instrumento (colunas de ar, corpo, etc.).	2/10

Quadro III: O conceito de timbre nos livros didáticos analisados.

Nesta análise, partimos da definição de que a diferença de timbre entre duas fontes sonoras é causada pelos fatores discutidos acima. Por outro lado quando falamos de altura de uma nota, idéia fundamental na apresentação do conceito em questão, estamos nos referindo à freqüência do som fundamental (modo fundamental ou primeiro harmônico) (BACKUS, 1977, p. 107-118; BERG; STORK, 1995, p. 157-160; JOHNSTON, 1989, p.97-113; PIERCE, 1983, p. 89-101; RIGDEN, 1985, p. 66-88; ROSSING, 1989, p. 125-137).

Dos dez livros de 2º ano do ensino médio analisados, apenas seis iniciam a explicação do conceito de timbre partindo da premissa de que a altura e a freqüência, consideradas na comparação de notas iguais tocadas em instrumentos diferentes, são as do primeiro harmônico ou modo fundamental. Porém, na seqüência da abordagem, apenas cinco livros delineiam uma explicação consonante com a decomposição de Fourier, enquanto que um texto comete distorções conceituais ao admitir que, embora a diferença entre timbres de fontes sonoras distintas se dê na diferença entre suas séries harmônicas, estes harmônicos superiores não são produzidos pela fonte e sim, pelas outras partes do instrumento. É o caso do texto “Física 3” (PAULI; MAUAD; HEILMANN, 1980, p. 147 - 148), o qual afirma que

> Em geral, os sons emitidos são complexos, resultando da superposição do som fundamental com sons secundários emitidos pelo instrumento. Considere, por exemplo, um violão. O executante, ao dedilhar uma corda, produz uma vibração nesta corda; mas ela está presa ao corpo do instrumento, que se põe a vibrar juntamente com a corda. O som que nós ouvimos é a superposição do som fundamental com os vários sons secundários emitidos pelo instrumento. Quando as freqüências dos sons secundários são múltiplos da freqüência do som fundamental, os sons secundários são chamados harmônicos do som fundamental.

Vemos nesta transcrição que é atribuída ao instrumento a produção dos harmônicos superiores, sendo este instrumento posto a vibrar a partir da vibração da corda. Os quatro textos restantes cometem distorções que vão além da distorção cometida pelo texto acima citado. Todos eles apresentam o conceito de timbre partindo da comparação das formas de onda emitidas por fontes sonoras diferentes, evidenciando uma leitura holística na compreensão dos registros gráficos, sendo que um destes quatro livros atribuiu esta ‘forma de onda’ como sendo resultado da vibração do instrumento como um todo. É o caso do texto “Curso de Física” (LUZ; ALVARENGA, 1993, p. 857 - 858), o qual afirma que

> Se tocarmos uma certa nota de um piano e se esta mesma nota (mesma freqüência) for emitida, com a mesma intensidade, por um violino, seremos capazes de distinguir uma da outra, isto é, sabemos dizer claramente qual a nota que foi emitida pelo piano e qual foi emitida pelo violino. Dizemos, então, que estas notas têm timbres diferentes. Isto acontece porque a nota emitida pelo piano é o resultado da vibração não só da corda acionada, mas também de várias outras partes do piano (madeira, colunas de ar, outras cordas, etc.) que vibram juntamente com ela. Assim, a onda sonora emitida terá uma forma própria, característica do piano. De modo semelhante, a onda emitida pelo violino é o resultado de vibrações características deste instrumento e, por isto, apresenta uma forma diferente da onda emitida pelo piano. Na fig. 17-39 mostramos, em (a), a forma resultante de uma onda sonora, cuja freqüência é 440 Hertz, emitida por um violino e, em (b), a mesma nota (440 Hertz) emitida pelo piano. Então, sons de mesma freqüência, mas de timbres diferentes, correspondem a ondas sonoras cujas formas são diferentes. Portanto, podemos dizer que nosso ouvido é capaz de distinguir dois sons, de mesma freqüência e mesma intensidade, desde que as formas das ondas sonoras correspondentes a estes sons sejam diferentes. Dizemos que os dois sons têm timbres diferentes.

