ISSN 0103-636X

Uma Proposta Didático-Pedagógica para o Estudo da Concepção Clássica de Probabilidade

A Proposal for the Study of Classical Conception of Probability

José Marcos Lopes*

Resumo

Apresentamos neste artigo uma proposta didático-pedagógica para o ensino da concepção clássica (Laplace) de Probabilidade. O ponto de partida para a construção do conceito de probabilidade é uma situação de jogo associada à metodologia de resolução de problemas. A concepção de jogo aqui utilizada toma como referência a tendência construtivista do ensino de Matemática. A construção do conhecimento matemático é realizada a partir de problemas geradores de novos conceitos e/ou novos conteúdos. O jogo proposto é original e todos os problemas formulados envolvem situações de jogo. Nossa proposta pode ser utilizada tanto no último ciclo do Ensino Fundamental como também no Ensino Médio e pode subsidiar a prática de professores que ensinam conceitos básicos de Probabilidade.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem. Jogos. Resolução de Problemas. Probabilidade.

Abstract

We present in this paper a pedagogical-didactic proposal for the teaching of Laplace Probability. The starting point for building the concept of probability is a game situation associated with the methodology of problem-solving. The theoretical reference for the concept of game is constructivist teaching of mathematics. Mathematical knowledge is constructed based on problems that generate new concepts and / or new content. The proposed game is original. Our proposal can be used both in the last cycle of basic

* Professor Livre Docente da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista (FEIS/UNESP). Endereço para correspondência: Av. Brasil, 56. Caixa Postal 31, CEP: 15385-000. Ilha Solteira, SP, Brasil. *E-mail:* jmlopes@mat.feis.unesp.br.

education but also in high school, and may inform the practice of teachers who teach basic concepts of probability.

Keywords: Teaching and learning. Games. Problem Solving. Probability.

1 Introdução

A concepção clássica de probabilidade é atribuída a Laplace (1749-1827). Entretanto,

> [...] a definição de probabilidade como quociente do número de *casos favoráveis* sobre o número de *casos possíveis* foi a primeira definição formal de probabilidade, e apareceu pela primeira vez em forma clara na obra *Liber de Ludo Aleae* de Jerônimo Cardano (1501-1576)" (MORGADO et al., 2004, p. 119).

A definição de probabilidade de Laplace é válida somente quando o Espaço Amostral possui um número finito de elementos e os Eventos Elementares são equiprováveis, ou seja, possuem a mesma probabilidade de ocorrência. A concepção clássica de probabilidade possui forte conexão com o raciocínio combinatório. Os *Standards* (NCTM, 1989) recomendam o seguinte procedimento combinatório para que os alunos compreendam matematicamente a origem e aprendam o conceito implícito na definição laplaciana de probabilidade: construir uma tabela ou diagrama de árvore, fazer uma lista e usar um simples procedimento de contagem.

A capacidade combinatória é fundamental para o raciocínio hipotético-dedutivo, o qual opera pela combinação e avaliação das possibilidades em cada situação, e emerge simultaneamente após a idade de 12 a 13 anos, no chamado Estado das Operações Formais da teoria Piagetiana (NAVARRO-PELAYO, BATANERO e GODINO, 1996).

Para o Ensino Fundamental e Médio, uma outra concepção de probabilidade que pode e deve ser trabalhada é a *frequentista*, ou seja, a definição de probabilidade obtida por um processo de experimentação e simulação.

Coutinho (2001) mostrou a importância de se trabalhar com a dualidade dos enfoques para a noção de probabilidade, combinatório x frequentista, ou seja, oferecer aos alunos situações-didáticas que envolvam problemas, que devem ser resolvidos experimentalmente (simulação), e validados pelo cálculo *a priori* de uma probabilidade pela definição Laplaciana. Assim, os alunos podem construir passo a passo o conceito de probabilidade.

De nossa experiência com professores do Ensino Fundamental e Médio em cursos de formação continuada, em cursos de especialização, em minicursos apresentados em congressos científicos e em projetos de pesquisa desenvolvidos diretamente com estes professores, constatamos que a maioria deles considera difíceis os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade. Isto corrobora o estabelecido no Caderno do Professor, elaborado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo: “os conteúdos pertinentes à Análise Combinatória e ao Cálculo de Probabilidades, [...] costumam trazer desconforto não apenas aos estudantes, mas também aos professores” (SÃO PAULO, 2008, p. 9).

2 Uma proposta construtivista para o uso de jogos em sala de aula

Com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 2000); nas etapas da ação construtivista de Macedo, Petty e Passos (2000) para o trabalho com jogos; nos momentos de intervenção pedagógica com jogos, de Grando (2000); no esquema de aula de Onuchic (1999) sobre o uso da resolução de problemas; no relato de experiência de Borin (2004) sobre o uso de jogos através da metodologia de Resolução de Problemas e na asserção de Moura (1992) sobre a possibilidade da união entre o jogo e a resolução de problemas, propomos, a seguir, uma intervenção didático-pedagógica para a utilização de um jogo, associada à metodologia de resolução de problemas, para a construção de um conceito matemático, composta dos seguintes sete momentos:

1º) *Utilização do jogo*. Inicialmente, o professor apresenta o jogo, oralmente ou de forma escrita, e solicita que os alunos realizem algumas partidas. O professor apóia os alunos no esclarecimento de dúvidas, inevitáveis neste momento da ação. No início, os objetivos desta ação estão relacionados à familiarização com os nomes das peças, tabuleiro etc. Posteriormente, o objetivo passa a ser o pleno domínio das regras do jogo, que será de fundamental importância quando da resolução dos problemas. O desenvolvimento de competências como disciplina, concentração, perseverança e sociabilidade deve ser valorizado. O professor deve, também, solicitar aos alunos que anotem os resultados das jogadas (certas e erradas). É conveniente que os próprios alunos desenvolvam algum esquema para as anotações de suas jogadas. Além da possibilidade de análises futuras sobre as jogadas, no sentido de perceber as melhores estratégias de jogo, consideramos que a necessidade dos próprios alunos, no sentido de anotarem suas jogadas, já é um princípio da sistematização do conceito matemático, e, também, auxilia no aprendizado da transformação da linguagem materna em linguagem matemática, uma das principais dificuldades encontradas pela grande maioria dos alunos para a aprendizagem de Matemática.

