ISSN 0103-636X

Algunos Indicadores del Desarrollo del Esquema de Derivada de una Función

Some Indicators of the Development of Derivative Schema

Gloria Sánchez-Matamoros*
Mercedes García**
Salvador Llinares***

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada en estudiantes de pos-secundaria. Usamos los niveles intra, inter y trans del desarrollo de un esquema propuestos por Piaget y García para caracterizar el uso flexible que los estudiantes hacen de la *equivalencia lógica* entre diferentes elementos matemáticos cuando resuelven un problema, como un indicador del desarrollo del esquema de derivada. Este indicador ayuda a explicar la transición entre los niveles inter y trans de desarrollo del esquema derivada.

Palabras claves: Desarrollo de la Comprensión. Esquema. Fases del Desarrollo de un Esquema.

* Doctora por la Universidad de Sevilla (US). Profesora de la Universidad de Sevilla (US). Facultad Ciencias de la Educación. Departamento Didáctica de las Matemáticas. Dirección postal: C/ Pirotecnia s/n, 41013, Sevilla, España. *E-mail:* gsanchezmatamoros@us.es.
** Doctora por la Universidad de Sevilla (US). Profesora de la Universidad de Sevilla (US). Facultad Ciencias de la Educación. Departamento Didáctica de las Matemáticas. Dirección postal: C/ Pirotecnia s/n, 41013, Sevilla, España. *E-mail:* mgblanco@us.es.
*** Doctor por la Universidad de Sevilla (US). Profesor de la Universidad de Alicante. Faculta de Educación. Departamento de Formación e Innovación Didáctica. Dirección Postal: Campus de Sant Vicent del Raspeig 03080, Alicante, España. *E-mail:* sllinares@ua.es.

Abstract

The aim of this study is to identify some indicators of post-secondary students' development of derivative schema. In order to identify these indicators we use intra, inter and trans levels of development of a schema provided by Piaget and García. We argue that students' flexible use of the logical equivalence between mathematical elements when solving a problem is an indicator of the development of the derivative schema. This characterization helps to explain the transition between the levels inter and trans of the development of derivative schema.

Keywords: Development of Understanding. Schema. Levels of Development of a Schema.

1 Introducción

El análisis de la comprensión del concepto de derivada ha sido abordado desde distintas perspectivas utilizando diferentes constructos teóricos:

- Esquema conceptual (AZCÁRATE, 1990) e imagen del concepto (TALL, 1989).
- Mediante una aproximación piagetiana del conocimiento a través de la teoría APOS: Acción, Proceso, Objeto y Esquema, que es una reformulación y adaptación de las ideas de Piaget al aprendizaje de las matemáticas (ASIALA et al., 1997; DUBINSKY, 1991) y al desarrollo de un esquema (BAKER; COOLEY; TRIGUEROS, 2000; CLARK et al.,1997; GARCÍA; LLINARES; SÁNCHEZ-MATAMOROS, 2011; SANCHEZ-MATAMOROS, 2004; SÁNCHEZ-MATAMOROS; GARCÍA; LLINARES, 2006).
- Considerando el papel de las representaciones en el desarrollo de los significados (FONT, 1999; HABRE; ABBOUD, 2006)
- Las teorías de la reificación (SFARD, 1992), que se centran en los vínculos proceso-objeto (ZANDIEH, 2000).

Estas investigaciones muestran:

- la existencia de conflictos e inconsistencias entre las construcciones que realizan los estudiantes y los significados formales que presentan los libros de texto (FERRINI-MUNDY; GRAHAM, 1994);
- la influencia de los contextos (AZCÁRATE, 1990) y de los modos de representación gráfico y analítico en la construcción de los significados por parte de los estudiantes (FERRINI-MUNDY; GRAHAM, 1994);
- así como la importancia de la relación entre la noción de derivada en

un punto ($f'(a)$) y la función derivada ($f'(x)$) (BADILLO; AZCARATE; FONT; 2011).

Además, estas investigaciones han identificado dificultades referidas a la comprensión de la diferenciación y a la gráfica asociada a la idea de velocidad de cambio (ORTON, 1983). En particular, las dificultades de los estudiantes en relacionar los modos de representación gráfico y analítico se ponen de manifiesto cuando en contextos gráficos los estudiantes solicitan la expresión analítica de la función para resolver determinadas cuestiones (ASIALA et al., 1997). En este contexto el uso de los registros gráfico y algebraico apoya la comprensión de la derivada como modelo matemático de conceptos económicos (ARIZA; LLINARES, 2009).

Algunas de estas investigaciones han caracterizado la comprensión de los estudiantes de la derivada considerando su comportamiento ante aspectos característicos de las funciones, como la existencia de puntos cúspides, tangentes verticales, cambios en las condiciones de continuidad y características de la segunda derivada (BAKER; COOLEY; TRIGUEROS, 2000). Por ejemplo, Biza y Zachariades (2010) indican que los estudiantes preuniversitarios, como consecuencia de no haber construido una imagen apropiada de la idea de tangente, tenían dificultades en el uso de las tangentes en un punto de inflexión o en entender lo que significaba que la recta tangente tuviera más de un punto en común con el gráfico.

Estas investigaciones aportan información sobre las características de la comprensión del concepto de derivada y han empezado a proporcionar indicadores de cómo se desarrolla dicha comprensión en tres ámbitos. El primero, relativo a la relación entre los conceptos de razón de cambio y cociente incremental. El segundo, el papel desempeñado por los sistemas de representación cuya integración es necesaria para el desarrollo del esquema. Finalmente, la relación entre la derivada de una función en un punto, la función derivada y el operador derivada (SÁNCHEZ-MATAMOROS; GARCÍA; LLINARES, 2008). Esta información nos ha permitido conocer mejor las características de la comprensión del esquema de derivada y algunas de las dificultades de los estudiantes pero no aportan indicadores de su desarrollo.

2 Marco teórico

Una manera de caracterizar el desarrollo de un esquema es a través de la metáfora de la construcción de un objeto que se puede manipular en sí mismo a partir de un proceso que, generalmente, es realizado paso a paso (SFARD, 1992; TALL et al., 2000). En particular, la aproximación al desarrollo de un esquema propuesto por Piaget y García (1982) permite abordar la caracterización en el caso de la derivada de una función. Un esquema es "la estructura o la organización de acciones, tales como se transfieren o se generalizan con motivo de la repetición de una acción determinada en circunstancias iguales o análogas" (PIAGET; INHELDER, 1978, p. 20).