Esta transcrição deixa transparecer, muito embora não esteja explícito, que parece tratar-se de uma composição de um tom produzido pela fonte (corda do instrumento, por exemplo) e de outros tons produzidos pelas outras partes do instrumento, resultando numa forma de onda diferente para cada fonte sonora. Esta afirmação está em desacordo com a explicação paradigmática da análise física da corda vibrante, na qual tanto o modo fundamental como a série harmônica que o acompanha são produzidos na fonte sonora (HSU, 1973; SYMON, 1996). Neste caso, as outras partes do instrumento servem como ressonadores para os tons produzidos pela fonte vibrante, variando, assim, suas intensidades. Outro exemplo desta visão distorcida na explicação das diferenças de timbre de fontes sonoras pode ser encontrado no texto “Imagens da Física” (AMALDI, 1995, p. 220 - 221), o qual afirma que

> Dois sons que têm a mesma intensidade e a mesma altura podem diferir bastante entre si. De fato, são muito diferentes as impressões resultantes de sons de igual altura e intensidade, mas emitidos por um piano, por uma flauta e pela voz humana. O timbre é a característica que permite distinguir sons idênticos em altura e intensidade, mas provenientes de fontes distintas. Sons de timbres diferentes se diferenciam pela forma de onda.

Observemos que em tal transcrição não há menção alguma da existência de uma série harmônica, nem tampouco de que existe um primeiro harmônico que determina a altura e a intensidade do som emitido por fontes diferentes. Enfim, dos cinco textos que abordaram o conceito de timbre numa estratégia consonante com o modelo científico, o texto “Física na Escola Secundária” (BLACKWOOD; HERRON; KELLY, 1958, p. 365-369) foi o que abordou o citado conceito de uma forma mais aprofundada e mais rica em situações experimentais. Tal texto divide a apresentação do conceito de timbre em seções onde trata do estudo dos harmônicos (série harmônica), batimento, interferência, superposição, discute os modos normais de vibração das cordas sonoras através do sonômetro e finalmente, interpreta as curvas de timbre em termos da análise e síntese de Fourier, exemplificando com leituras dos registros gráficos do osciloscópio para instrumentos musicais diferentes. Afirma que “O timbre de um som depende das freqüências e das intensidades relativas dos harmônicos que o compõem”, e mais adiante completa esta definição afirmando que “O timbre nos habilita a distinguir dois sons de mesma intensidade auditiva e freqüência fundamental” (BLACKWOOD; HERRON; KELLY, 1958, p. 365-369). Em tal citação, podemos observar o cuidado do texto na apresentação dos conceitos de intensidade relativa (ao modo fundamental), intensidade auditiva (intensidade fisiológica) e freqüência fundamental (altura da nota musical). Tal abordagem nos serve de exemplo tanto pela profundidade com que trata os conceitos ligados ao timbre, como também pela riqueza interpretativa que se dá através das aplicações e exemplos práticos contidos no texto. Infelizmente, desde há muito tempo o texto didático em questão já não é mais utilizado nas escolas. Contudo, não é necessário que uma abordagem seja aprofundada para que seja precisa. Em outras palavras, uma síntese não tem que necessariamente resultar numa distorção.

Diante desta análise podemos observar que tanto a precisão na apresentação dos conceitos quanto a busca da contextualização dos conteúdos são atributos importantes na construção de um material didático mais comprometido com a qualidade de ensino. Em sintonia com esta preocupação, apresentamos a seguir duas sugestões de experiências didáticas que podem servir tanto a professores de matemática, quanto a professores de física no estudo das funções trigonométricas e da mecânica ondulatória.

EXPERIÊNCIA DIDÁTICA 1: SOMANDO FUNÇÕES DE SENO E COSSENO

De acordo com as considerações feitas anteriormente, na qual fizemos a análise da série harmônica do violão, podemos levar os alunos a produzirem suas próprias séries harmônicas. Podemos iniciar com parciais formados apenas por funções de seno com fase inicial nula, da forma:

$$f(t) = b_n.sen(w_n t) \;\; \Rightarrow \;\; f(t) = b_n.sen(2\pi ft)$$

Inicialmente podemos encorajar os estudantes a somarem componentes de Fourier de seno com a escolha de freqüências que guardem relações simples e inteiras. A cada um destes componentes é atribuído um valor de amplitude, formando, assim, os espectros sonoros. Por exemplo, podemos somar três parciais de uma série harmônica cujas freqüências sejam $f_1 = 50Hz$, $f_2 = 100Hz$ e $f_3 = 150Hz$. Sendo as amplitudes $b_1 = 1cm$, $b_2 = 0{,}5cm$ e $b_3 = 0{,}25cm$, as parciais de Fourier serão:

$$f_1(t) = sen(100\pi t) \;\; (\text{cm}, \text{s})$$

$$f_2(t) = 0{,}5sen(200\pi t) \text{ (cm, s)}$$

$$f_3(t) = 0{,}25sen(300\pi t) \text{ (cm, s)}$$

Podemos propor ainda que os alunos montem os gráficos, em papel milimetrado, de cada uma das parciais escolhidas e, em seguida, façam um esboço do gráfico resultante. Este gráfico resultante será a curva de timbre do espectro sonoro criado. No caso do exemplo acima, os gráficos dos parciais e o gráfico do timbre resultante serão da seguinte forma:

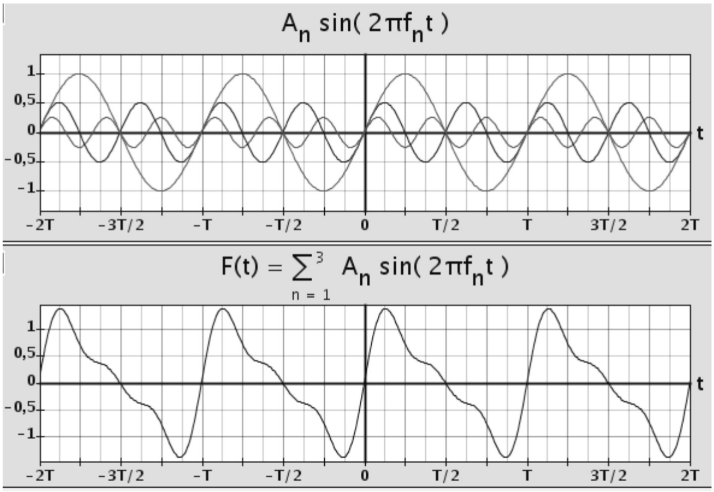

Figura I: Síntese dos três harmônicos utilizando o "Making Waves".

Uma atividade interessante que pode ser desenvolvida pelos estudantes numa sala de computadores é a reprodução do sinal de áudio num programa gerador de funções. Com tal programa, é possível ouvir o áudio da forma de onda resultante (síntese de Fourier). O som ouvido será, então, o timbre criado pelo estudante. Na web encontramos diversos programas 'freeware' que são geradores de ondas sonoras e 'rodam' no ambiente Windows. Desta forma, não há a necessidade de se instalar, previamente, nenhuma suíte de áudio mais poderosa como o Sonar da Cakewalk ou o Cubase da Steinberg. O uso de tais suítes pressupõe habilidades específicas do trabalho com 'homestudio' que são estranhas à maior parte dos professores. Dentre estes 'programinhas', há um muito interessante chamado 'Making Waves', desenvolvido pelo grupo de pesquisa PHET (Physics Education Technology Project) da Universidade do Colorado, no qual os gráficos acima foram gerados. Tal programa também está disponível no 'link' "recursos educacionais" do portal do professor, na página do Ministério da Educação.

Como atividade complementar, podemos ainda, com o auxílio de um osciloscópio, mostrar curvas de timbre de instrumentos musicais reais e compará-las com as sintetizadas eletronicamente. Podemos ainda mostrar nuanças das curvas de timbre da voz humana. Tais curvas podem representar o movimento de vibração das partes do ar, postas em vibração pelo funcionamento do instrumento musical e podem ser facilmente conseguidas utilizando um microfone com boa sensibilidade e fidelidade, ligado à estrada de sinal de um osciloscópio eletrônico. Outra alternativa seria utilizar um osciloscópio virtual. Semelhantemente aos programas geradores de ondas, há na web diversos programas 'freeware' para Windows que simulam o funcionamento de um osciloscópio real. Neste caso, bastaria instalar o programa num computador e ligar o microfone à sua entrada de áudio. Alguns destes osciloscópios virtuais já vêm com geradores de sinal e analisadores de espectro que permitem realizar diversas simulações no estudo das curvas de timbre. Esta alternativa é mais adequada, pois muitas escolas não possuem osciloscópios, mas contam com computadores para uso didático.

As figuras II, III e IV mostram as curvas de timbre de três instrumentos musicais, sintetizadas num teclado Yamaha e registradas num osciloscópio eletrônico. Embora estas curvas sejam tão diferentes umas das outras, possuem um ponto em comum: são todas compostas de curvas básicas de seno e cosseno. Uma vez conhecendo-se os harmônicos componentes de cada curva, bem como suas características, é possível, reproduzir estas curvas num sintetizador eletrônico ou ainda utilizando um bom sintetizador virtual.