2º) *Questionamentos verbais*. Depois de realizadas algumas partidas, o professor lança alguns questionamentos verbais sobre o jogo utilizado. Como exemplos, temos: O primeiro jogador tem mais chances de vitória? Pode ocorrer empate? Existe uma estratégia vitoriosa? A estratégia pode mudar durante a realização do jogo? (estamos supondo o uso de jogos de estratégia). Num primeiro momento, os alunos oferecerão respostas intuitivas. As respostas corretas, matematicamente demonstradas, deverão ser obtidas durante as resoluções dos problemas. Isto pode favorecer o interesse ou, pelo menos, minimizar os bloqueios dos alunos quando solicitados a resolverem problemas.

3º) *Formação dos grupos*. Formam-se grupos com uma média de 4 alunos cada. Além dos aspectos cognitivos, os aspectos emocionais, afetivos e morais são também importantes para o trabalho em grupo, principalmente quando associados a atividades lúdicas. Um aluno, provavelmente, fica intimidado em defender sua resposta, porém, após socializar seus resultados com os colegas de grupo, sentir-se-á mais confiante para expor suas ideias.

4º) *Resolução de situações-problemas*. Os problemas previamente elaborados pelo professor, envolvendo situações de jogo, são resolvidos pelos grupos. É comum a resistência por parte dos alunos quando da necessidade da resolução de problemas. O professor deve motivá-los, esclarecendo que, com estas resoluções, eles se tornarão melhores jogadores e poderão descobrir (se existirem) estratégias vitoriosas. Os problemas são utilizados para ensinar matemática, suas soluções devem contemplar o conceito matemático que se deseja sistematizar. Entretanto, em nenhum momento o professor deve mencionar o nome do conceito matemático. Os alunos devem utilizar sua própria linguagem para as soluções dos problemas. Isto também pode ser considerado um princípio de sistematização do conceito matemático que se pretende estudar.

5º) *Plenária*. O professor escolhe um dos grupos para apresentar sua solução. Posteriormente, em uma pequena plenária, discutem-se as soluções (certas ou erradas) apresentadas pelos outros grupos. Soluções alternativas e soluções melhor elaboradas devem ser destacadas.

6º) *Sistematização*. Após o trabalho com os problemas, em que o número de problemas a ser considerado depende da avaliação de cada professor, será realizada a sistematização do conceito e/ou conteúdo matemático através do rigor e do formalismo característicos da Matemática. Apresentam-se neste momento definições e propriedades do conceito estudado. Como os alunos já trabalharam intuitivamente estes conceitos, serão mais acessíveis (menos resistentes) ao rigor da Matemática.

7º) *Resolução de problemas de aplicação*. Após a sistematização do conceito matemático, o professor trabalha com os alunos (em grupo ou individualmente) a solução de vários problemas envolvendo o conceito estudado. Os problemas podem, ainda, envolver situações do jogo ou aqueles problemas-padrão encontrados e selecionados do livro texto. As soluções para estes problemas serão obtidas através do emprego das definições, propriedades, lemas e teoremas, anteriormente sistematizados em sala de aula. É necessário que o professor reforce o uso das novas terminologias próprias ao assunto. O objetivo principal desta ação é provocar nos alunos uma fixação dos conteúdos estudados, e reforçar o desenvolvimento de atitudes e habilidades na resolução de problemas. Estamos, neste momento, ensinando os alunos a resolver problemas.

Apresentamos, a seguir, o jogo proposto e algumas situações-problema que podem ser utilizadas no 4º momento da intervenção pedagógica, para o estudo de conceitos básicos de Probabilidade.

2.1 O jogo *Mini-Bozó*

O jogo proposto é original, utiliza dois dados, e pode ser disputado por vários jogadores. É uma simplificação de um jogo bastante popular no estado do Mato Grosso do Sul conhecido como Bozó. A simplificação efetuada foi motivada pelo fato de que nosso objetivo é utilizar o jogo para ensinar conceitos básicos (iniciais) de Probabilidade, o que não seria adequado através do jogo Bozó, tendo em vista que este utiliza cinco dados. O leitor interessado poderá conhecer as regras do jogo Bozó em Brasil (2010).

Objetivo: preencher todo o tabuleiro, de modo a obter mais pontos que o(s) adversário(s).

Material: dois dados de cores diferentes (vermelho e branco), um copo não transparente, papel e caneta para registro dos pontos e um tabuleiro para cada jogador.

