ISSN 0103-636X

Estudio sobre las Praxeologías que se Proponen Estudiaren un Curso Universitario de Cálculo

Study of the Praxeologies Proposed to Study in a University Calculus Course

Ana Rosa Corica*
María Rita Otero**

Resumen

En este trabajo se analizan las organizaciones que se proponen estudiar en un curso de cálculo universitario relativas a las nociones de límite y continuidad funcional. Desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico se analizó el material editado por lo profesores destinado a estudiantes universitarios. Los principales resultados indican que se propone el estudio de tareas aisladas, que no conducen a la elaboración y validación de elementos tecnológicos. De esta manera, se evidencia la organización de los saberes en dos *niveles*: uno teórico y otro práctico, donde este último no tiene incidencia para la conformación del primero. Esto genera una inadecuada interpretación del conocimiento científico, reduciendo su estudio a organizaciones matemáticas desarticuladas.

Palabras-clave: Enseñanza. Cálculo. Organización Matemática. Teoría Antropológica de lo Didáctico. Nivel Universitario.

* Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad Nacional de Córdoba (UNC). Becaria del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Miembro del Núcleo de Investigación en Enseñanza de las Ciencias y la Tecnología (NIECyT). Docente de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Dirección postal: Facultad de Ciencias Exactas, Departamento de Formación Docente, Pinto 399, (7000) Tandil, Buenos Aires, Argentina. *E-mail*: acorica@exa.unicen.edu.ar.

** Doctora en Enseñanza de las Ciencias por la Universidad de Burgos (UBU). Investigadora Independiente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Directora del Núcleo de Investigación en Enseñanza de las Ciencias y la Tecnología (NIECyT). Coordinadora del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias mención Matemática y Profesor Asociado Ordinario de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Dirección postal: Facultad de Ciencias Exactas, Departamento de Formación Docente, Pinto 399, (7000) Tandil, Buenos Aires, Argentina. *E-mail*: rotero@exa.unicen.edu.ar.

Abstract

In this research we analyzed the organizations proposed to be studied in a university calculus course relative to the notions of functional limit and continuity. The material developed by teachers for the university students was analyzed using the Anthropologic Theory of the Didactic. The principal results indicate that the materials propose the study of isolated tasks, which do not lead to the production and validation of technological elements. Thus, knowledge appears to be organized in two levels: one theoretical and other practical, where the latter does not affect the conformation of the former. This generates an inadequate interpretation of scientific knowledge, reducing its study to disconnected mathematical organizations.

Keywords: Teaching. Calculus. Mathematics Organization. Anthropologic Theory of the Didactic. University Level.

1 Introducción

En esta investigación se propone un estudio cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo del material diseñado y utilizado por profesores en un curso universitario de cálculo, en base a un programa también diseñado en esa cátedra. Se utiliza la Teoría Antropológica de lo Didáctico (CHEVALLARD, 1999), según la cual no es posible analizar la actividad del profesor sin considerar el saber matemático objeto de enseñanza. Las organizaciones matemáticas que se proponen estudiar, forman parte del conjunto de *condiciones* y *restricciones matemáticas* que rigen la práctica del profesor.

El estudio se realizó en el primer año de una facultad de ciencias exactas, en una universidad nacional argentina. En este trabajo, damos respuesta a las siguientes preguntas estrechamente relacionadas: ¿Qué tipo de tareas relativas al límite y continuidad de funciones se proponen estudiar en un curso de cálculo universitario? ¿Cómo se relacionan estas tareas?

2 El problema y sus antecedentes

En la enseñanza universitaria, el estudio del cálculo es el ámbito donde se ha detectado mayores dificultades en el aprendizaje de los estudiantes. Cada vez son más las investigaciones que centran su interés en este nivel, y, en particular, sobre el papel de la didáctica en la enseñanza de la matemática universitaria (ARTIGUE, 2003). Numerosos investigadores se ocuparon de la problemática, algunos de ellos realizaron estudios que caracterizaron las dificultades y obstáculos en el aprendizaje de nociones de cálculo, acompañados por aspectos de naturaleza epistemológica, cognitiva y didáctica (APARICIO; CANTORAL, 2006; ARTIGUE, 1995; BARBOSA; MATTEDI, 2010; BEZUIDENHOUT, 2001; CORNU, 1991; GODINO; CONTRERAS; FONT, 2006; SIERRA; GONZÁLEZ; LÓPEZ, 2000; TALL, 1991). También se documentó que ciertos problemas derivan del tipo de tratamiento escolar que se confiere a las nociones de función, límite, continuidad, diferenciación e integración (AZCÁRATE; DEULOFEU, 2000; APARICIO; CANTORAL, 2003; HITT, 1994; TALL; VINNER, 1981).

Otros trabajos se han preocupado por analizar las razones que subyacen a tales dificultades y por proporcionar soluciones efectivas, a través de propuestas didácticas que se sustentan en diversos marcos teóricos (BLÁZQUEZ; ORTEGA, 2002; ESPINOZA; AZCÁRATE, 2000; GARCÍA; NAVARRO, 2010; MAMONA-DOWNS, 2001; TALL, 1986, TALL; BLOKLAND; KOK, 1990).

En los últimos años de investigación sobre didáctica de la matemática en el nivel universitario, los investigadores trasladaron el foco de interés del estudiante al profesor. Esto mostró la complejidad del estudio de la matemática en la universidad, no sólo por las características particulares de los profesores y de los estudiantes, sino también de los cursos de matemática universitaria y de las características específicas de la Universidad como institución, que condiciona, limita y determina los límites de actuación en ella (MORENO, 2005). En particular, nuestro trabajo se focaliza en la actividad del profesor de Matemática, centrando la atención en el material que diseñan los docentes para la enseñanza de nociones de cálculo en la Universidad.