Piaget y García (1982) caracterizan tres niveles, intra, inter, trans, mediante un mecanismo denominado *abstracción reflexiva* (reflective abstraction en inglés). Este mecanismo cognitivo permite a los individuos generar de manera paulatina conexiones entre diferentes ítems cognitivos mediante dos procesos. Por una parte, una proyección de algo conocido en un nivel hacia otro nivel (*reflechissement*) y una *reflexión* en el sentido de una reconstrucción cognitiva (más o menos consciente) o reorganización de lo que ha sido transferido (PIAGET, 1975, p. 41). En estos momentos es posible distinguir el desarrollo como un proceso de construcción y el pensamiento como un proceso de tematización retroactiva (*a reflecting on reflection; abstraction reflechie – reflected abstraction or pensee reflexive- reflective thought*). Los diferentes niveles construidos de esta manera permiten usar las conexiones que un individuo puede hacer entre construcciones particulares dentro de un esquema y la coherencia de estas conexiones para describir el desarrollo de un esquema. De manera particular los niveles intra, inter y trans propuestos por Piaget y Garcia (1982) pueden describirse como:

• Intra:

> […] lo propio de este periodo es el descubrimiento de una acción operatoria cualquiera, y la búsqueda del análisis de sus diversas propiedades internas o de sus consecuencias inmediatas, pero con una doble limitación. En primer lugar, no hay coordinación de esta preoperación con otras en un agrupamiento organizado; pero además, el análisis interno de la operación en juego se acompaña de errores que se corregirán progresivamente, así como de lagunas en la inferencia que de ella puedan deducirse (PIAGET; GARCIA, 1982, p. 163).

De esta manera, la fase intra del desarrollo de un esquema viene caracterizada por un foco sobre acciones, proceso y objetos de manera aislada de otros ítems cognitivos de una naturaleza similar.

• Inter:

> […] una vez comprendida una operación inicial es posible deducir de ella las operaciones que están implicadas, o de coordinarlas con otras más o menos similares, hasta la constitución de sistemas que involucran ciertas transformaciones. Si bien hay aquí una situación nueva, existen sin embargo limitaciones que provienen del hecho de que las composiciones son restringidas ya que solamente pueden proceder con elementos contiguos (PIAGET; GARCIA, 1982, p.165).

Es decir, la fase inter viene caracterizada por la construcción de relaciones y transformaciones entre estas construcciones cognitivas. En esta fase un individuo puede empezar a agrupar ítems juntos e incluso denominarlos por el mismo nombre.

• Trans: "es fácil de definir en función de lo que precede, como involucrando, además de las transformaciones, síntesis entre ellas. Dichas síntesis llegan a la construcción de "estructuras"" (p.167). Es decir, en el nivel trans los individuos construyen una estructura implícita o explícita mediante la cual las relaciones generadas en el nivel inter se comprenden y da al esquema una coherencia mediante la cual el individuo puede decidir lo que pertenece al ámbito del esquema y lo que no. La idea de *síntesis* se entiende el proceso por el que a partir de una cosa que se conoce, realizando operaciones con/sobre ella se llega a la conclusión y a la comprensión de algo que no se conocía.

Desde esta perspectiva, Dubinsky (1991) señala que el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a problemas percibidos a través de la (re-) construcción de (nuevos) esquemas con los cuales tratar con esas situaciones. Este investigador describe un esquema como la totalidad del conocimiento que está conectado (consciente o inconscientemente) con un tópico matemático particular. Posteriormente, Baker, Cooley, Trigueros (2000) señalaron que una teoría del desarrollo de un esquema puede explicar por qué los estudiantes tienen dificultades con diferentes partes de un tema e incluso, con la misma parte, pero en situaciones distintas. En su estudio definen un *esquema desarrollado* – tematizado – como una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, previamente construidos, que son coordinados y sintetizados por el individuo para formar estructuras utilizadas en la resolución de problemas matemáticos y que muestran la coherencia del esquema al discernir cuando el esquema es aplicable o no. De esta manera, el desarrollo de un esquema a través de los niveles intra, inter, trans se caracteriza por el tipo de relación – *coordinación de operaciones* en términos piagetianos – que los estudiantes son capaces de establecer entre los elementos matemáticos del esquema cuando resuelven un problema (BAKER; COOLEY; TRIGUEROS, 2000; CLARK et al., 1997; SÁNCHEZ-MATAMOROS; GARCÍA; LLINARES, 2006).

Desde estas caracterizaciones generales, un indicador del desarrollo del esquema es el *tipo de relación* que los estudiantes son capaces de establecer entre los *elementos matemáticos* cuando resuelven problemas. La forma en la que los estudiantes establecen relaciones entre diferentes elementos matemáticos, cuando están resolviendo un problema matemático, puede ser vista como la forma en la que los estudiantes reorganizan y reconstruyen el conocimiento para formar nuevas estructuras (SÁNCHEZ-MATAMOROS; GARCÍA; LLINARES, 2006). En nuestras investigaciones nos referimos a un esquema como: "la estructura matemática formada por los elementos matemáticos y las relaciones lógicas que se establecen entre ellos que puede ser evocados para la resolución de un problema" (SÁNCHEZ-MATAMOROS; GARCÍA; LLINARES, 2008, p. 284). De esta manera el desarrollo de un esquema viene determinado por el tipo de relaciones lógicas que el resolutor de un problema usa. Así, los tres niveles de desarrollo de un esquema los caracterizaremos como:

Intra: no se establecen relaciones lógicas, y los posibles esbozos de relación (del tipo conjunción lógica) se realizarán con errores. Los estudiantes usan los elementos matemáticos de forma aislada (y a veces de forma incorrecta).

Inter: los estudiantes establecen relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, pero con limitaciones, predominando el uso de la conjunción lógica relacionando sólo elementos matemáticos que se encuentren en el mismo modo de representación analítico o gráfico. El estudiante es capaz de usar más elementos matemáticos de forma correcta que en el nivel anterior.