Regras:
1. Pode ser disputado por duas pessoas ou mais, não existe limite no número de jogadores, mas um número excessivo de jogadores influencia no tempo do jogo.
2. Em cada jogada, o jogador poderá efetuar até dois lançamentos. O primeiro lançamento é feito sempre com os dois dados. Se o jogador optar pelo segundo lançamento, poderá fazê-lo novamente com os dois dados ou reservar um dos dados, e efetuar o segundo lançamento com apenas um dado.
3. Em toda jogada, o jogador deve, obrigatoriamente, marcar uma casa do seu tabuleiro. Caso não exista possibilidade de marcação ele deve cancelar uma das casas ainda não marcada, fazendo um *X* sobre a casa que escolheu. Cada casa só pode ser marcada ou cancelada uma única vez.
4. O jogo termina quando todos os jogadores preencherem suas casas em seus respectivos tabuleiros. Cada jogador soma seus pontos, e ganha aquele que obteve a maior pontuação.

O *tabuleiro*:

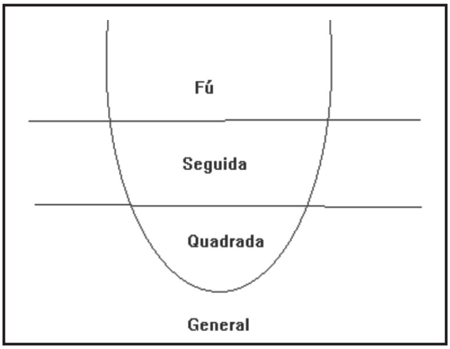

Figura 1 – Tabuleiro do Jogo Mini-Bozó

A *pontuação*:

Fú: duas faces distintas, mas não em sequência, valem a soma das faces.
Seguida: duas faces distintas em sequência valem 20 pontos.
Quadrada: duas faces iguais, mas diferentes de 6, valem 30 pontos.
General: duas faces iguais a 6 valem 50 pontos.

Quando se obtém *Seguida*, *Quadrada* ou *General* no primeiro lançamento, é dito - *de boca* - e adicionam-se 5 pontos ao valor original da casa. Por exemplo, se o jogador conseguir *Quadrada* no seu primeiro lançamento, chama-se *Quadrada de boca* e marca-se 35 pontos ao invés de 30.

Comentários sobre o jogo: Consideramos o jogo Mini-Bozó como sendo um Jogo de Estratégia, mas não no sentido definido em Borin (2004, p. 15). Como o jogo utiliza dado, então, o fator sorte não pode ser totalmente desprezado. Também, é impossível a determinação de uma estratégia sempre vitoriosa. Assim, o jogo nunca perde o sentido como jogo, e cada partida será, provavelmente, diferente da anterior. Toda jogada é pontuada, entretanto se a casa correspondente àquela pontuação já estiver marcada, a pontuação deve ser desconsiderada e deve-se cancelar uma casa fazendo um *X* sobre a casa escolhida. Como o tabuleiro é composto de 4 casas, então, cada jogador efetua exatamente 4 jogadas, pois em cada jogada ele marca ou cancela uma das casas do seu tabuleiro. A estratégia pode variar, dependendo da posição de momento do jogo. Por exemplo, na primeira jogada, com todas as casas desmarcadas, se o jogador obteve (2, 6) no seu primeiro lançamento, então, a melhor estratégia será reservar o dado com a face 6 e lançar novamente o outro dado. Agora, nesta mesma situação, se o *Seguida* objetivo do jogador for obter a casa *Seguida*, a melhor estratégia será reservar o dado com a face 2, pois neste caso terá duas chances em 6 de obter *Seguida*, ou seja, obter as faces 1 ou 3, enquanto que se reservar o dado com a face 6 terá apenas uma chance em 6 de obter, ou seja, obter a face 5. Quando da necessidade de se cancelar uma casa, a melhor estratégia pode não ser cancelar as casas *mais difíceis* (com menor probabilidade de ocorrerem), isto depende da pontuação já obtida pelo(s) outro(s) jogador(es). Obviamente, na casa cancelada o jogador marcará zero ponto.

No jogo Mini-Bozó, cada jogador, em cada jogada, poderá efetuar até dois lançamentos. Para o primeiro lançamento, o jogador sempre utiliza os dois dados, o que corresponde ao Experimento Aleatório *jogar dois dados simultaneamente e observar as faces superiores*. Podemos considerar cada resultado possível desse experimento aleatório como sendo um par ordenado de números (a, b) em que a representa o resultado no dado vermelho e b o resultado no dado branco. Assim, teremos o Espaço Amostral, que será denotado por S, constituído dos seguintes 36 elementos: S = {(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (4; 6), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (5; 5), (5; 6), (6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (6; 6)}. Agora, para o segundo lançamento, o jogador terá a opção de utilizar os dois dados novamente ou reservar um dos dados e fazer o lançamento de apenas um deles. Neste caso, se utilizar os dois dados, teremos para este segundo lançamento o mesmo Espaço Amostral S do primeiro lançamento e, se utilizar apenas um dado, teremos o Espaço Amostral S_1 = {1, 2, 3, 4, 5, 6} que corresponde ao Experimento Aleatório *jogar um dado e observar a face superior*.

Na sequência, e para a resolução dos problemas, quando dizemos que o jogador utilizou apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó estamos considerando o Experimento Aleatório que consiste de um único lançamento dos dois dados, ou seja, estamos considerando o Espaço Amostral S.

Depois de realizado o jogo, o professor pode fazer os questionamentos abaixo.

O jogador deverá sempre aproveitar o segundo lançamento?

O jogador terá mais chances em marcar a casa Quadrada do que a Seguida?

3 Espaço Amostral, Evento e Definição Clássica de Probabilidade

Formulamos, a seguir, algumas situações-problema que poderão ser utilizadas para a sistematização do conceito de probabilidade na concepção de Laplace. Vamos supor na sequência a utilização de dois dados com faces equiprováveis. Para cada um dos problemas, fornecemos uma sugestão de solução que pode ser utilizada pelo professor.