3 Marco teórico

En este trabajo adoptamos como referencial teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (CHEVALLARD, 1999) porque resulta ser una poderosa herramienta para describir la actividad docente. En principio, tomamos el constructo teórico fundamental de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), que es la noción de *praxeología*, y, en base al mismo, se desarrolló toda la investigación.

Las praxeologías u organización matemática (OM), surgen como respuestas a una cuestión o conjunto de cuestiones problemáticas que se denominan *cuestiones generatrices*. Las praxeologías constan de dos niveles:

- El nivel de la *praxis* o del *saber hacer*, que engloba un cierto *tipo de tareas* y cuestiones que se estudian, así como las *técnicas* para resolverlos.
- El nivel del *logos* o del *saber*, en el que se sitúan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, los que reciben el nombre de *tecnología*. Dentro del *saber* se postula un segundo nivel de descripción-explicación-justificación (esto es, el nivel *tecnología de la tecnología*) que se denomina *teoría*.

Junto a las tareas de concepción y organización de mecanismos de estudio, así como la gestión del medio ambiente (*Organizaciones Matemáticas*), se distinguen las tareas de ayuda al estudio, particularmente la dirección de estudio y enseñanza, cuyo cumplimiento es debido a la puesta en ejecución de técnicas didácticas determinadas (*Organizaciones Didácticas*). La consideración de los diversos procesos que conciernen a la construcción matemática permite identificar sus aspectos invariantes, es decir, las dimensiones o momentos que estructuran cualquier proceso de elaboración matemática, independientemente de sus características culturales, sociales, individuales o de otra índole. Así, el proceso de estudio se sitúa en un espacio determinado por seis *momentos didácticos*: el momento del primer encuentro con un determinado tipo de tareas; el momento exploratorio del tipo de tareas; el momento de construcción de un entorno tecnológico-teórico, que explica y justifica las técnicas puestas en funcionamiento y permite la elaboración de nuevas técnicas; el momento de trabajo de la técnica, que provoca la evolución de las técnicas existentes y la construcción de nuevas; el momento de la institucionalización, que delimita y precisa aquellos elementos constituyentes de la organización matemática construida; el momento de la evaluación de la praxeología construida.

La TAD, desde sus comienzos con la transposición didáctica (CHEVALLARD, 1985), fue uno de los primeros enfoques en considerar, como objeto de estudio e investigación, no sólo las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino de todo el proceso que va desde la creación y utilización del saber matemático hasta su incorporación en las instituciones de enseñanza como saber enseñado. Para explicar los procesos de enseñanza es necesario considerar todas las etapas de la transposición didáctica. En particular, nos detendremos a describir la *OM a enseñar*. Esta organización constituye un modelo praxeológico de las matemáticas que se propone en el programa del curso. En la universidad, el diseño es propuesto por los profesores que dirigen el curso y se presenta como un conjunto de nociones a estudiar. A partir del mismo, los docentes proponen un conjunto de tareas, técnicas y elementos tecnológicos.

Así mismo, la *OM* a *enseñar* no puede ser adecuadamente *interpretada* si no se dispone de un punto de vista epistemológico. Esto lo proporciona la *OM de referencia,* la que, en correspondencia con la TAD, no asume la distinción entre teoría y práctica que caracterizan a la OD del curso bajo estudio. La *OM de referencia* es la que usa el investigador para realizar su análisis y no necesariamente coincide con la *OM sabia* de la que proviene, aunque se formula en términos próximos a ésta y a la *OM a enseñar*.

4 Metodología

Se realizó un estudio de corte descriptivo e interpretativo sobre un curso de cálculo en una facultad de ciencias exactas, de una universidad nacional argentina.

El curso dura cuatro meses, y se compone de clases teóricas (CT) y prácticas (CP), que se imparten dos veces por semana. Cada CT comprende 90 minutos, mientras que cada CP 120 minutos. El curso está a cargo de un profesor, quien se ocupa exclusivamente de organizar y dirigir las CT, un *coordinador*, quien organiza las CP y dirige, en ciertas ocasiones, las CT, y de profesores que dirigen las CP. Las CT se ofrecen a todos los estudiantes en un aula tipo anfiteatro, mientras que las CP son desarrolladas en cuatro aulas.

Durante los cuatro meses que comprende el curso se propone estudiar nueve unidades temáticas, cuyo desarrollo incluye material teórico y práctico.

La acreditación del curso propone la aplicación de exámenes individuales y escritos. Se ofrecen dos formas para la evaluación, y los estudiantes tienen que optar por una:

- Modalidad promoción: consiste en tres exámenes individuales y escritos; en cada uno se evalúa una unidad temática o módulo. A ésta modalidad de evaluación se presentó, aproximadamente, el 97% de los estudiantes que realizaron el curso.
- Modalidad tradicional: Consta de un examen individual y escrito al finalizar el curso, donde se involucran todas las nociones estudiadas en el mismo.

En primera instancia, en el curso se realizaron tres meses de observación no participante y se recabó: el material editado por los profesores, el programa del curso, las versiones en audio de las clases teóricas y prácticas, las explicaciones que hicieron los profesores en el pizarrón, junto a los apuntes de clase y los exámenes realizados por los estudiantes.

Aquí, nos centramos en el estudio del programa del curso y el material editado por los profesores. Para desarrollar este estudio, y en concordancia con el referencial teórico asumido, fue necesaria la elaboración de una *OM de referencia,* relativa al límite y continuidad de funciones. Dicha organización se presenta en el siguiente apartado.