Trans: aumenta el repertorio de las relaciones lógicas que el estudiante es capaz de establecer entre diferentes los elementos matemáticos (*y lógica*, contrarrecíproco, y equivalencia lógica). En este nivel se produce la *síntesis* de los modos de representación y lleva a la construcción de la estructura matemática. La *síntesis* se aplica a situaciones en las que hay que relacionar (relación lógica) información gráfica y analítica. Es decir, usar información procedente de dos sistemas de representación diferentes para considerarla conjuntamente y obtener una información que no se conocía. *Considerar la información conjuntamente* lo entendemos como establecer algún tipo de relación lógica para tomar una decisión relativa a la situación en la que el estudiante se encuentra.

Por tanto, desde esta perspectiva el tipo de relaciones diferentes entre los elementos matemáticos que los estudiantes establecen durante la resolución de un problema puede ser considerado un indicador del nivel de desarrollo del esquema. El objetivo de esta investigación fue identificar las relaciones lógicas establecidas entre los elementos matemáticos que los estudiantes usan cuando resuelven un problema para caracterizar el proceso de desarrollo del esquema de derivada. La hipótesis sobre la que se apoya este objetivo es que las relaciones entre los elementos matemáticos que los estudiantes son capaces de establecer durante la resolución de un problema pueden ser consideradas las *coordinaciones de operaciones* en el sentido piagetiano, que apoyan la reestructuración del conocimiento.

3 Metodología

3.1 Participantes

Los participantes fueron 150 estudiantes (16-19 años). 50 estudiantes de primer curso de Bachillerato (16-17 años), 50 de segundo curso (17-18 años) y 50 de primer curso de la Licenciatura de Matemáticas (18-19 años). Todos estos estudiantes ya habían estudiado el tema de Derivada en cada nivel curricular correspondiente cuando se recogieron los datos del estudio. En 1º curso de Bachillerato se había introducido la derivada en un punto, $f'(a)$, y el operador derivada aplicado a reglas de derivación. En 2º curso de Bachillerato se estudia la segunda derivada (f'') y las interpretaciones de la derivada vinculando expresiones analíticas y gráficas que se utilizan para justificar la gráfica de la función. En el primer año de la Licenciatura de Matemáticas se presenta un nivel avanzado de conocimiento de la derivada de función real de variable real.

3.2 Instrumentos de recogida de datos

Para recoger los datos se utilizaron cuestionarios y entrevistas:

• tres cuestionarios, del tipo lápiz y papel. La idea fue que la *demanda del problema propuesto* al resolutor fuera tal que pudiéramos caracterizar el desarrollo del esquema de derivada. Por ello tuvimos en cuenta el desarrollo progresivo del esquema y los currículos en cada nivel educativo en el que se encontraban los estudiantes (dos de estos problemas son los que aparecen en el cuadro 1a y en el cuadro 1b),

• una entrevista individual que tuvo lugar con posterioridad a la resolución de los problemas, y que se realizó teniendo en cuenta las respuestas dadas. La entrevista tenía como objetivo obtener una información más detallada de las resoluciones de los problemas por parte de los estudiantes. La entrevista fue usada como potencial para ampliar la información sobre cómo los estudiantes establecen relaciones y usan los elementos matemáticos y permitió hacer inferencias sobre las características del desarrollo del esquema de derivada. Por ejemplo, se pedía a los estudiantes que aclararán la forma en que habían resuelto el problema, en particular considerando las relaciones establecidas en su resolución o si era posible resolverlo haciendo uso de otros elementos o relaciones.

El diseño de los instrumentos siguió dos etapas:

Etapa 1: Descripción del esquema de Derivada.

Esta fase del diseño del instrumento tenía como objetivo identificar los elementos matemáticos y relaciones lógicas (transformaciones y coordinaciones en el sentido piagetiano) que pueden darse durante la resolución de problemas. Para hacer esta descripción consideramos cómo los elementos matemáticos eran introducidos, usados y justificados en algunos libros de texto escolares de Bachillerato y en algunos textos de Análisis Matemático que son referencia en la introducción al Cálculo en el primer año en la Licenciatura de Matemáticas (APÓSTOL, 1982; DEMIDOVICH, 1976; SPIVAK, 1970).

Este análisis nos permitió identificar elementos matemáticos de diferentes naturalezas. Un primer tipo de elementos está vinculado a la definición de derivada. Por ejemplo, la derivada en un punto como límite del cociente incremental o como pendiente de la recta tangente. Otro tipo de elemento lo constituyen las propiedades, teoremas, lemas y corolarios. El siguiente corolario es un ejemplo de este tipo de elemento,

si $f'>0$ *en* $(a, c) \rightarrow f$ *creciente en* (a, c)

En este caso, el problema que debe resolver un estudiante puede proporcionar cierta información sobre la función derivada, $f'>0$ *en* (a, c), y la comprensión del estudiante de esta implicación le lleva a obtener que f *creciente en* (a, c).

También identificamos el tipo de relación que era posible establecer entre los elementos matemáticos, en el sentido de *coordinación piagetiana* durante la resolución de un problema. Esta coordinación fue entendida como una relación lógica entre los elementos matemáticos que los estudiantes generan para obtener información, que puede ser necesaria para la resolución del problema. Algunas de las relaciones son:

- Conjunción lógica ($A \wedge B$) (“y lógica”)
- Contrarrecíproco $[(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg B \rightarrow \neg A)]$
- Equivalencia lógica $[(A\leftrightarrow B) \leftrightarrow (A\rightarrow B \wedge B\rightarrow A)]$

Así, por ejemplo considerando los elementos matemáticos:

A) f derivable en (a, b) y $\in$ *(a, b)*

B) si $f'>0$ *en (a, c)* $\rightarrow$ *f creciente en (a, c)*

C) si $f'<0$ *en (c, b)* $\rightarrow$ *f decreciente en (c, b)*

D) si $f'(c)=0 \rightarrow$ *f tiene un máximo, un mínimo o un punto de inflexión en* $x=c$

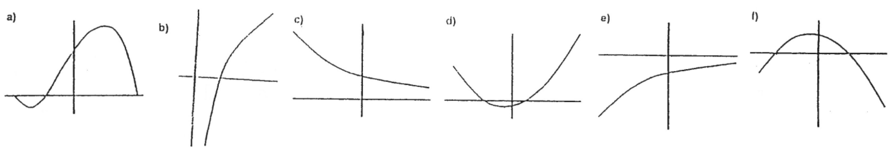
algunos alumnos son capaces de coordinarlos a través de la *y lógica* para inferir que el punto $x=c$ es un máximo (el cambio del crecimiento de la función en el entorno de $x=c$, pasa de ser creciente a ser decreciente, junto con el hecho de que $(c)=0$, implica la existencia de un máximo).