Para a solução dos problemas, os alunos deverão utilizar-se de sua própria linguagem. Não devemos exigir neste momento nenhum formalismo ou rigor característico da Matemática. O importante é que os alunos apreendam e reconstruam o conceito matemático. Apenas no final dos trabalhos de cada seção é que o professor deverá sistematizar o novo conceito estudado. É conveniente privilegiar, também, o trabalho e as discussões das soluções apresentadas entre os grupos.

Problema 1. Quais são os pontos possíveis para a casa Fú?
Solução.

Independentemente do fato do jogador ter utilizado um ou dois lançamentos, são válidos para a casa Fú os casos onde as duas faces são distintas, mas não em sequência, ou seja, (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 1), (3; 5), (3; 6), (4; 1), (4; 2), (4; 6), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (6; 1), (6; 2), (6; 3) ou (6; 4).

Como para a casa Fú vale a soma das faces, podemos obter, neste caso, as seguintes pontuações: 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10. Portanto, a casa Fú poderá receber uma pontuação mínima de 4 e máxima de 10 pontos.

*Problema 2***.** Se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó, quais são suas chances de marcar a casa Fú? Justificar sua resposta.
Solução.

Temos neste caso os 36 resultados possíveis descritos no Espaço Amostral S. Da solução do *problema 1*, o jogador marca a casa Fú se ocorrer um dos seguintes 20 casos: (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 1), (3; 5), (3; 6), (4; 1), (4; 2), (4; 6), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (6; 1), (6; 2), (6; 3) ou (6; 4). Portanto, o jogador terá 20 chances em 36 de marcar a casa Fú se utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó.

O professor deve explorar o fato de que, quando lançamos dois dados (Experimento Aleatório), não sabemos qual resultado irá ocorrer. Entretanto, sabemos quais serão os resultados possíveis (Espaço Amostral). A representação de todos os resultados possíveis em uma tabela de dupla entrada é bastante conveniente. A utilização da árvore de possibilidades também deve ser incentivada.

Problema 3. Se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó, quais são suas chances de marcar 5 pontos na casa Fú? Justificar sua resposta.

Solução.

De maneira análoga ao *problema 2*, temos que o Jogador marcará 5 pontos nos 2 seguintes casos: (1; 4) ou (4; 1). Portanto, o jogador terá 2 chances em 36 de marcar 5 pontos na casa Fú se utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó.

*Problema 4***.** Se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó, quais são suas chances de marcar 7 pontos na casa Fú? Justificar sua resposta.

Solução.

Ainda da solução do *problema 2*, temos que o jogador marcará 7 pontos nos seguintes 4 casos: (1; 6), (6; 1), (2; 5) ou (5; 2). Portanto, o jogador terá 4 chances em 36 de marcar 7 pontos na casa Fú se utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó.

Das soluções dos *problemas 3* e *4* concluímos que se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó será mais provável marcar 7 do que 5 pontos na casa Fú. Quando da realização do 1º momento da intervenção pedagógica, ou seja, da *Utilização do Jogo*, os alunos deverão perceber que algumas pontuações da casa Fú ocorrem com maior frequência do que outras. Isto pode ser explorado pelo professor e significa que, intuitivamente, já estamos trabalhando o conceito de probabilidade. O problema a seguir também tem este mesmo objetivo.

Problema 5. Se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó, ele terá mais chances em marcar a casa Seguida do que a Quadrada? Justificar sua resposta.

Solução.

(a) Para marcar a casa Seguida o jogador deverá obter um dos seguintes casos: (1; 2), (2; 1), (2; 3), (3; 2), (3; 4), (4; 3), (4; 5), (5; 4), (5; 6) ou (6; 5). Assim, terá 10 chances em 36 para marcar a casa Seguida, considerando-se que utilizou apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó.

(b) Para marcar a casa Quadrada o jogador deverá obter um dos seguintes casos: (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4) ou (5; 5). Assim, terá 5 chances em 36 para marcar a casa Quadrada, considerando-se que utilizou apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó.

Portanto, de (a) e (b) concluímos que o jogador terá mais chances de marcar a casa Seguida, considerando-se que utilizou apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó.

Para as resoluções dos *problemas 2, 3, 4* e *5* podemos observar que, intuitivamente, já estamos calculando a probabilidade (chance) como:

$$\text{probabilidade} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}},$$

ou seja, estamos utilizando a resolução dos problemas para que os alunos possam construir/reconstruir a Concepção Clássica de Probabilidade.

Após o trabalho com problemas, como os acima mencionados, o professor poderá iniciar a sistematização dos conceitos de Experimento Aleatório, Evento, Espaço Amostral, Evento Elementar e apresentar a Definição de Probabilidade de Laplace (6º momento da intervenção pedagógica). Todos estes conceitos já foram trabalhados nas soluções dos problemas, entretanto, em nenhum momento foram mencionados. Para este nível de escolaridade os PCN recomendam que se deve evitar a teorização precoce.

A partir da sistematização dos conceitos outros problemas podem ser trabalhados como forma de reter os conceitos matemáticos estudados (7º momento da intervenção pedagógica). Agora, os nomes dos conceitos, já definidos, devem ser utilizados e reforçados pelo professor. Os alunos devem se acostumar com as novas nomenclaturas: evento, espaço amostral e probabilidade. O termo *probabilidade* irá aparecer pela primeira vez no *problema 6*.

4 Probabilidade da união de dois eventos

O objetivo desta seção é calcular a probabilidade da união de dois eventos e mostrar que seu cálculo está relacionado à soma de probabilidades. Inicialmente, consideramos o caso de eventos mutuamente exclusivos e, posteriormente, o caso geral.