5 Organización matemática de referencia

A continuación presentamos una OM en torno al límite y continuidad de funciones de una variable, que nos servirá como modelo para el análisis de la *OM a enseñar* en el curso bajo estudio. Dicho modelo es la mejor aproximación posible a las condiciones que imperan en la institución, asumiendo una organización didáctica donde no se separa el bloque práctico - técnico del tecnológico – teórico.

Para la descripción de la *OM de referencia* (OM_R), comenzamos por indicar una cuestión generatriz inicial Q_0 que se formula mediante dos preguntas complementarias:

Q_0’: *¿Cómo estudiar la existencia del límite de funciones?*, Q_0”: *¿Para qué estudiar la existencia del límite de funciones?*

La pregunta Q_0’ podría ser interpretada como una simple demanda de información, donde la respuesta podría ser del estilo: *Si o no, según sea el resultado al calcular el límite de la función: si el resultado es un número real se establece que existe el límite, en caso contrario, se establecerá que no existe el límite.* Esta respuesta podría ser natural, situándonos en el grupo de estudiantes que componen al curso. Pues, numerosas investigaciones han identificado los mismos errores y dificultades en estudiantes de cursos de cálculo, en diversos entornos sociales y con diferentes rangos de habilidades. En particular, se destaca la presencia de procedimientos (tales como calcular límites) que operan en un nivel puramente algorítmico. Esto es producto de una enseñanza del cálculo esencialmente *algebraica*, al tratar el límite como un proceso algebraico *finito*, y en un intento escolar de reducir las técnicas específicas del análisis, en las que prima la utilización de condiciones suficientes, a maneras de hacer puramente algebraicas centradas en el uso de equivalencias sucesivas (ARTIGUE, 1995). En nuestro caso, esto se reafirmaría como consecuencia de la formación que adquieren los estudiantes en el Curso de Nivelación[1]: los tipos de tareas y técnicas propuestas acentuarían la tendencia de algebrizar el cálculo.

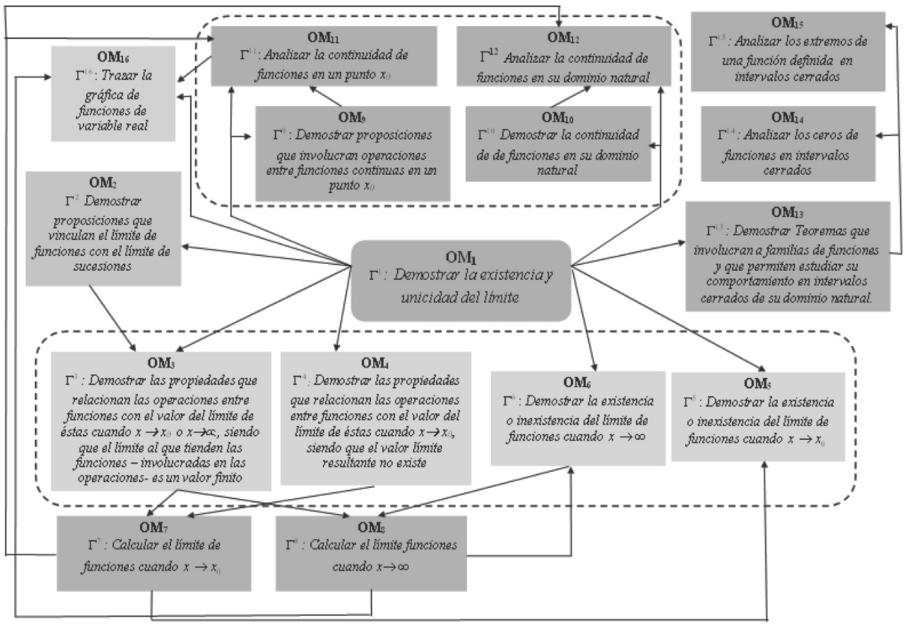
Consideramos que se propone a los estudiantes utilizar, de forma naturalizada, técnicas, sin haberse cuestionado su pertinencia, ni las razones de ser. En este caso, la cuestión se convierte en problemática, y el tratar de resolverla genera una serie de tareas no rutinarias. Su resolución requerirá elaborar un conjunto de técnicas matemáticas que, además, deberán ser descrita, explicadas y justificadas mediante el entorno tecnológico – teórico. Esto es producto de considerar la cuestión Q_0' en un sentido fuerte. Este sentido se ve fortalecido por la presencia de Q_0'', pues dar respuesta a esta cuestión implica el estudio de OMs donde encuentra sentido el estudio de Q_0', como por ejemplo el estudio de la continuidad funcional. Considerar una cuestión en su sentido *fuerte*, conduce a un proceso de elaboración de posibles respuestas que ponen en juego sucesivas OMs: cada una de ellas viene a corregir, completar y/o desarrollar las anteriores.

A continuación, describimos la OM_R en torno a las nociones de límite y continuidad funcional. En particular, aquí presentamos una *selección* de nociones que estimamos como fundamental, pues el curso es desarrollado en cuatro meses, y sólo el 10% de las Clases Prácticas (CP) y de las Clases Teóricas (CT) son destinadas al estudio del límite funcional; así como, también el mismo período de tiempo es destinado al estudio de la continuidad funcional.

A partir de la cuestión generatriz inicial, derivamos un conjunto de cuestiones generatrices que dieron origen a establecer 16 OM relacionadas y fundamentales, para el estudio de nociones básicas de cálculo.