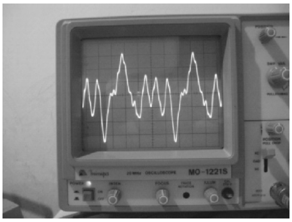

Figura II: Acordeon

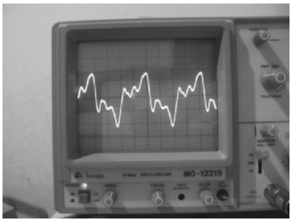

Figura III: Clarinete

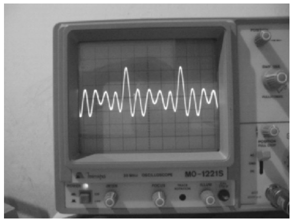

Figura IV: Oboé

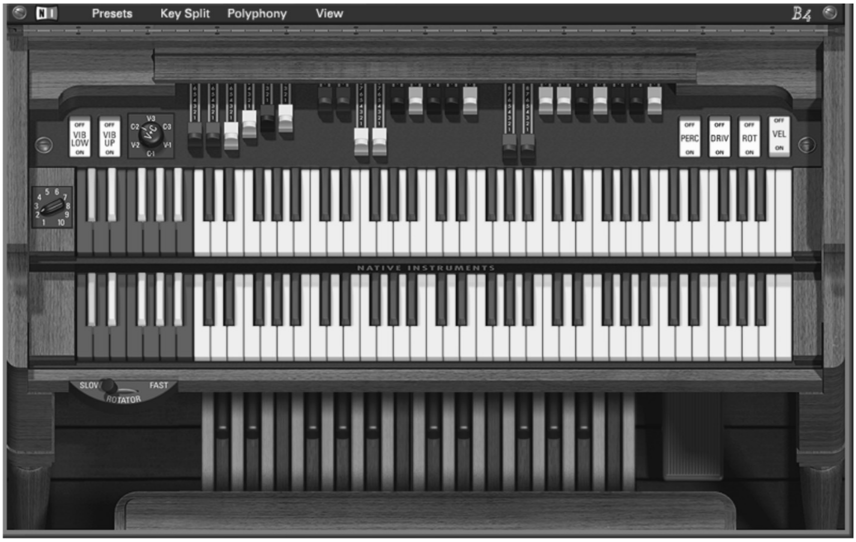

Figura V: Janela dos teclados e pedaleira do órgão virtual B4 da Native Instruments.

Figura VI: Janela dos 'drawbars' e efeitos de áudio do órgão virtual B4 da Native Instruments.

O software vem com 120 'presets' de timbres de órgão pré-fabricados. Além de permitir a edição destes 'presets', permite ainda a criação de outros timbres através dos três conjuntos de tirantes (Drawbars), mostrados no detalhe da figura VII.

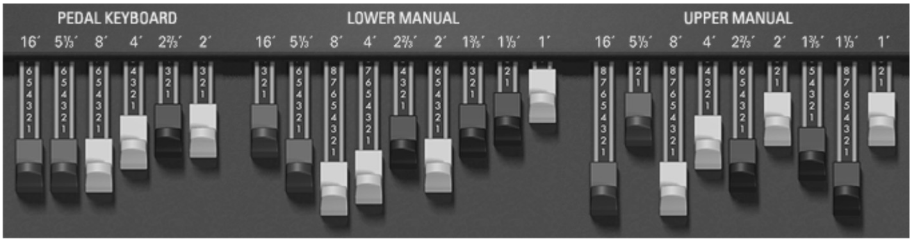

Figura VII: Detalhes dos conjuntos de tirantes (drawbars) do órgão virtual B4 da Native Instruments.

O conjunto da esquerda possui seis tirantes que servem para sintetizar a série harmônica e gerar o espectro sonoro dos baixos das duas oitavas dos pedais (pedal keyboard). Os conjuntos de tirantes do meio e da direita são iguais e possuem nove chaves. São responsáveis, respectivamente, pela sintetização da série harmônica e espectro sonoro do teclado inferior (lower manual) e do superior (upper manual). Cada um dos tirantes gera um harmônico (parcial da série). A quantidade em que cada um é movido para baixo ou para cima determina a amplitude do harmônico, conforme mostra a figura VIII.

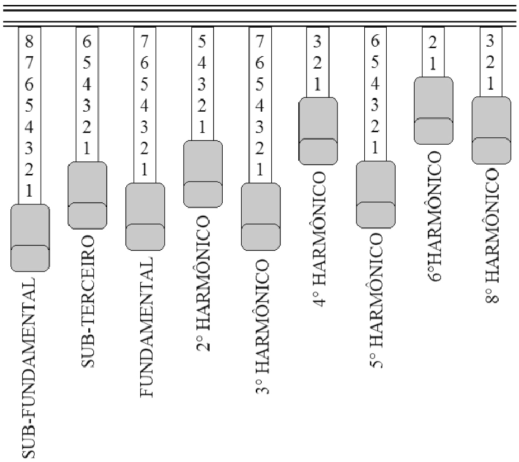

Figura VIII: Parciais dos conjuntos de tirantes.