Problema 6. Se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó, qual a probabilidade de marcar a casa Seguida ou a casa Quadrada?
Solução.

Vamos considerar os seguintes eventos:

A: O jogador marcou a Casa Seguida no seu primeiro lançamento;

B: O jogador marcou a Casa Quadrada no seu primeiro lançamento.

Desejamos calcular a probabilidade de ocorrer o evento A *ou* ocorrer o evento B. Utilizando a notação da Teoria de Conjuntos desejamos calcular $P(A \cup B)$.

Agora,

$A = \{(1; 2), (2; 1), (2; 3), (3; 2), (3; 4), (4; 3), (4; 5), (5; 4), (5; 6), (6; 5)\}$ tem 10 elementos e $P(A) = \frac{10}{36}$;

$B = \{(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5)\}$ tem 5 elementos e $P(B) = \frac{5}{36}$ e $A \cup B = \{(1; 2), (2; 1), (2; 3), (3; 2), (3; 4), (4; 3), (4; 5), (5; 4), (5; 6), (6; 5), (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5)\}$ tem 15 elementos e $P(A \cup B) = \frac{15}{36}$.

Assim,

$$P(A \cup B) = \frac{15}{36} = \frac{10}{36} + \frac{5}{36} = P(A) + P(B).$$

A propriedade $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ não se verifica apenas para o *problema 6*. Esta relação se verifica sempre que os eventos A e B são *mutuamente exclusivos*, ou seja, $A \cap B = \phi$. Na Concepção Axiomática de Probabilidade, o matemático Kolmogorov estabeleceu esta propriedade como sendo um de seus axiomas.

Axioma: Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$.

Devemos observar que, como os eventos A e B são eventos do mesmo espaço amostral S, então $A \bigcup B$ também é um evento de S, onde S = {(1; 1), (1; 2), ... , (1;6), (2; 1), ... (6; 6)} possui 36 elementos.

Em linhas gerais, quando podemos satisfazer uma exigência ou outra, então somamos as probabilidades envolvidas. O professor deve, neste caso, destacar o papel do *ou*.

Problema 7. Se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó, qual a probabilidade de marcar na casa Fú um número par ou um número menor do que 7?

Solução.

Vamos considerar os dois seguintes eventos:

A: O jogador marcou um número par na Casa Fú em seu primeiro lançamento e

B: O jogador marcou um número menor do que 7 na Casa Fú em seu primeiro lançamento.

De modo análogo ao *problema 6* desejamos calcular $P(A \bigcup B)$.

Para marcar um número par na casa Fú o jogador deverá obter: 4, 6, 8 ou 10 pontos. Assim,

A = {(1; 3), (3; 1), (1; 5), (2; 4), (4; 2), (5; 1), (2; 6), (3; 5), (5; 3), (6; 2), (4; 6), (6; 4)} que tem 12 elementos e $P(A) = \dfrac{12}{36}$.

Para marcar um número menor do que 7 na casa Fú o jogador deverá obter: 4, 5 ou 6 pontos. Assim,

B = {(1; 3), (3; 1), (1; 4), (4; 1), (1; 5), (2; 4), (4; 2), (5; 1)} que tem 8 elementos e $P(B) = \dfrac{8}{36}$.

Agora,

$A \bigcup B$ = {(1; 3), (3; 1), (1; 5), (2; 4), (4; 2), (5; 1), (2; 6), (3; 5), (5; 3), (6; 2), (4; 6), (6; 4), (1; 4), (4; 1)} que tem 14 elementos e $P(A \cup B) = \dfrac{14}{36}$ e

$A \cap B = \{(1; 3),\ (3; 1),\ (1; 5),\ (2; 4),\ (4; 2),\ (5; 1)\}$ que tem 6 elementos e

$P(A \cap B) = \dfrac{6}{36}$.

Assim,

$$P(A \cup B) = \frac{14}{36} = \frac{12}{36} + \frac{8}{36} - \frac{6}{36} = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

A propriedade $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ não se verifica apenas para o *problema 7.* É uma propriedade geral que pode ser demonstrada matematicamente para o cálculo da probabilidade da união de dois eventos quaisquer. Veja, por exemplo, Morgado et al. (2004) para uma prova desta propriedade. Se os eventos são mutuamente exclusivos, então, $A \cap B = \phi$ e $P(A \cap B) = 0$, ou seja, recaímos no caso anterior do *problema 6*.

5 Probabilidade Condicional

O cálculo de probabilidades condicionais está relacionado ao cálculo da probabilidade de um evento ocorrer sabendo-se que outro evento já ocorreu *a priori*. O conceito de Probabilidade Condicional poderá ser sistematizado através do trabalho com situações-problema como as consideradas abaixo.

Problema 8. Considerando-se que o jogador utilizou apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó, qual a probabilidade de marcar a casa Quadrada, sabendo-se que ele obteve em pelo menos um dos dois dados uma face 5?
Solução.

No primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó, o jogador utiliza os dois dados e temos o Espaço Amostral S constituído de 36 resultados possíveis. Agora, como nos foi fornecida a informação de que o jogador obteve em pelo menos um dos dois dados a face 5, então um dos possíveis 11 casos deve ter ocorrido: {(1; 5), (5; 1), (2; 5), (5; 2), (3; 5), (5; 3), (4; 5), (5; 4), (5; 5), (5; 6), (6; 5)}.

Assim, como dentre os 11 casos possíveis apenas no caso (5; 5) o jogador marcará a casa Quadrada, então a probabilidade pedida será $p = \dfrac{1}{11}$.