Etapa 2: diseño y selección de los problemas.

Construimos 12 problemas con diferente nivel de exigencia cognitiva entendida como el número y tipo de relaciones que se podían establecer durante su resolución considerando la descripción anterior. Para ello tuvimos en cuenta el carácter local si se refería a un punto x=a, o global si hacia referencia al comportamiento en un intervalo (a,b) y los modos de representación predominantes -analíticos y gráficos. Con estos 12 problemas construimos tres cuestionarios para los tres niveles educativos (1º Bachillerato, 2º Bachillerato y 1º Licenciatura de Matemáticas). El proceso seguido en la construcción de los tres cuestionarios se describe a continuación. Por ejemplo, la tarea 1 del cuestionario de 2º de Bachillerato (Cuadro 1a) es una adaptación de una tarea que suele estar en los libros de texto para alumnos de 17-18 años.

TAREA 1

Analiza las gráficas siguientes, ¿Cuántas parejas producirías de cada función con su derivada?



Cuadro 1a – Tarea 1 del cuestionario de 2º Bachillerato

Normalmente, en los libros de texto, la tarea se plantea de manera que todas las funciones quedan emparejadas con sus derivadas respectivas haciendo uso de los elementos analíticos y/o gráficos y las relaciones que vinculan f' con f o viceversa. Sin embargo en esta tarea nosotros incluimos una variante con el fin de que no todas las funciones se pudieran emparejar y el estudiante no pudiera formar parejas por exclusión. De esta manera en el problema propuesto sólo se pueden formar dos parejas. Una de las parejas (f, f') se puede formar coordinando elementos matemáticos puntuales y globales, y para realizar la otra pareja solo es necesario relacionar globalmente el signo de f' y el crecimiento de f. Finalmente, se proporciona a los estudiantes dos gráficos sueltos sin emparejar. El objetivo de esta tarea es movilizar el significado geométrico de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva, los elementos matemáticos analíticos globales que relacionan el crecimiento de f con el signo de f', y la concavidad de f con el crecimiento de f', y los elementos matemáticos analíticos puntuales que se fijan en los puntos en los que $f'(a) = 0$. También puede hacer uso de elementos matemáticos relativos a f''. La resolución de esta tarea permite observar si el estudiante es capaz de establecer relaciones lógicas (*y lógica*) entre elementos matemáticos que él conoce, y si es capaz de establecer relaciones entre elementos analíticos y gráficos mostrando indicios de síntesis entre los modos de representación.

TAREA 2
La gráfica correspondiente a la función f '(x) primera derivada de una cierta función f(x) es una recta que pasa por los puntos (a,0) y (0,b). Esboza las posibles gráficas de f(x).

Cuadro 1b - Tarea 2 del cuestionario de 2º Bachillerato

La tarea 2 también es una modificación de una actividad procedente de libros de texto escolares de bachillerato. En los libros de texto la función derivada del enunciado de esta tarea suele depender de un sólo parámetro, sin embargo, en esta tarea la función derivada depende de dos parámetros lo que favorece que el estudiante pueda hacer uso de los elementos matemáticos de la derivada y establecer relaciones entre ellos variando estos parámetros. La tarea da información textual sobre la gráfica de la función derivada f' y pide posibles gráficas de la función f. El objetivo de esta tarea es identificar como los estudiantes usan los elementos y relaciones que vinculan la función primera derivada f' con la función f. Desde la información proporcionada por el enunciado sabemos que la función primera derivada, *f´,* es una recta, lo que implica que la función *f* es una parábola. Esta asociación puede hacerse desde el modo gráfico considerando el inverso del operador derivada, o desde el modo analítico a través de las expresiones de ambas funciones *f´* y *f*. Por tanto, esta tarea puede resolverse desde el significado geométrico de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva, fijándose en el signo de la función *f´* para ir decidiendo que forma tendrá la gráfica de la función *f*, o desde el modo analítico a través de los elementos analíticos y/o gráficos y las relaciones que vinculan el signo de la función primera derivada *f´* al crecimiento de la función *f*, permitiéndonos saber si hay esbozos de síntesis entre ambos modos de representación.

La resolución de las tareas de los cuestionarios diseñadas siguiendo este proceso permite observar qué elementos de la derivada vinculados a *f* y *f´* en los diferentes modos de representación usan los estudiantes y cómo los relacionan. Los cuestionarios pilotos construidos fueron testados con tres grupos diferentes de estudiantes en los diferentes niveles educativos. Esta comprobación inicial permitió modificar algunos de los problemas y la estructura que adoptaron los tres cuestionarios.

3.3 Análisis de los datos

El análisis se realizó considerando conjuntamente los datos procedentes del cuestionario y la entrevista (CLEMENT, 2000; GOLDIN, 2000; HUNTING, 1997) y se centró en identificar los elementos matemáticos y las relaciones que los estudiantes usaban durante la resolución de los problemas. Un rasgo característico del proceso de análisis seguido es que las entrevistas se realizaron en días posteriores a la realización de los cuestionarios, con el objetivo de aclarar el proceso de resolución llevado a cabo por el estudiante. Como consecuencia teníamos datos de diferente naturaleza en relación a la consciencia que los estudiantes tenían de los elementos del concepto que usaban y de cómo los relacionaban. Esto fue así ya que asumíamos que resolver un problema y justificar las decisiones tomadas para responder a un entrevistador son actividades cognitivas diferentes. Para ello, previamente a la realización de las entrevistas, se examinaron las respuestas dadas por los estudiantes, a fin de adecuar el guión de las entrevistas a las respuestas dadas por los estudiantes en el cuestionario. De esta manera, las entrevistas permitieron ampliar la información sobre cómo los estudiantes establecen relaciones entre los elementos, que apoyaron las inferencias sobre el nivel de desarrollo del esquema de derivada, y generó indicadores de la transición entre los niveles. Este proceso de análisis se realizó en dos fases:

Fase 1- En esta fase analizamos las respuestas de cada estudiante a cada una de las tareas del cuestionario de forma aislada. Esto nos permitió identificar los elementos matemáticos y sus relaciones, que cada estudiante usaba al resolver cada una de las tareas. Desde este análisis hacíamos una primera inferencia sobre lo que podría ser una evidencia del nivel de desarrollo del esquema para cada estudiante. A veces la respuesta a la tarea nos da información clara de los elementos matemáticos que el estudiante utiliza y cómo los utiliza (o relaciona), pero en otras ocasiones no es así y esto nos llevó a la segunda fase del análisis.