O exemplo utilizado acima ilustra a riqueza interpretativa que pode ser emprestada a um recurso didático no âmbito do estudo das séries de Fourier. Como este software, existe uma vasta quantidade de sintetizadores que podem ser instalados e utilizados em sala de aula. Existe ainda a possibilidade de acoplar ao computador um controlador MIDI e, neste caso, operar os softwares sintetizadores através deste dispositivo.

EXPERIÊNCIA DIDÁTICA 2: REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DO BATIMENTO

Outra atividade experimental que pode ser desenvolvida no âmbito do estudo das funções trigonométricas é a representação matemática dos batimentos sonoros. Batimento[2] é a composição de duas vibrações superpostas. No caso de ondas sonoras, o batimento é particularmente notável, pois a flutuação da amplitude do som resultante pode ser facilmente percebida pela audição. Se dois tons puros, de amplitudes A_1 e A_2, possuem uma pequena diferença de freqüência, de tal forma que sejam, respectivamente, f_1 e $f_2 = f_1 + \Delta f$, o resultado da superposição destas duas vibrações será uma onda de amplitude variável, cuja variação se dará entre $A = A_1 + A_2$ e $A = A_1 - A_2$ (para $A_1 > A_2$) a uma frequência que será a diferença entre as freqüências Δf. Por outro lado, o som ouvido terá uma freqüência que será a média das freqüências dos sons superpostos, qual seja $f = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$.

O fenômeno do batimento também pode ser facilmente visualizado através do mesmo software utilizado na experiência didática 1. A figura IX mostra os gráficos de duas ondas sonoras que se interferem, resultando num batimento sonoro cujo gráfico está mostrado na figura X. Como podemos ver na figura X, a variação da amplitude deste gráfico constitui-se na representação da flutuação sonora que ouvimos quando o batimento sonoro ocorre. Com tal software, podemos alterar os valores das amplitudes e das freqüências dos sons que se interferem, observando as variações que ocorrem no gráfico da onda resultante. Podemos observar, por exemplo, que quando as amplitudes dos dois sons não são iguais, a amplitude do batimento variará de um máximo, que será a soma das amplitudes dos dois sons, até um mínimo que será a diferença entre essas amplitudes. No caso de os dois sons possuírem a mesma amplitude, a diferença entre elas será nula e o gráfico do batimento terá amplitude mínima nula, que é o exemplo da figura X. Por outro lado, quanto menor a diferença entre as frequências das ondas que compõem o batimento, mais lento ele será e mais fácil de ser percebido pela audição.

[2] Para um estudo mais detalhado, consultar French (2001, p.36-41).

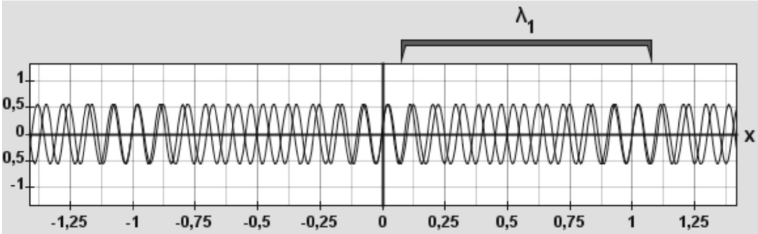

Figura IX: Gráficos de duas ondas sonoras de frequências muito próximas

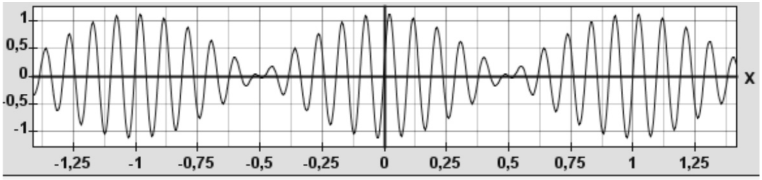

Figura X: Gráficos da onda resultante

As figuras XI e XII mostram o batimento registrado no osciloscópio de dois tons senoidais puros, gerados num sintetizador Yamaha. No caso da esquerda, o intervalo é uma sétima maior, enquanto que no caso da direita, o intervalo é de sétima menor. É fácil perceber que, no caso da sétima menor, as freqüências estão mais próximas e, consequentemente, o batimento ouvido é mais lento. Na verdade, quando uma nota se aproxima cada vez mais da outra, o batimento fica gradativamente mais lento. Próximo do uníssono, a freqüência de batimento torna-se tão pequena que há a dificuldade até de percebê-lo.