A representação do Espaço Amostral S, dos 11 casos possíveis: {(1; 5), (5; 1), (2; 5), (5; 2), (3; 5), (5; 3), (4; 5), (5; 4), (5; 5), (5; 6), (6; 5)}, e do caso favorável (5; 5) num eixo cartesiano pode facilitar a compreensão do conceito de Probabilidade Condicional.

Problema 9. Considerando-se que o jogador utilizou apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó, qual a probabilidade de marcar a casa Quadrada, sabendo-se que a soma das faces obtidas foi igual a sete?
Solução.

De maneira análoga ao *problema 8*, sabendo-se que a soma das faces é 7, então um dos 6 possíveis casos deve ter ocorrido: {(1; 6), (6; 1), (2; 5), (5; 2), (3; 4), (4; 3)}. Assim, não existe neste caso a possibilidade do jogador marcar a casa Quadrada; ou seja; não ocorrem faces iguais quando a soma é sete. Portanto, a probabilidade pedida será dada por p = 0.

Problema 10. Considerando-se que o jogador utilizou apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó, qual a probabilidade de marcar a casa Quadrada, sabendo-se que obteve números ímpares nas faces dos dois dados?
Solução.

Da mesma forma que no *problema 8*, temos que um dos 9 possíveis casos ocorreu: {(1; 1), (1; 3), (1; 5), (3; 1), (3; 3), (3; 5), (5; 1), (5; 3), (5; 5)}. Assim, o jogador marcará a casa Quadrada quando obtém um dos três seguintes casos: (1; 1) ou (3; 3) ou (5; 5). Portanto, a probabilidade pedida será dada por

$$p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Devemos observar que, nos três problemas anteriores, estamos sempre calculando a probabilidade do jogador, em seu primeiro lançamento, marcar a casa Quadrada no jogo Mini-Bozó. Entretanto, a informação fornecida *a priori*, altera o valor da probabilidade. O cálculo da probabilidade está condicionado à informação disponível *a priori*. Esta é a essência do conceito de Probabilidade Condicional, ou seja, a probabilidade de um evento é modificada pela informação de que outro evento já tenha ocorrido.

Depois do trabalho com situações-problema do tipo dos *problemas 8*, *9* e *10*, o professor, certamente, terá mais facilidade para sistematizar o conceito de Probabilidade Condicional.

No *problema 10*, definimos os eventos:

A: O jogador marcou a casa Quadrada e

B: O jogador obteve números ímpares nas faces dos dois dados.

Desejamos calcular a probabilidade de ocorrer o evento A, sabendo-se que o evento B já ocorreu. O professor deve mencionar a necessidade de outra notação para indicar esta probabilidade; temos, agora, dois eventos envolvidos. A notação comumente utilizada é $P(A|B)$ (leia-se probabilidade de A dado B).

Temos que $B = \{(1; 1), (1; 3), (1; 5), (3; 1), (3; 3), (3; 5), (5; 1), (5; 3), (5; 5)\}$ tem 9 elementos. Assim, $P(B) = \frac{9}{36}$.

Agora, $A = \{(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5)\}$ e $A \cap B = \{(1; 1), (3; 3), (5; 5)\}$ tem 3 elementos. Assim, $P(A \cap B) = \frac{3}{36}$.

Desses cálculos, e observando o resultado do *problema 10*, obtemos:

$$P(A|B) = \frac{3}{9} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Assim, obtivemos a relação: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, a qual não se verifica apenas para o caso particular do *problema 10*. Na verdade, essa relação é a definição de probabilidade condicional (MORGADO et al., 2004). Para obtermos consistência na definição de Probabilidade Condicional exigimos que $P(B) > 0$.

Segundo Meyer (1976, p. 39), "sempre que calcularmos $P(A|B)$, estaremos essencialmente calculando $P(A)$ em relação ao *espaço amostral reduzido* B, em lugar de fazê-lo em relação ao espaço amostral original S".

Após a sistematização do conceito, com a apresentação de sua definição e algumas propriedades básicas, pode-se, então, resolver outros problemas com o objetivo de fortalecer o aprendizado de técnicas e fixar o conceito de Probabilidade Condicional. Neste momento, deve-se privilegiar a utilização do conceito estudado através do uso de suas fórmulas e propriedades e do rigor característicos da matemática.

6. Eventos Independentes

O *problema 11* pode ser utilizado para sistematizar o importante conceito de eventos independentes.

Problema 11. Considerando-se que o jogador utilizou apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó, qual a probabilidade de marcar a casa General?
Solução.

O Jogador marca a casa General no primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó se consegue o resultado (6; 6) em um único e simultâneo lançamento dos dois dados, isto ocorre com probabilidade $p = \frac{1}{36}$, ou seja, um caso favorável em 36 casos possíveis (S).

Outra solução.

Consideremos os seguintes eventos:

A: O Jogador obtém a face 6 no dado vermelho e

B: O Jogador obtém a face 6 no dado branco.

Para o Jogador marcar a casa General no primeiro lançamento, deve obter a face 6 no dado vermelho *e* também obter a face 6 no dado branco. Temos, então, a probabilidade

$$p = \frac{1}{6} \text{ x } \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \text{. Assim } P(A \cap B) = \frac{1}{36} \text{.}$$

Temos ainda que $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$.