Fase 2- Analiza cómo cada estudiante resolvía todas las tareas del cuestionario. Esta fase nos permitió caracterizar y validar los descriptores de los niveles del desarrollo del esquema de derivada generados previamente, considerando la naturaleza de las relaciones que los estudiantes establecían entre los elementos matemáticos durante la resolución de la tarea, e identificar inconsistencias por la forma en que las tareas era resueltas. Esta manera de proceder nos permitió generar características que definen la transición entre los niveles de desarrollo intra, inter y trans. Estos resultados se describen en la próxima sección.

4 Resultados

Los indicadores de los niveles de desarrollo, y las características de los mecanismos de transición entre ellos, los describiremos usando protocolos procedente de la resolución de las tareas 1 y 2 (cuadros 1a y 1b) realizadas por Juan y José, (nombres ficticios), dos estudiantes de 2º bachillerato (17-18 años).

4.1 Identificando descriptores del desarrollo del esquema: Flexibilidad en el uso de la equivalencia lógica

La caracterización del desarrollo de un esquema mediante los niveles intra, inter y trans se apoya en la naturaleza de los elementos matemáticos que los estudiantes son capaces de usar cuando resuelven un problema. En este caso un indicador del nivel de desarrollo del esquema de derivada alcanzado por el estudiante viene determinado por el uso más o menos flexible que el estudiante hace para resolver los problemas de los elementos matemáticos construidos a partir de una equivalencia lógica. El uso más o menos flexible de este tipo de elementos matemáticos muestra el grado en el cual los estudiantes han encapsulado como un elemento cognitivo los elementos matemáticos formados por equivalencias lógicas.

Por ejemplo, José en la resolución de la tarea 1 (Figura 1) utiliza tres elementos matemáticos:

A) si f crece entonces f´>0,

B) si f decrece entonces f´<0

C) si x =a es un máximo, mínimo o punto de inflexión entonces f´ (a) =0

La coordinación de estos tres elementos mediante el uso de la *y lógica* le permite encontrar de manera correcta la pareja de funciones formada por a) y f). Además el uso de los elementos matemáticos *si f crece entonces f´>0 y si f decrece entonces f´<0* le permite encontrar la pareja formada por c) y e), (ver Figura 1).

TAREA 1

Analiza las gráficas siguientes, ¿Cuántas parejas producirías de cada función con su derivada?

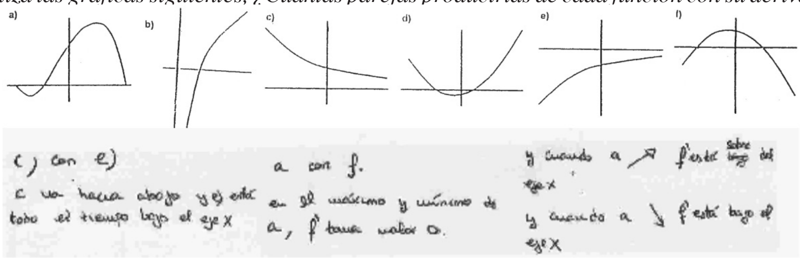


Figura 1 – Resolución de José de la tarea 1

Durante la entrevista José proporcionó información fundamental para identificar lo que podemos considerar como un indicador del nivel inter del desarrollo del esquema. En la respuesta a la tarea 1 José describe el comportamiento de las gráficas (c) y (e): *c) va hacia abajo y e) está todo el tiempo bajo el eje X*, y las coordina usando la relación entre el signo de la función derivada y el crecimiento/decrecimiento de la función de manera explícita para generar nueva información. Por otra parte, durante la entrevista indicó:

E: ¿por qué emparejas c) y e)?

José: porque c es decreciente todo el tiempo y está por encima del eje X entonces la derivada es creciente

E: ¿encontraste alguna otra relación?

José: a) y f). Los máximos y mínimos de la función son los puntos en los que la derivada corta al eje X.

En la entrevista José explicita la relación que está considerando: *porque c es decreciente todo el tiempo y está por encima del eje X, entonces la derivada es creciente*. Es decir, José hace uso de un corolario que vincula la función f con su primera derivada *f´* a través del elemento: *si f decrece entonces f´<0*, para contestar a la tarea de forma correcta. Es decir, la gráfica de la función del apartado (c) es decreciente para todo x, por lo que José la vincula a la gráfica de la función que es negativa en todo su dominio. Sin embargo, José también establece relaciones incorrectas entre *f´* y *f* cuando indica que cómo la función (c) está por encima del eje X *entonces* la derivada de f es creciente, cuando realmente lo correcto sería decir que la función de la cual la función del apartado (c) es derivada, es una función creciente. Este hecho pone de manifiesto que José tiene dificultades en hacer uso de los elementos matemáticos que vinculan *f´* con *f*. Esta inferencia viene apoyada cuando José no es capaz de resolver la tarea 2 al no considerar la equivalencia *f crece en (a, b) sii >0 en (a, b), y f decrece en (a, b) sii f´<0 en (a, b)*

El comportamiento diferente de José en las tareas 1 y 2 nos llevó a considerar que el uso de elementos matemáticos construidos mediante alguna relación lógica presenta más dificultades a los estudiantes. Esta inferencia está apoyada por el hecho de que José había utilizado varios elementos matemáticos que son corolarios que vinculaban *f* y *f´* (ejemplo: *si f crece en (a, b) entonces f´>0 en (a, b)*), e incluso los había relacionado a través de la relación *y lógica* en varias ocasiones, resolviendo así una de las tareas que se le plantearon, sin embargo, no había sido capaz de hacer uso de elementos matemáticos que son corolarios que vinculan la función *f´* con la función *f* (*si f´>0 en (a, b)entonces f crece en (a, b)*), o elementos en los que aparecen la relación de equivalencia (*f crece en (a, b) sii f´>0 en (a, b)*).