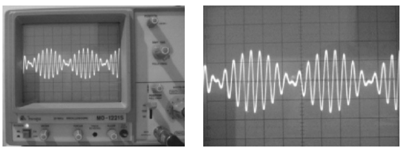

Figura XI: Batimento de sétima maior

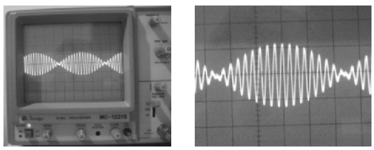

Figura XII: Batimento de sétima menor

No âmbito do estudo das funções trigonométricas, podemos propor aos alunos atividades envolvendo batimentos. Numa primeira etapa, podemos propor que cada aluno escolha um par de funções simples de seno, representativas de duas ondas sonoras. Por exemplo, duas ondas sonoras de frequências 50Hz e 52 Hz, tais como:

$$f_1(t) = 4sen(100\pi t) \qquad \text{e} \qquad f_2(t) = 4sen(104\pi t)$$

Neste caso, a freqüência de batimento será 2 Hz e a frequência do som ouvido será 51 Hz. Neste caso, ouviremos um som de freqüência 51 Hz e cuja amplitude variará do máximo ao mínimo e de volta ao máximo duas vezes a cada segundo. Com base nestes dados, podemos pedir que eles esbocem o gráfico representativo deste batimento.

Uma vez discutidos os princípios do fenômeno dos batimentos, podemos aplicá-los na análise do processo de afinação de um violão. Um instrumentista, ao afinar um violão, busca o uníssono. A figura XIII mostra um esquema da escala do braço do violão de seis cordas.

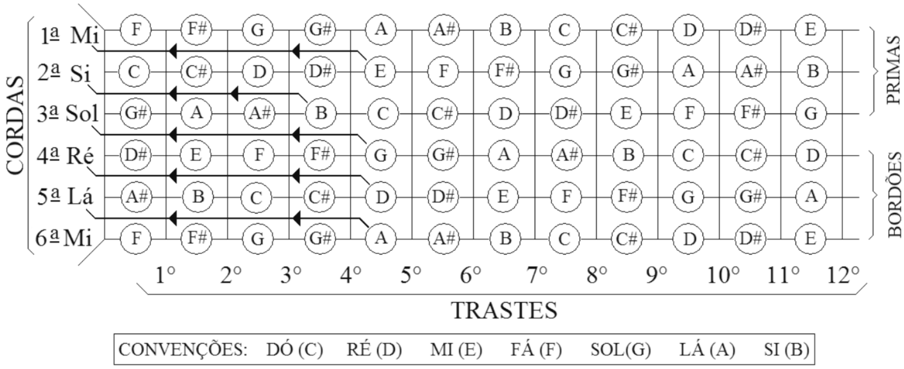

Figura XIII: Notas musicais na escala do violão

Segundo Chediak (1986), as cordas podem ser numeradas de 1 a 6, da menos espessa (mais aguda) até a mais espessa (mais grave). Para o violão de seis cordas, a afinação mais comum é respectivamente da 6ª à 1ª cordas, Mi-Lá-Ré-Sol-Si-Mi (E-A-D-G-B-E). Uma vez que a escala do braço do violão obedece ao mesmo padrão de intervalos da escala cromática, ou seja, a progressão geométrica de $\sqrt[12]{2}$ (MONTEIRO Jr; MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. F. 2003), a 6ª corda (Mi), afinada com um diapasão numa freqüência de 82,407 Hz, pressionada no quinto traste, produzirá um intervalo de quarta justa que, no caso, será a nota Lá (110 Hz), conforme mostrado na figura XIII. Desta forma, a sexta corda, pressionada no quinto traste tem que estar em uníssono (mesma freqüência) com a 5ª corda solta (Lá) e, neste caso, não haverá batimento, e o efeito característico da flutuação da amplitude não será detectado pelo ouvinte. Por outro lado, se a 5ª corda (Lá) estiver desafinada, o instrumentista, então, modificará a tensão na corda, esticando-a ou distendendo-a através da tarraxa, até que o batimento cesse, alcançando, assim, a afinação. Todo o processo se repete para afinar as outras quatro cordas. A 4ª corda a partir da 5ª corda, a 3ª corda a partir da 4ª corda, a 2ª corda a partir da 3ª corda e a 1ª corda a partir da 2ª corda. A única mudança ocorre quando afinamos a 2ª corda. Neste caso o uníssono ocorre no 4° traste da 3ª corda (B) e não no 5° traste, como nas demais cordas. Na verdade, o processo pode ser começado de qualquer corda, desde que a corda escolhida seja previamente afinada com o auxílio de um diapasão na sua freqüência padrão. O quadro IV mostra os valores das freqüências das notas das seis cordas do violão.