Portanto,

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \text{ x } \frac{1}{6} = P(A) \,.\, P(B).$$

Concluímos, então, que neste caso, $P(A \cap B) = P(A).P(B)$. Em termos de probabilidade condicional obtemos que:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A).P(B)}{P(B)} = P(A)$$

ou seja, a probabilidade de ocorrer o evento A dado que ocorreu o evento B é igual a probabilidade de A. Assim, a ocorrência do evento B não interfere sobre a ocorrência ou não do evento A. Se $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, os eventos A e B são chamados *Eventos Independentes*. De maneira análoga, se A e B são eventos independentes, então $P(B|A) = P(B)$.

Para marcar a casa General o jogador deverá obter a face 6 no dado vermelho *e* a face 6 no dado branco; observa-se o destaque dado ao *e*. Em linhas gerais, quando duas ações sucessivas devem ser satisfeitas, então multiplicamos as probabilidades envolvidas.

7 Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes

Os problemas desta seção podem ser utilizados para a sistematização de dois importantes teoremas da teoria de probabilidades, a saber: o Teorema da Probabilidade Total e o Teorema de Bayes. Esses teoremas envolvem os conceitos de soma e produto de probabilidades bem como o conceito de Probabilidade Condicional.

Problema 12. Qual a probabilidade do jogador marcar a casa Quadrada no jogo Mini-Bozó?
Solução.

Neste caso, o jogador dispõe de até dois lançamentos e utilizará ou não o seu possível segundo lançamento, dependendo dos pontos que obteve no primeiro. Como o objetivo do jogador é marcar a casa Quadrada, dois casos devem ser considerados:
(a) obtém (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4) ou (5; 5) no primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó. Temos neste caso a probabilidade $p_1 = \frac{5}{36}$.
(b) obtém faces distintas no primeiro lançamento do jogo. Reserva um dos dados e lança novamente o outro dado, obtendo a mesma face do dado já reservado. Temos, neste caso, a probabilidade $p_2 = \frac{30}{36} \text{x} \frac{1}{6}$.

Portanto, se ocorrer o caso (a) ou (b) o jogador marcará a casa Quadrada. Assim, a probabilidade pedida será:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{5}{36} + \frac{30}{36} \text{x} \frac{1}{6} = \frac{60}{216} \cong 0{,}27777 \text{ ou } 27{,}78\%.$$

Observar que no caso (a) do *problema 12* não consideramos o caso (6;

6), nesta situação o jogador marcará a casa General e não a Quadrada. Ainda no caso (a) devemos observar que como o jogador já marcou a casa Quadrada em seu primeiro lançamento com os dois dados, então, ele não usará o seu possível segundo lançamento nesta jogada do jogo Mini-Bozó.

Problema 13. Qual a probabilidade do jogador marcar a casa General no jogo Mini-Bozó?
Solução.

Como o objetivo do jogador é marcar a casa General, três casos devem ser considerados:
(a) obteve duas faces 6 no seu primeiro lançamento, ou seja, obteve (6; 6). Temos, neste caso, a probabilidade $p_1 = \frac{1}{36}$.
(b) obteve uma face 6 no primeiro lançamento, ou seja, obteve um dos 10 seguintes resultados: (1; 6), (6; 1), (2; 6), (6; 2), (3; 6), (6; 3), (4; 6), (6; 4), (5; 6) ou (6; 5). Reserva o dado com a face 6. Lança o outro dado e obtém a face 6. Temos, neste caso, a probabilidade $p_2 = \frac{10}{36} \text{x} \frac{1}{6}$.
(c) não obteve a face 6 no primeiro lançamento, ou seja, obteve um dos 25 seguintes resultados: (1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4) ou (5; 5). Lança novamente os dois dados e obtém (6; 6). Temos, neste caso, a probabilidade $p_3 = \frac{25}{36} \text{x} \frac{1}{36}$.

Portanto, se ocorrer o caso (a) ou (b) ou (c) o jogador marcará a casa General. Assim, a probabilidade pedida será:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{36} + \frac{10}{36} \text{x} \frac{1}{6} + \frac{25}{36} \text{x} \frac{1}{36} = \frac{121}{1296} \cong 0{,}09336 \text{ ou } 9{,}34\% .$$

Outra solução.

Definimos os seguintes eventos:

B: O Jogador marcou a casa General no jogo Mini-Bozó;
A_1: O Jogador marcou a casa General no seu primeiro lançamento;
A_2: O Jogador obteve uma face 6 no seu primeiro lançamento;
A_3: O Jogador não obteve a face 6 em seu primeiro lançamento;

Assim,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) \\ &= P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + P(A_3).P(B|A_3) \\ &= \frac{1}{36} \times 1 + \frac{10}{36} \times \frac{1}{6} + \frac{25}{36} \times \frac{1}{36} = \frac{121}{1296} \cong 0{,}09336 \text{ ou } 9{,}34\,\%. \end{aligned}$$

Usamos na segunda igualdade a definição de Probabilidade Condicional, observando que $P(B|A_1) = 1$, pois se o Jogador marcou a casa General em seu primeiro lançamento, então não usará o seu possível segundo lançamento.

Após o trabalho com situações-problema do tipo dos *problemas 12* e *13*, o professor poderá ter mais facilidade para sistematizar o seguinte teorema (MORGADO et al., 2004).

Teorema 1. (Teorema da Probabilidade Total)

Se B é um evento contido numa união de eventos disjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $P(A_1) > 0, P(A_2) > 0, \ldots, P(A_n) > 0$, então

$$P(B) = P(A_1).P(B|A_1) + P(A_2).P(B|A_2) + \ldots + P(A_n).P(B|A_n).$$

Problema 14. Qual a probabilidade do jogador não ter obtido nenhuma face 6 no seu primeiro lançamento, sabendo-se que ele marcou a casa General?

Solução.