En el esquema 1 indicamos cada una de las OM que integran la *OM de referencia* y las relaciones que se establecen.

[1] Como condición para ingresar a la facultad en la que se desarrolló la investigación, los estudiantes que participaron de esta investigación tuvieron que aprobar un curso nivelatorio. Aquí, se propone estudiar nociones de matemática desarrolladas durante toda la secundaria, entre las que se incluyen las nociones de límite y continuidad funcional.



Esquema 1 - Organización matemática de referencia

La cuestión generatriz inicial de la OM_R es Q_0: *¿Cómo estudiar la existencia del límite de funciones?* y *¿Para qué estudiar la existencia del límite de funciones?* La OM_R se compone de 16 OM[2]. Los tipos de tareas constitutivos de cada OM corresponden a los géneros: *Demostrar* (OM_1, OM_2, OM_3, OM_4, OM_5, OM_6, OM_9, OM_{10} y OM_{13}), *Calcular* (OM_7, OM_8), *Analizar funciones* (OM_{11}, OM_{12}, OM_{14} y OM_{15}) y *Representar gráficamente* (OM_{16}).

El género de tareas *Demostrar* engloba aquellas tareas que requieren de la formulación de una secuencia de enunciados organizados según determinadas reglas. El género de tareas *Calcular* hace referencia a tareas que implican llevar a cabo ciertos procedimientos, basados en reglas que son tomadas como verdaderas, para obtener un resultado que nos permita predecir algunos acontecimientos. El género de tareas *Representar gráficamente* engloba tareas que implican la realización de esquemas que posibilitan estudiar la noción matemática que está en juego. Finalmente, el género de tarea *Analizar funciones* involucra tareas que requieren del estudio del límite y continuidad de funciones. En el curso, éste género se ve enriquecido con el estudio de tareas relativas a la derivada de funciones.

La OM_1 es la pieza fundamental que permite la supervivencia de las

[2] Cada OM que compone a la OM_R se distingue como OM_x, donde x toma valores numéricos.

demás OM que se definen. El tipo de tarea que conforma a OM_1 es Γ^1: *Demostrar la existencia y unicidad del límite.* La cuestión generatriz asociada es Q_1: *¿Qué significa que exista el límite?*

La OM_2 queda representada por el tipo de tarea Γ^2: *Demostrar proposiciones que vinculan el límite de funciones con el límite de sucesiones.* La cuestión generatriz asociada es Q_2: *¿Cómo se vincula el límite de funciones con el límite de sucesiones?* En el hacer de Γ^2, se gesta un entorno tecnológico que permite justificar algunas de las técnicas empleadas en el hacer de Γ^3.

La OM_3 y la OM_4 se originan a partir de la misma cuestión generatriz Q_3: *¿Cómo demostrar la existencia del límite?* El tipo de tarea que conforma a OM_3 es Γ^3: *Demostrar las propiedades que relacionan las operaciones entre funciones con el valor del límite de éstas cuando $x \to x_0$ o $x \to \infty$, siendo que el límite al que tienden las funciones involucradas en las operaciones es un valor finito.* Y el tipo de tarea que conforma a OM_4 es Γ^4: *Demostrar las propiedades que relacionan las operaciones entre funciones con el valor del límite de éstas cuando $x \to x_0$, siendo que el valor límite resultante no existe.* El hacer de Γ^3 y Γ^4 consolida la tecnología que justifica el hacer de Γ^7. A su vez, en la OM_3 se consolida la tecnología que justifica el hacer de Γ^8.

La OM_7 y la OM_8 se las define a partir de la misma cuestión generatriz Q_4: *¿Cómo calcular el límite?* El tipo de tarea que conforma a la OM_7 es Γ^7: *Calcular el límite de funciones cuando $x \to x_0$.* El tipo de tarea que constituye a la OM_8 es Γ^8: *Calcular el límite funciones cuando $x \to \infty$.* En el hacer de Γ^7 y Γ^8 se establece la existencia del límite de funciones, pues las técnicas que se emplean encuentran justificación en las formulaciones establecidas en OM_3 y OM_4.

La OM_5 y la OM_6 tienen asociada la misma cuestión generatriz Q_3: *¿Cómo demostrar la existencia del límite?* El tipo de tarea que conforma a OM_5 es Γ^5: *Demostrar la existencia o inexistencia del límite de funciones cuando $x \to x_0$.* El tipo de tarea que constituye a OM_6 es Γ^6: *Demostrar la existencia o inexistencia del límite de funciones cuando $x \to \infty$.* En ambas OM se busca consolidar una técnica que permita establecer la existencia del límite de funciones.

En forma complementaria, se podría estudiar las tareas que componen a OM_7 u OM_8 y, luego, establecer la existencia del límite calculado, a partir de las técnicas que se desprenden del hacer de Γ^5 o Γ^6 según correspondiera. Esta actividad deja emerger ciertas redundancias, que resultarían útiles en el proceso de estudio.

Con relación al estudio de la continuidad de funciones, la supervivencia de esta organización se encuentra íntimamente ligada con la validez de las tareas constitutivas de la OM_1. La OM_9, OM_{10}, OM_{11} y OM_{12} se gestan a partir de la misma cuestión generatriz Q_5: *¿Cómo determinar la continuidad de funciones?* El hacer de Γ^9 y Γ^{10}, consolida la tecnología de Γ^{11} y Γ^{12} respectivamente. El tipo de tarea que conforma a la OM_9 es Γ^9**:** *Demostrar proposiciones que involucran operaciones entre funciones continuas en un punto x_0*. El tipo de tarea que constituye a la OM_{10} es Γ^{10}: *Demostrar la continuidad de funciones en su dominio natural*. Mientras que el tipo de tareas que define a OM_{11} y a OM_{12} son respectivamente Γ^{11}: *Analizar la continuidad de funciones en un punto x_0* y Γ^{12}: *Analizar la continuidad de funciones en su dominio natural*.