De esta manera, la dificultad en usar algunos de los elementos matemáticos (corolarios) construidos a partir de una equivalencia lógica es un indicador del nivel de desarrollo del esquema de derivada y por tanto lo consideramos un indicador del nivel inter del desarrollo del esquema.

La importancia de la naturaleza de las relaciones lógicas que se pueden establecer entre los elementos de un concepto y de las relaciones que constituyen los teoremas o propiedades a ser usadas en la resolución de un problema se pone de manifiesto por la manera en la que Juan, otro de los estudiantes, resolvía estas mismas tareas. A Juan no le sucedía lo mismo que a José. En la resolución de la tarea 1, Juan utiliza los elementos matemáticos:

- *A) x =a extremo o punto de inflexión de f* $\rightarrow$ *f´(a) =0*
- *B) si f crece* $\rightarrow$ *f´>0,*
- *C) si f decrece* $\rightarrow$ *f´<0*

La coordinación de estos tres elementos (*y lógica*) le permite resolver la tarea de forma correcta y encontrar dos parejas de funciones con sus derivadas respectivas (a, f) y (c, e) (ver Figura 2). El diálogo sobre esta tarea en la entrevista reafirmó lo descrito en el cuestionario:

E: ¿por qué relacionas a) con f)?

Juan: en los puntos que hay un mínimo o un máximo, en la derivada tenía que ser cero. Y después en los trozos que crecía o decrecía, tenía que estar positivo o negativo

E: ¿cuándo crece?

Juan: es positivo y donde decrece es negativo

E: ¿y la pareja de c) con e), cómo la has encontrado?

Juan: no estaba muy seguro, pero como aquí está decreciendo, la derivada tiene que ser negativa.

Además en la resolución de tarea también usa los elementos matemáticos (ver Figura 2):

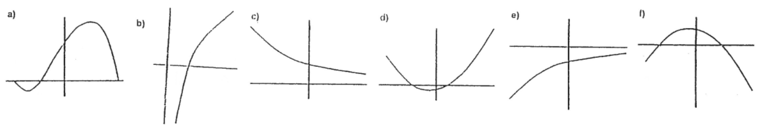
A) si f´>0 sii f crece, y

B) si f´<0 sii f decrece

En este caso, el uso de elementos matemáticos formados por la relación de equivalencia lógica entre *f* y *f´*permite a Juan, emparejar los gráficos c y e de forma doble (e derivada de c y c derivada de e).

TAREA 1

Analiza las gráficas siguientes, ¿Cuántas parejas producirías de cada función con su derivada?



PROCESO DE RESOLUCIÓN (especifica todos los pasos que llevan a la resolución de la tarea)

a-f ⇒ La función f es la derivada de la función a porque en los máximos y mínimos de a la función f es igual a 0, en los trozos que decrece la función f es menor que 0, y en los trozos que crece la función f es mayor que 0

RAZONA LA RESPUESTA

c-e ⇒ La función c es la derivada de e y viceversa, porque c decrece en todo su dominio por tanto e, su derivada, es menor que 0; e crece en todo su dominio por tanto c, su derivada, es mayor que cero.

Figura 2 – Juan, tarea 1

En este caso, el uso flexible de los elementos matemáticos construidos a partir de una equivalencia lógica es un indicador del nivel trans de desarrollo del esquema de derivada que marcan la diferencia entre Juan (trans) y José (inter). En este caso la idea de flexibilidad hay que entenderla como el uso consciente que hace Juan de la bidireccionalidad de la equivalencia para inferir información sobre la situación en la resolución del problema.

4.2 Identificando mecanismos de transición entre niveles

La caracterización de cómo los estudiantes usaban los diferentes elementos matemáticos durante la resolución de los problemas nos ha permitido identificar mecanismos de transición entre los niveles de desarrollo. Para ejemplificar este hecho mostramos el análisis de la manera diferente en la que Juan y José responden a la tarea 2.

Juan responde dibujando gráficas (ver Figura 3). En la entrevista Juan explicita las relaciones que establece entre los elementos del esquema de la derivada:

E: ¿puedes explicarme cómo has resuelto la tarea?

Juan: primero he sacado los posibles gráficos de f que había según a y b fuesen positivos o negativos. Y luego igual que antes, como están son las derivadas, se supone que cuando las derivadas pasan por cero, hay un mínimo o un máximo, entonces dependiendo, si la derivada está en positivo está creciendo, y cuando pasa de positivo a negativo, está decreciendo, hay un máximo.

E: ¿usas el mismo tipo de razonamiento en todas?

Juan: sí

TAREA 2 *La gráfica correspondiente a la función f '(x) primera derivada de una cierta función f(x) es una recta que pasa por los puntos (a,0) y (0,b). Esboza las posibles gráficas de f(x).Resolución de la tarea*

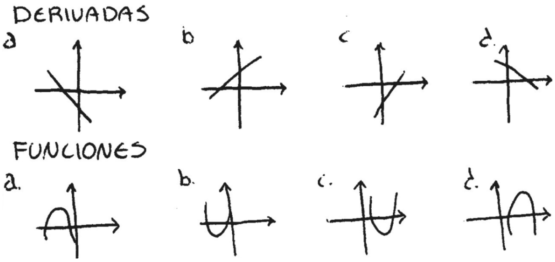


Figura 3 – Resolución de la tarea 2 por Juan

En la entrevista Juan pone de manifiesto cierta proyección del conocimiento existente en un plano superior ya que es la coordinación a través de la *y lógica* entre los elementos matemáticos:

- *A) inverso operador derivada: si f' recta $\rightarrow f$ parábola*
- *B) si $f'>0 \rightarrow f$ crece, y*
- *C) si $f'<0 \rightarrow f$ decrece*
- *D) $x=a$ máximo si $f'(a)=0$ y f pasa de crecer a decrecer*
- *E) $x=a$ mínimo si $f'(a)=0$ y f pasa de decrecer a crecer*

lo que le permite responder de forma correcta la tarea. Además, en este caso el uso de los elementos matemáticos B) y C) es un indicador del nivel trans de desarrollo del esquema de derivada puesto de manifiesto por el uso flexible de la equivalencia lógica (como describimos en el apartado anterior). En los elementos matemáticos B) y C) aparecen las implicaciones contrarias que aparecían en la tarea 1

- *si f crece $\rightarrow f'>0$,*
- *si f decrece $\rightarrow f'<0$*

Así, en la tarea 1 Juan hace uso de los elementos que vinculan la función f con la función f' y en la tarea 2 hace uso de los elementos que vinculan la función f' con la función f. Por lo tanto, Juan usa la condición necesaria y suficiente para que una función derivable sea creciente/decreciente que conlleva el uso flexible de una relación de equivalencia lógica. Este comportamiento sitúa a Juan en el nivel trans del desarrollo del esquema. Sin embargo, José no fue capaz de hacer un uso explicito de los elementos que vinculan f' y f y en particular de los elementos matemáticos construidos a partir de una relación de equivalencia lógica. Y esta característica del comportamiento de José lo sitúa en el nivel inter de desarrollo del esquema de derivada.