6ª CORDA – E	5ª CORDA – A	4ª CORDA – D	3ª CORDA – G	2ª CORDA – B	1ª CORDA – E
82,407 Hz	110 Hz	146,832 Hz	195,997 Hz	246,942	329,628

Quadro IV: Frequências fundamentais das cordas do violão

O interessante deste processo, que pode ser trabalhado com os alunos, é que é necessário concentrar-se no comportamento do batimento, ou seja, na freqüência com que a amplitude flutua. Quanto mais se aproxima do uníssono, a freqüência de batimento, que é a diferença entre as frequências, diminui. Por outro lado, quando nos afastamos da afinação, a frequência de batimento aumenta e a flutuação de amplitude fica mais rápida. Desta forma, fica fácil perceber se estamos nos aproximando ou nos afastando do uníssono.

Toda esta experimentação pode ainda ser visualizada, utilizando-se um osciloscópio. Para tanto, basta ligar a entrada de sinal do osciloscópio eletrônico à saída de áudio do violão. Caso o violão não possua tal tomada, podemos utilizar um microfone para captar seu som. Podemos, ainda, utilizar um computador com um osciloscópio virtual instalado. Neste caso, ligamos a saída de áudio do violão ou o microfone à entrada de áudio do computador.

Conclusão

Na literatura, encontramos uma vasta quantidade de experiências didáticas, ligando matemática e música, no ensino de variados conteúdos matemáticos. Desde experimentos simples até oficinas mais complexas, o uso de recursos desta natureza será sempre fundamental. A experiência é o caminho e o interpretar a aprendizagem. Um experimento que o professor realiza pode deixar marcas, ser o motor através do qual a dificuldade na aprendizagem de um determinado conceito possa ser ultrapassada. Desde conceitos básicos tais como andamento, duração e altura, até estruturas conceituais mais complexas, quanto aquelas necessárias ao entendimento do conceito de timbre, tanto os professores de física e de ciências quanto os professores de matemática e de música poderiam beneficiar-se mais em considerá-las, amadurecendo possíveis estratégias de abordagem utilizando a interface entre matemática, física e música. A despeito das estreitas relações entre tais campos de estudo que se podem levantar através do estudo histórico do desenvolvimento da acústica musical, muitos dos nossos colegas ainda demonstram um grande desconhecimento de tal interface, negligenciando aquilo que poderia constituir-se em importantes ferramentas no desenvolvimento de transposições didáticas no ensino da matemática. Nesta pesquisa, buscamos resgatar não somente uma interessante ligação entre matemática e música, subjacente ao desenvolvimento das funções trigonométricas, mas também este espírito da busca de um ensino interdisciplinar, multifacetado, aproximando o ensino da matemática a tantas outras experiências vivenciadas por nossos estudantes. Ao invés de esconder a complexidade, o ensino do conceito de timbre poderia ser mais bem apresentado pelos livros textos se as idéias de série harmônica e análise de Fourier fossem antes ensinadas e, assim, a mágica embutida na afirmação de que "o timbre é a qualidade do som que nos permite reconhecer a fonte..." pudesse ser substituída pela lógica de que os sons emitidos por instrumentos são compostos por um conjunto de tons puros cuja representação matemática é feita através das funções de seno e cosseno. Por outro lado, o ensino das funções trigonométricas poderia ser mais interessante se aplicações práticas como as aqui propostas pudessem fazer parte das 'tarefas' dos textos didáticos e dos professores. Por fim, os alunos poderiam beneficiar-se mais se o ensino das funções trigonométricas e o ensino da mecânica ondulatória pudessem se interligados e acrescidos do uso da história, das reconstruções experimentais históricas e da acústica musical.

Livros didáticos analisados

AMALDI, U. **Imagens da Física**. São Paulo: Scipione, 1995. p.219-221.

BLACKWOOD, O. H.; HERRON, W. B.; KELLY, W. C. **Física na Escola Secundária**. Rio de Janeiro: Fundo de Cultura, 1968. p.365-369.

BONJORNO, J. R.; BONJORNO, R. F. S. A.; BONJORNO, V. **Física**. São Paulo: FTD, 1985. v.2. p.250-251.

CALÇADA, C. S.; SAMPAIO, J. L. **Física Clássica**. São Paulo: Atual, 1985. v.5. p.438-440.

LUZ, A. M. R.; ALVARENGA, B. **Curso de Física**. São Paulo: Harbra, 1993. v.2. p.856-858.

OLIVEIRA, P. C. **Princípios da Física 2**. Belo Horizonte: Lê, 1993. p. 376-377.

PARANÁ, D. N. **Física**. 4ª ed. São Paulo: Ática, 1995. v.2. p.338-341.

PAULI, R. U.; MAUAD, F. C.; HEILMANN, H. P. **Física 3**. São Paulo: Pedagógica e Universitária, 1980. p.147-148.