La OM_{13}, OM_{14} y OM_{15} se componen de tareas que procuran el estudio de funciones en intervalos cerrados, en combinación con el estudio de la continuidad de las mismas. El tipo de tarea que constituye a la OM_{13} es Γ^{13}: *Demostrar Teoremas que involucran a familias de funciones y que permiten estudiar su comportamiento en intervalos cerrados*, y la cuestión generatriz asociada es Q_6: *¿Cómo demostrar teoremas que permiten estudiar a funciones continuas en intervalos cerrados?* En esta OM, se consolida la tecnología que justifica las técnicas para el hacer del tipo de tareas que define a la OM_{14} y a la OM_{15}.

El tipo de tarea que constituye a la OM_{14} es Γ^{14}*: Analizar los ceros de funciones en intervalos cerrados* y la cuestión generatriz asociada es Q_7: *¿Cómo establecer la existencia de los ceros de una función?* El hacer de Γ^{14} consolida una técnica para el estudio de ceros de funciones. En algunas ocasiones, puede actuar como una técnica alternativa a las que conocen los estudiantes para este estudio, y, en otras, constituir una nueva técnica, para aquellos problemas que hasta el momento no podían dar respuesta.

El tipo de tarea que define a la OM_{15} es Γ^{15}: *Analizar los extremos de una función definida en intervalos cerrados* y la cuestión generatriz asociada es Q_8: *¿Cómo establecer si una función alcanza un máximo y/o un mínimo?* El estudio de Γ^{15} se enriquece con el estudio de la noción de derivada de funciones, no obstante, consideramos oportuno el estudio de esta tarea, pues permite el empleo en parte de la tecnología que se gesta en Γ^{13} y una aproximación al tipo de estudio que se podrá realizar con nociones de derivada de funciones.

Finalmente, la OM_{16} se define a partir del tipo de tarea Γ^{16}: *Trazar la gráfica de funciones de variable real* y la cuestión generatriz asociada es Q_9:

¿Cómo representar gráficamente a funciones de variable real? Aquí, la propuesta es integrar nociones que emergen de la definición de límite y continuidad de funciones. También, en forma complementaria se puede estudiar Γ^{16} con tareas que se estudian en OM_7 y $OM_{8,}$ haciendo evidente la integración entre las OM.

6 Descripción de la organización matemática a enseñar

A continuación, describimos la *OM a enseñar*. En primera instancia, describiremos los componentes matemáticos presentes en el programa propuesto por los profesores del curso y, luego, el material diseñado por dichos profesores.

6.1 Programa del curso

El programa del curso se compone de 9 unidades: Unidad 1: estructura del conjunto de los números reales; Unidad 2: funciones; Unidad 3: sucesiones de números reales; Unidad 4: límite y continuidad de funciones; Unidad 5: derivadas; Unidad 6: la integral definida; Unidad 7: cálculo de primitivas; Unidad 8: series numéricas; Unidad 9: series de funciones, series de potencias y serie de Taylor.

Destacamos la cantidad de nociones a estudiar en un curso que dura 4 meses. En particular, a pesar de la posición central que ocupa el estudio del límite de funciones, sólo el 10% de las clases prácticas (CP) y de las clases teóricas (CT) son destinadas a dicho estudio. A esto se suman las características del grupo de alumnos que componen el curso. Se encuentra integrado por estudiantes que se inician en la vida universitaria: los alumnos deben someterse a mayores esfuerzos de atención y concentración en cada clase, diferente a lo vivido en la escuela secundaria. Las clases son multitudinarias, en la facultad bajo estudio los alumnos componen cursos de, aproximadamente, 200 - 300 integrantes, mientras que en la escuela secundaria argentina, los cursos se componen de, a lo sumo, 35 estudiantes. Esta situación es percibida como negativa por los alumnos universitarios, pues un estudio desarrollado con estudiantes del mismo curso de cálculo que se presenta aquí, indica que una de las mayores contribuciones al aprendizaje de los estudiantes es tener posibilidad de comunicación con los profesores (CORICA, 2009).

A continuación, se indican las nociones propuestas en la unidad de límite y continuidad de funciones:

Unidad 4: límite y continuidad de funciones
a) Definición de límite de una función
b) Propiedades del límite
c) Vinculación entre límite de funciones y el límite de sucesiones
d) Límites laterales y límites al infinito
e) Funciones continuas en un punto
f) Funciones continuas en un intervalo cerrado

En relación a las nociones indicadas, los profesores del curso elaboran el material teórico y práctico que se estudiará en las clases. Si bien, las nociones de límite y continuidad se proponen para ser estudiadas dentro de un mismo bloque temático, se separan a partir del diseño de los materiales. De hecho, esto también se materializa en la evaluación, pues la noción de límite funcional forma parte de los contenidos que se evalúan en el primer examen para la modalidad de promoción, y la noción de continuidad forma parte del segundo examen. Hacemos esta apreciación porque asumimos que la evaluación constituye un momento adicional de institucionalización en el sistema didáctico, precisando algunos aspectos de la OM, pues las tareas presentes en las evaluaciones informan sobre qué aspectos de una noción se destacan y cuáles no.