El análisis de la forma en la que José y Juan han resuelto las dos tareas permite identificar diferentes maneras de usar las relaciones lógicas que constituyen los teoremas, propiedades y corolarios en el esquema de derivada. Por una parte, José sólo es capaz de hacer uso de elementos matemáticos que vinculan f y f', y no de los elementos que vinculan f' con f, ni de los elementos en los que aparece la equivalencia lógica (lo que le imposibilita resolver la tarea 2), lo que nos permite situarlo en el nivel inter de desarrollo del esquema Mientras que Juan hace uso de una mayor variedad de elementos y es capaz de usar elementos matemáticos construidos sobre relaciones de equivalencia lógicas. En este sentido, Juan muestra un uso flexible de la bidireccionalidad de la equivalencia lógica que le ha permitido resolver tareas que José no podía. Esta característica del comportamiento de Juan nos permite situarlo en el nivel trans de desarrollo del esquema.

La descripción de los diferentes comportamientos de José y Juan durante la resolución de las tareas propuestas que nos ha permitido situarlos en el nivel inter (José) y trans (Juan) del desarrollo del esquema de derivada, nos permite considerar que la transición desde el nivel de desarrollo inter a trans se da mediante la consecución de un uso flexible de los elementos matemáticos construidos a partir de una equivalencia lógica. Es decir, un indicador de la transición entre los niveles inter y trans viene dado por el hecho de llegar a construir como objetos cognitivos los elementos matemáticos constituidos a partir de relaciones lógicas. Y este proceso de construir como un objeto cognitivo un elemento matemático constituido por una equivalencia lógica se manifiesta a través del uso flexible que un estudiante realiza de la bidireccionalidad de las implicaciones lógicas.

5 Discusión

Los resultados obtenidos permiten pensar que los elementos matemáticos en los que aparece la *equivalencia lógica* presentan dificultades para los estudiantes durante la resolución de problemas por lo que su uso consciente durante la resolución de problemas es un indicador del desarrollo del esquema ya que permite suponer que ha sido construido como un objeto cognitivo. De esta manera, los datos presentados nos han permitido identificar el uso flexible de los elementos matemáticos construidos a partir de equivalencias lógicas como un mecanismo de transición del nivel inter al trans de desarrollo del esquema de derivada. Así, el análisis nos ha proporcionado dos tipos de información. Por una parte nos permitió identificar descriptores de los niveles de desarrollo del esquema de derivada. Por otra parte, proporcionó información sobre la forma en la que puede darse la transición del nivel inter al nivel trans.

Nuestros datos apoyan la idea de que la construcción del conocimiento es progresiva y se pone de manifiesto a través de cómo los estudiantes han conseguido construir como objetos cognitivos los elementos matemáticos constituidos por diferentes tipos de relaciones lógicas. La primera relación lógica que se pone de manifiesto entre elementos matemáticos es algún esbozo de forma aislada, del tipo *conjunción lógica* (*y lógica*) (en el nivel inter). De forma progresiva, posteriormente se pone de manifiesto mayor riqueza en las relaciones lógicas, ya no sólo usa la conjunción lógica (*y lógica*), también se hace uso del *contrarrecíproco*, y de la *equivalencia lógica*. Esta última relación, es el que más dificultad presenta al estudiante tanto entre elementos matemáticos, como en elementos matemáticos en la que aparece, iniciándose su uso en el nivel inter y desarrollándose plenamente en el nivel trans. De esta manera el desarrollo del esquema de derivada está vinculado a la manera más o menos progresiva en la que los estudiantes van constituyendo como objetos cognitivos los elementos matemáticos formados por diferentes relaciones lógicas. Este proceso se evidencia cuando el estudiante es capaz de usar de manera flexible (es decir relacionar las características de f con f' y también la relación inversa, las características de f' con f según la exigencia del problema a través de la *y lógica*) la relación de equivalencia lógica.

Al igual que señalan Asiala et al. (1997), Baker, Cooley, Trigueros (2000) y Sánchez-Matamoros, García, Llinares (2006) tenemos constancia de que los estudiantes muestran una fuerte tendencia a utilizar la primera derivada para obtener información en la resolución de las tareas planteadas en el cuestionario. No tenemos evidencia de que los estudiantes usen los elementos matemáticos analíticos y/o gráficos puntuales de forma prioritaria sobre los globales o viceversa, aunque si hemos observado que los estudiantes tienen dificultades en la síntesis de los modos de representación (analítico y gráfico). Lo que aportan los resultados de esta investigación es que lo que determina el nivel de desarrollo del esquema derivada es el uso de las relaciones lógicas que establecen entre los elementos matemáticos. En otro sentido, nos parece importante señalar que dentro de los elementos matemáticos que forman la noción del Derivada hemos distinguido dos bloques, un bloque vinculado a las ideas o significados que configuran la definición de la derivada, y otro bloque vinculado a las propiedades de la derivada que tienen la forma de implicaciones, implicación contraria y equivalencia. Estos últimos son los que en la resolución de las diferentes tareas el estudiante no siempre es capaz de usar, y lo que nos ha proporcionado información sobre la transición del nivel inter al trans del esquema de derivada. Esta transición entre el nivel inter y trans ha sido caracterizada a través del uso flexible de la relación de equivalencia entre los elementos matemáticos. Es decir, un indicador del mecanismo de transición entre estos niveles de desarrollo viene dado por el proceso cognitivo de encapsular como objeto una relación de equivalencia entre elementos matemáticos que permiten constituir como un nuevo objeto la relación de equivalencia entre los elementos. En este caso, nuestros resultados han mostrado que Juan había encapsulado como un objeto la relación de equivalencia entre el comportamiento de una función y el comportamiento de la primera derivada al ser capaz de desencapsular este objeto para resolver la tarea 2 presentada. La desencapsulación se ha evidenciado a través del uso flexible de la bidireccionalidad de las implicaciones lógicas.