RAMALHO Jr., F.; SANTOS, J. I. C.; FERRARO, N. G. **Os fundamentos da Física**. São Paulo: Moderna, 1979. v.2. p.427-429.

SANTOS, J. I. C. **Conceitos de Física**. São Paulo: Ática, 1988. v.2. p.134-135.

Referências

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música:** o pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: Escrituras editora, 1999.

ARNOLD, S. Mathematics - A Search for Harmony. **Australian Mathematics Teacher,** Adelaide, Australia, v. 47, n. 4, p. 14 - 16, dec. 1991.

BACKUS, J. **The acoustical foundations of music**. New York: W.W. Norton, 1977.

BENADE, A. H. **Fundamentals of musical acoustics**. 2nd ed., New York: Dover Publications, 1990.

BERG, R. E.; STORK, D. G. **The physics of sound**. New Jersey: Prentice-Hall, 1995.

CHEDIAK, A. **Harmonia e improvisação**. Rio de Janeiro: Lumiar editora, 1986.

DAINTITH, J.; MITCHELL, S.; TOOTILL, E. **Biographical enciclopaedia of scientists**. Aylesbury/UK: Chambers Ed., 1981.

FRENCH, A. P. **Vibrações e ondas**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2001.

HSU, H. P. **Análise de Fourier**. Rio de Janeiro: LTC, 1973.

JOHNSTON, I. **Measured tones**. Philadelphia: Institute of Physics, 1989.

KLEINER, I. Functions: Historical and Pedagogical Aspects. **Science & Education**, Dordrecht, Netherlands: Springer, v. 2, n. 2, p. 183-209, 1993.

KREYSZIG, E. **Matemática superior**. v. 3. Rio de Janeiro: LTC, 1978.

LEVARIE, S.; LEVY, E. **Tone:** a study in musical acoustics. Ohio: Kent State University Press, 1980.

LINDSAY, R. B. **Acoustics:** historical and philosophical development. USA: DH&R Inc., 1973.

MACONIE, R. **The sciece of music**. Oxford: Claredon Press, 1997.

MALCOLM, P. Mathematics of Musical Scales. **Mathematics Teacher,** Adelaide, Australia, v. 65, n.7, p.611-615, nov. 1972.

MATTÉI, J. F. **Pitágoras e os pitagóricos**. São Paulo: Paulus Editora, 2000.

MONTEIRO Jr, F. N. **Síntese ou Distorção:** como os livros didáticos apresentam o conceito de timbre? 1999, 206+45p. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências), Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE, Recife/PE, 1999.

MONTEIRO Jr, F. N.; MEDEIROS, A. A. Matematização da Corda Vibrante no Seculo XVIII. In: MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. F. (Org.). **O concreto-abstrato na educação em física e em matemática**. Recife: UFRPE Editora Universitária, 2001a. p. 118-134.

MONTEIRO Jr, F. N.; MEDEIROS, A. O Século XIX e as Séries de Fourier. In: MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. F. (Org.). **O concreto-abstrato na educação em física e em matemática**. Recife: UFRPE Editora Universitária, 2001b. p. 135-144.

MONTEIRO Jr, F. N.; MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. F. Matemática e Música: as Progressões Geométricas e o Padrão de Intervalos da Escala Cromática. **Bolema**, Rio Claro/SP, ano 16, n. 20, p. 101-126, 2003.

NISBET, S. Mathematics and Music. **Australian Mathematics Teacher ,** Adelaide, Australia, v. 47, n. 4, p. 4-8, dec. 1991.

OHM, G. S. On the definition of a tone with the associated theory of the siren and similar sound producing devices. In: Lindsay, R. B. (Org.). **Acoustics**: historical and philosophical development. Stroudsburg: Dowden, Hutchingon & Ross Inc. USA, 1973, pp. 124-130.

PIERCE, J. R. **The science of musical sound**. New York: W. H. Freeman, 1983.

RIGDEN, J. S. **Physics and the sound of music**. New York: John Wiley & Sons, 1985.

ROEDERER. J. G. **Introdução à física e psicofísica da música**. São Paulo: EDUSP, 1998.

ROSSING, T. D. **The science of sound**. USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

ROTHSTEIN, E. **Emblems of Mind:** the inner life of music and mathematics. USA: Avon Books, 1996.

SYMON, K. R. **Mecânica**. Rio de Janeiro: Campus, 1996.

WHELLER, G. F.; CRUMMETT, W. P. The Vibrating String Controversy. **American Journal of Physics**, College Park, Maryland, v. 55, n. 1, p. 33-37, 1987.

Submetido em Fevereiro de 2009
Aprovado em Abril de 2009