6.2 Descripción del material diseñado por los profesores

El material editado por los profesores del curso se estructura en *material para las CT*, el que se compone del enunciado de definiciones, teoremas y proposiciones. Y el *material para las CP*, que se conforma de una introducción, donde se enuncian definiciones, teoremas y proposiciones - expuestos algunos en el material para las CT - que cumplen la función de bloque tecnológico, para el hacer de los ejemplos de tareas que se presentan. Luego, se propone una serie de tareas a ser resueltas.

Las tareas propuestas a los estudiantes, en relación al límite funcional, conciernen a los siguientes géneros de tareas: *Demostrar*, *Calcular y Representar gráficamente*. Mientras que las tareas destinadas al estudio de la continuidad funcional, remiten a los géneros de tareas: *Analizar funciones* y *Representar gráficamente*.

A continuación, indicamos los géneros de tareas, junto a los tipos de tareas constitutivos, que se proponen estudiar en el material para las CP. Para organizar la presentación adoptamos la siguiente notación: G^X: Denota el género de tarea, T_a^X: Denota el tipo de problema que conforma al género de tarea G^X y $\tau_{a,b}^X$: Denota a la tarea correspondiente a T_a^X.

Destacamos que los tipos de tareas reúnen a ciertas tareas, las que se diferencian entre sí por pequeñas variaciones de las técnicas a emplear para su hacer.

G^1 : *Demostrar*

T_1^1 : *Demostrar que el límite de la función f(x) es l cuando x tiende a un valor real finito y hallar, para ciertos valores de ε, el correspondiente valor de δ.*

$\tau_{1,1}^1$: *Demostrar que existe el límite de funciones definida a trozos y hallar, para ciertos valores de ε, el correspondiente valor de δ.*

$\tau_{1,2}^1$*: Demostrar que existe el límite de funciones racionales y hallar, para ciertos valores de ε, el correspondiente valor de δ.*

$\tau_{1,3}^1$*: Demostrar que existe el límite de funciones irracionales y hallar, para ciertos valores de ε, el correspondiente valor de δ.*

$\tau_{1,4}^1$*: Demostrar que existe el límite de funciones polinómicas y hallar, para ciertos valores de ε, el correspondiente valor de δ.*

$\tau_{1,5}^1$*: Demostrar que existe el límite de funciones módulo y hallar, para ciertos valores de ε, el correspondiente valor de δ.*

G^2 **:** *Calcular*

T_1^2 : *Calcular el límite de funciones cuando* $x \to x_0$.

$\tau_{1,1}^2$*: Calcular el límite de funciones definidas a trozos.*

$\tau_{1,2}^2$*: Calcular el límite de funciones trigonométricas.*

$\tau_{1,3}^2$*: Calcular el límite de funciones polinómicas.*

$\tau_{1,4}^2$*: Calcular el límite de funciones que son producto del cociente entre diversas familias de funciones.*

$\tau_{1,5}^2$*: Calcular el límite de funciones que se componen con expresiones irracionales.*

T_2^2 : *Calcular el límite de funciones cuando* $x \to \infty$.

$\tau_{2,1}^2$*: Calcular el límite de funciones que son producto del cociente entre diversas familias de funciones.*

$\tau_{2,2}^2$: *Calcular el límite de expresiones compuestas con la expresión* $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

$\tau_{2,3}^2$: *Calcular el límite de funciones que se componen con expresiones irracionales.*

G^3 **:** *Representar gráficamente*

T_1^3 : *Trazar la gráfica de funciones.*

$\tau_{1,1}^3$*: Trazar la gráfica de funciones de una variable real.*

G^4 : *Analizar funciones*

T_1^4 : *Analizar la continuidad de funciones en un punto x_0.*

$\tau_{1,1}^4$ *: Analizar la continuidad de funciones definidas a trozos.*

$\tau_{1,2}^4$ *: Analizar la continuidad de funciones que son producto del cociente entre diversas familias de funciones.*

$\tau_{1,3}^4$ *: Analizar la continuidad de funciones compuestas.*

$\tau_{1,4}^4$ *: Analizar la continuidad a derecha e izquierda de un punto de funciones definidas a trozos.*

T_2^4 : *Analizar la continuidad de una función en su dominio natural.*

$\tau_{2,1}^4$ *: Analizar la continuidad de funciones definidas a trozos.*

$\tau_{2,2}^4$ *: Analizar la continuidad de funciones que se componen con expresiones irracionales.*

$\tau_{2,3}^4$ *: Analizar la continuidad de funciones trigonométricas.*

$\tau_{2,4}^4$ *: Analizar la continuidad de funciones polinómicas.*

$\tau_{2,5}^4$ *: Analizar la continuidad de funciones que son producto del cociente entre diversas familias de funciones.*

$\tau_{2,6}^4$ *: Analizar la continuidad de funciones exponenciales.*

$\tau_{2,7}^4$ *: Analizar la continuidad de funciones resultantes de la composición de diversas familias de funciones.*

T_3^4 : *Analizar los ceros de una función.*

$\tau_{3,1}^4$ *: Analizar la ubicación de los ceros de una función de una variable real.*

La clasificación de los tipos de tareas y las tareas resultó ser complejo. Se propone estudiar una diversidad de expresiones, que dificulta la intención de clasificarlas en las familias de funciones más conocidas por los estudiantes (función racional, exponencial, logarítmica, irracional, trigonométrica y polinómica). Se presenta la más diversa combinación de ellas. Por ejemplo, encontramos expresiones del estilo: $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$ en la que se solicita estudiar $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Destacamos que *f*(*x*) no corresponde a una función racional, ni irracional en sentido estricto. El estudio de esta tarea implica una combinación del hacer de las tareas: $\tau^2_{1,3}$, $\tau^2_{1,4}$ y $\tau^2_{1,5}$. No hay oportunidad del estudio de tareas que permitan analizar las características de familias de funciones y, luego, realizar síntesis sobre el comportamiento de ellas. Esta presentación no hace más que acentuar la tendencia de concentrar las técnicas en la resolución algebraica, más que el estudio del límite de determinado tipo de funciones.