Los resultados de esta investigación proporcionan información sobre el proceso de construcción del esquema de derivada en un punto particular como es la transición del nivel inter de desarrollo del esquema al nivel trans. Mientras que los resultados obtenidos complementan los resultados de otras investigaciones centradas en identificar y comprender los mecanismos de transición y de construcción del conocimiento, todavía son necesarias nuevas investigaciones que nos ayuden a comprender mejor otros diferentes aspectos del aprendizaje de las nociones de Cálculo.

Referencias

APOSTOL, T. M. **Análisis Matemático**. Barcelona-Bogotá-Buenos Aires-Caracas-México-Rio de Janeiro: Editorial Reverté, S.A., 1982.

ARIZA, A.; LLINARES, S. Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de Bachillerato y Universidad. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v.27, n.1, p.121-136, Ene. 2009.

ASIALA, M.; COTTRILL, J.; DUBINSKY, E.; SCHWINGENDORF, K. The Development of Student's Graphical Understanding of the Derivate. **The Journal of Mathematical Behavior**, New Yersey, USA, v. 16, n. 4, p. 399-431, Oct. 1997.

AZCÁRATE, C. **La velocidad**: introducción al concepto de derivada, 1990. 356f. Tesis (Doctorado em Didactica de la Matemática) – Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 1990.

BADILLO, E.; AZCARATE, C.; FONT, V. Análisis de los niveles de comprensión de los objetos (*a*) y (*x*) en profesores de Matemáticas. **Enseñanza de las Ciencias,** Barcelona, v. 29, n.2, p.191-206, Mar. 2011.

BAKER, B.; COOLEY, L.; TRIGUEROS, M. A. Calculus graphing schema. **The Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, VA, v. 31, n.5, p.557-578, Nov. 2000.

BIZA, I.; ZACHARIADES, T. First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. **The Journal of Mathematical Behavior**, New Yersey, USA, v. 29, n. 4, p.218-229, Oct. 2010.

CLARK, J. M. et al. Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule. **Journal of Mathematical Behavior**, New Yersey, USA, v. 14, n. 4, p. 345-364, Oct. 1997.

CLEMENT, J. Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. In: KELLY, A. E.; LESH, R. A. (Eds.). **Handbook of research design in mathematics and science education**, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p. 547-590.

DEMIDOVICH, B.P. **5000 problemas de análisis matemático**. Madrid: Editoral Paraninfo, 1976.

DUBINSKY, E. Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In: STEFFE, L. P. (Ed.). **Epistemological Foundations of Mathematical Experiences**. New York: Springer – Verlag, 1991. p. 160-202.

FERRINI-MUNDY, J.; GRAHAM, K. Research in calculus learning. Understanding limits, derivates, and integrals. In: DUBINSKY, E.; KAPUT, J. (Eds.), **Research issues in undergraduate Mathematics Learning**. Washington D.C.: Mathematical Association of America, 1994. p.31-45.

FONT, V. **Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a las derivadas**. 1999, 782f. Tesis (Doctorado em Didáctica de la Matemática) – Universitat de Barcelona, Barcelona,1999.

GARCÍA, M.; LLINARES, S.; SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 9, n. 5, p.1023-1045, Oct. 2011.

GOLDIN, G. A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In: KELLY, A. E.; LESH, R. A. (Eds.). **Handbook of research design in mathematics and science education**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p. 517-546.

HABRE, S.; ABBOUD, M. Student's conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. **The Journal of Mathematical Behavior**, New Yersey, USA, v. 25, n.1, p.57-72, Ene. 2006.

HUNTING, R. P. Clinical Interview Methods in Mathematics Education Research and Practice. **Journal of Mathematical Behavior**, New Yersey, USA, v. 16, n. 2, p.145-165, Abr. 1997.

ORTON, A. Student's understanding of differentiation. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 14, n. 3, p.235-250, Ago. 1983.

PIAGET, J.; GARCÍA, R. **Psicogénesis e Historia de la Ciencia**. México: Siglo Veintiuno Editores, 1982.

PIAGET, J. **L'equilibration des structures cognitives. Problème central du développement.** Paris: Presses Universitaires de France, 1975.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **Psicología del niño**. 8.ed. Madrid: Ediciones Morata, 1978.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. **Análisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer año de Universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto)**.2004. 270 f.Tesis (Doctorado en Educación: Educación Matemática) – Universidad de Sevilla, Sevilla, 2004.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G.; GARCÍA, M.; LLINARES, S. El desarrollo del esquema de derivada. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 24, n.1, p. 85-98, Mar. 2006.

SÁNCHEZ–MATAMOROS, G.; GARCÍA, M.; LLINARES, S. La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. **RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Méjico, v. 11, n. 2, p.267-296, Jul. 2008.

SFARD, A. Operational origins of mathematical objets and the quandary of reification-the case of function. In: HAREL, G.; DUBINSKY, E. (Eds.) **The Concept Function:** Aspects of Epistemology and Pedagogy. Washington DC: Mathematical Association of America, 1992. p. 59-84.

SPIVAK, M. **Calculus. Cálculo Infinitesimal**. Barcelona-Bogotá-Buenos Aires-Caracas-México-Rio de Janeiro: Editoral Reverté, 1970.

TALL, D. Concept image, generic organizers, computers, and curriculum change. **For the Learning of Mathematics***,* Otawa, ON, Canada, v. 9, n. 3, p.37-42, 1989.

TALL, D. et al. What is the object of the Encapsulation of a Process? **The Journal of Mathematical Behavior***,* New Yersey, USA, v. 18, n. 2, p.223-241, Apr. 2000.

ZANDIEH, M. A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate. In: DUBINSKY, E.; SHOENFELD, A. H.; KAPUT, J. (Eds.). **Research in Collegiate Mathematics Education IV CBMS Issues in Mathematics Education**. Providence, RI: American Mathematical Society, 2000. p. 103-127.

Submetido em Maio de 2012.
Aprovado em Julho de 2012.