Considerando-se os mesmos eventos definidos no *problema 13*, desejamos agora calcular $P(A_3|B)$. Assim,

$$P(A_3|B) = \frac{P(B \cap A_3)}{P(B)} = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{\frac{25}{36} \times \frac{1}{36}}{0{,}09336} \cong 0{,}20662 \cong 20{,}66\,\%.$$

As duas primeiras igualdades da relação anterior seguem diretamente da definição de Probabilidade Condicional. Na solução do *problema 14*, utilizamos o seguinte e importante teorema (MORGADO et. al., 2004).

Teorema 2. (Teorema de Bayes)

Nas condições do *teorema 1*, se $P(B) > 0$, então, para i, i = 1, 2, ... , n,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i).P(B\,|\,A_i)}{P(A_1).P(B\,|\,A_1) + P(A_2).P(B\,|\,A_2) + \ldots + P(A_n).P(B\,|\,A_n)}.$$

8 Considerações finais

A proposta de ensino, aqui apresentada, utiliza os problemas para ensinar matemática (4º momento) e, também, utiliza matemática para resolver problemas (7º momento). Assim, nossa proposta está alicerçada nos PCN considerando-se a forma de abordar Resolução de Problemas. Todos os problemas refletem situações de jogo, ou seja, usamos o jogo, outra estratégia de ensino sugerida nos PCN, não apenas para motivar os alunos, mas como desencadeador de aprendizagem. As situações-problema, aqui apresentadas, são originais e foram formuladas no sentido de contemplar, em suas resoluções, o conceito probabilístico a ser estudado.

A associação do jogo com a resolução de problema torna as aulas mais atraentes e participativas, os alunos tornam-se ativos na construção de seu próprio conhecimento. O que buscamos é o desenvolvimento do raciocínio dedutivo do aluno, e não a memorização de fórmulas. A memorização pode ser temporária, mas o desenvolvimento do raciocínio e a apreensão do conhecimento são para toda a vida.

A metodologia de trabalho com jogos e resolução de problemas, aqui sugerida, segue a tendência construtivista do ensino de Matemática. Nesta tendência, “a preocupação é com a construção do conceito pela criança, estando esta ativa nesta construção. O professor é o mediador e facilitador na aprendizagem do aluno, intervindo e problematizando” (GRANDO, 2007, p. 47).

Apoiados nas contribuições do campo da Psicologia, os estudos de Leontiev (1991) e Kamii (1994), citados por Grando (2007), discutem a importância do jogo para o desenvolvimento cognitivo, afetivo, social e moral das crianças. Segundo estes autores,

> [...] a intervenção pedagógica com jogos é vista como potencialmente rica a fim de desencadear conflitos cognitivos e abstrações reflexivas, capazes de possibilitar a construção do conhecimento pelo aluno. As situações-problema desencadeadas durante o jogo, ou mesmo, *propostas sobre o jogo*, pelos professores, possibilitam a aproximação da situação vivenciada corporalmente com a sistematização do conceito, pelo registro e análise do jogo ((LEONTIEV, 1991; KAMII, 1994, apud GRANDO, 2007, p.48, grifo nosso).

A literatura sobre o uso de jogos nas séries iniciais, para o trabalho com conceitos matemáticos com crianças, é relativamente extensa. Já para o Ensino

Médio esta literatura é bastante escassa, e praticamente inexistente em língua portuguesa. O objetivo principal desta proposta didático-pedagógica é fazer com que os próprios alunos construam/reconstruam o conceito matemático, com a adequada e imprescindível participação do professor.

Segundo os PCN não existe um caminho único e melhor para o ensino de Matemática. "No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática" (BRASIL, 2000, p. 42).

O trabalho com conteúdos de probabilidade é considerado difícil por muitos professores. Assim, nossa contribuição está em oferecer uma proposta de ensino diferente, não contemplada nos livros didáticos, a qual pode subsidiar e colaborar com a prática de sala de aula de professores que ensinam os conceitos iniciais de Probabilidade.

Referências

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: Uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – PCN_+: Matemática. Brasília: MEC, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br>. Acesso em: 30 maio 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática v.3, 2. ed.. Brasília: MEC/SEF, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br>. Acesso em: 10 jan. 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Portal do professor. **A probabilidade do Bozó**. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1124 >. Acesso em: 31 jan. 2010.

COUTINHO, C. Q. S. **Introduction aux situations aléatoires dès le collège**: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II. 2001. 330f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier, Grenoble I, França. 2001.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000. 224f. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

GRANDO, R. C. Concepções quanto ao uso de jogos no ensino da matemática. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 10, n. 12, p. 43-50. 2007.

MACEDO, L.; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. **Aprender com jogos e situações-problema**. Porto Alegre: Artmed, 2000.

MEYER, P. L. **Probabilidade:** aplicações à estatística. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1976.

MORGADO, A. C. O. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 2004. (Coleção do Professor de Matemática).

MOURA, M. O. **O jogo e a construção do conhecimento matemático**. São Paulo: FDE, 1992. (Série Idéias, 10).

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA, 1989.

NAVARR0-PELAYO, V.; BATANERO, C.; GODINO, J. D. Razonamiento combinatório em alumnos de secundaria. **Educación Matemática**, México, v. 8, n. 1, p. 26-39. 1996. Disponível em: http://www.ugr.es/~batanero>. Acesso em: 25 mar. 2009.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções & perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-218.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. **Caderno do professor**: matemática. São Paulo: SEE, 2008. (Ensino Médio 2ª série, 3º bimestre).

Submetido em Maio de 2010.
Aprovado em Dezembro de 2010.