En el material para las CP, destinado al estudio del límite funcional, se presentan tareas ejemplares relativas a los géneros de tarea: *Calcular* y *Demostrar*, pero se excluyen tipo de tareas que compongan al género *Representar gráficamente*. Inferimos que para los profesores es importante estudiar técnicas relativas al *cómo* calcular el límite y *cómo* demostrar el límite por definición. Destacamos, también, que dentro de esta introducción, todas las tareas ejemplares hacen referencia al estudio del límite cuando $x \rightarrow x_0$, por lo que se atenúa la relevancia del estudio del límite cuando $x \rightarrow \infty$.

Al comparar los contenidos propuestos en los materiales para las CT y CP, observamos que las definiciones que se presentan no difieren, pero existen discrepancias en cuanto al estatus que se le otorgan a ciertas componentes de la OM. Por ejemplo, con relación al material para las CP, se enuncia la definición de límites laterales del siguiente modo:

Definición de límites laterales
Los valores de la función *f* tienen como límite por la derecha al número real *L* en el punto x_0 si y sólo sí: "Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x_0 < x < x_0 + \delta$, entonces $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$ ". Se denota $\lim\limits_{x \to x_0^+} = \lim\limits_{x > x_0} f(x)$.
Los valores de la función *f* tienen como límite por la izquierda al número real *L* en el punto x_0 si y sólo sí: "Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x_0 - \delta < x < x_0$, entonces $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$ ". Se denota $\lim\limits_{x \to x_0^-} = \lim\limits_{x < x_0} f(x)$.
Si los valores de una función admiten al mismo número real como límite por la derecha y por la izquierda de un punto x_0, entonces la función tiene límite finito en x_0.

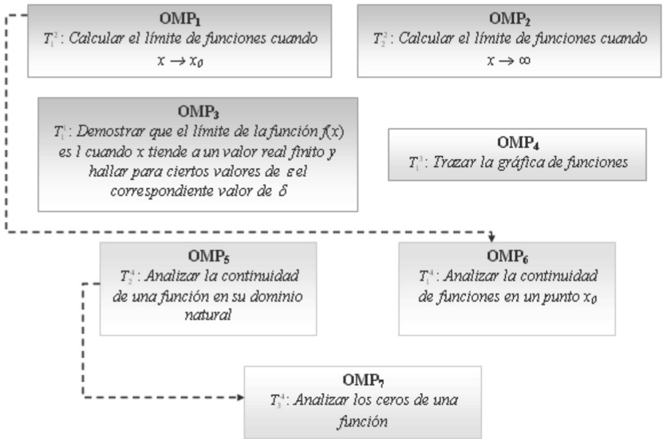
Al finalizar la definición, se indica lo siguiente: *Si los valores de una función admiten al mismo número real como límite por la derecha y por la izquierda de un punto* x_0, *entonces la función tiene límite finito en* x_0. Este enunciado es una proposición, y forma parte de las tareas que conforman a Γ^1 de la OM_1 (definida en la OM_R). En el material para las CP no se destaca la proposición como tal, por lo que atenúa la relevancia que tiene este enunciado dentro de la OM. En cambio, dicho enunciado se destaca como proposición en el material para las CT, aunque, dentro de la OM efectivamente enseñada esta proposición se encuentra nuevamente desvalorizada, pues se enuncia y se usa, no se demuestra (CORICA; OTERO, 2009).

Con relación al estudio de la continuidad funcional, en la introducción del material para las CP, se incorpora una serie de tareas ejemplares relativas al género: *Analizar funciones*, excluyendo tipo de tareas que compongan al género *Representar gráficamente*. Todas las tareas ejemplares propuestas remiten a presentar diferentes casos por los que una función podría ser discontinua. Se indica, en forma explícita, el punto problemático y la técnica para resolver. Los ejemplares de tareas hacen explicito *casos* a los que se podrían enfrentar los estudiantes al resolver el tipo de tarea: *Analizar la continuidad de funciones en un punto* x_0. Consideramos que esta presentación fortalece el aprendizaje de *cómo* dar respuestas más que aprender a preguntarse. Los ejemplos propuestos se transforman en una *guía* para los estudiantes al momento de resolver las tareas, pues basta con *encasillarlos* en algún ejemplar de los indicados y seguir los *pasos* para resolver. A los estudiantes se les brinda información predeterminada: enfrentarse a los problemas y proponer los diferentes prototipos de tareas a los que se pueden enfrentar, a partir del análisis de su hacer, no formaría parte de sus responsabilidades.

Destacamos que en el material para las CP, destinado al estudio de la continuidad funcional, se omiten tareas que remitan al género *Demostrar*. Esto desvanece el intento por introducir a los estudiantes a demostrar gestado en el material destinado al estudio del límite funcional.

Concluimos en que esta presentación del material en teórico y práctico instala la ficción de existencia de dos saberes matemáticos: uno teórico y otro práctico, donde algunas de las nociones que componen al saber teórico son usadas en el saber práctico. Esta presentación sugiere que las nociones se definen para su uso y no por su uso, es decir, el bloque tecnológico – teórico se presenta como el medio que *dicta* los contenidos al bloque práctico – técnico. Este último tiene una incidencia nula en la constitución del bloque tecnológico - teórico, pues no contiene cuestiones relevantes para que se convierta en engendrador del mismo.

A partir del estudio realizado al material diseñado por los profesores, caracterizamos la *OM a enseñar*. Para ello, trabajamos sobre los tipos de tareas definidos, las técnicas para poder ser resueltos y el entorno tecnológico que se indica en el material. En el esquema 2 sintetizamos la organización.



Esquema 2 - Organización matemática a enseñar

La OM a enseñar es una OM que se define por siete OM. En comparación con la OM_R descripta, estas OM son OM Puntuales (OMP[3]). Estas organizaciones son generadas por lo que se considera en la institución como un único *tipo de tarea*, y está definida a partir del bloque práctico-técnico (CHEVALLARD, 1999).

Las OMP_1 y OMP_2 comparten el mismo género de tareas que es *Calcular*. El tipo de tarea que define a OMP_1 es: $T_1^{\,2}$: *Calcular el límite de funciones cuando* $x \to x_0$, mientras que el tipo de tarea que define a OMP_2 es: $T_2^{\,2}$: *Calcular el límite de funciones cuando* $x \to \infty$. La cuestión generatriz asociada a estos tipos de tareas es: Q_1: *¿Cómo calcular el límite?*

Consideramos que las técnicas necesarias para realizar $T_1^{\,2}$ son justificadas, es decir, al menos en el material teórico se mencionan los elementos tecnológicos inmediatos que justificarían su hacer. Con relación a la OMP_2 consideramos que tiene un entorno tecnológico *insuficiente*, pues supuestamente $T_2^{\,2}$ puede ser abordado a partir del Álgebra de límites de funciones[4], pero, en los enunciados que se presentan en el material teórico, no

[3] Identificamos a cada OMP como OMP_x, donde x toma valores numéricos para distinguir cada OMP que se define.

[4] *Álgebra de límites de funciones*

a) Sea *f* y *g* dos funciones definida en todos los puntos de un intervalo abierto (*a, b*) que contiene a x_0, salvo quizás en el mismo x_0 y tales que $l_1 = \lim_{x \to x} f(x)$ y $l_2 = \lim_{x \to x} f(x)$ entonces

i) $\lim_{x \to x_0}\left[f(x) + g(x)\right] = l_1 + l_2$ *ii*) $\lim_{x \to x_0}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = l_1 \cdot l_2$ *iii*) $\lim_{x \to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{l_1}{l_2}$ con $l_2 \neq 0$

b) *Proposición 1.* Vinculación entre el límite de sucesiones y limite de funciones.

se explicita si estas propiedades son válidas cuando $x \to \infty$. Además, para realizar este tipo de tareas, es necesario recurrir al siguiente teorema:

Sea r cualquier entero positivo, entonces: *i*) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^r} = 0$, *ii*) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$

El teorema es ignorado en el material teórico, en consecuencia el entorno tecnológico es insuficiente para realizar T_2^2. Esto mismo trasciende a la OM efectivamente enseñada (CORICA; OTERO, 2009).

Con relación a la OMP_3, queda definida por T_1^1: *Demostrar que el límite de la función f*(*x*) *es l cuando x tiende a un valor real finito y hallar para ciertos valores de* ε *el correspondiente valor de* δ, y la cuestión generatriz asociada es Q_2: *¿Cómo determinar un intervalo en que el límite de la función sea l cuando* $x \to x_0$? Inferimos que el propósito de T_1^1 es introducir a los estudiantes a la actividad de demostrar y consiste en hallar un intervalo en torno a x_0, para el que exista el límite conjeturado. Aquí, todas las tareas que componen ésta organización procuran hallar dichos intervalos para afirmaciones de existencia del límite que son verdaderas, pero no se presentan tareas donde las afirmaciones de existencia del límite sean falsas, pues enfrentarse a esta situación requiere de otras técnicas para la interpretación de los resultados. Además, T_1^1 se gesta en la *OM a ser enseñada* con el propósito de involucrar a los estudiantes a la tarea de *demostrar*, pero dicha intención no sobrevive en la OM efectivamente enseñada. El análisis de las técnicas empleadas por los profesores

---

Sea f una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto (a, b) que contiene a x_0, salvo quizás en el mismo x_0, entonces es $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow$ para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ (con $x_n \neq x_0$) vale que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$

c) *Proposición 2*

Sean f y g funciones definidas en todos los puntos de un intervalo abierto (a, b) que contiene a x_0, salvo quizás en el mismo x_0 y tales que

$l_1 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ y $l_2 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, entonces:

i) $\lim\limits_{x\to x_0} (\ln f(x)) = \ln l_1$ y *ii*) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = l_1^{l_2}$

d)*Proposición 3*

Sea g una función definida en todos los puntos del intervalo abierto (a, b) que contiene a x_0, salvo quizás en el mismo x_0 y tal que:

$g(x) \neq y_0$

para $x \neq x_0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$

Sea f una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto (c, d) que contienen a y_0, salvo quizás en el mismo y_0, tal que:

$\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = l$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = l$

para realizar las tareas, indica que se reducen a determinar un intervalo en el que la función tomaría un valor dado, sin completar tal demostración. Este proceder es funcional a una tarea constitutiva del género *Calcular*, es decir, T_1^1 se transforma en: *Hallar un intervalo del dominio de funciones tal que el límite sea l cuando x tiende a un valor real finito* (CORICA; OTERO, 2009).

La OMP_4 se define a partir de T_1^3: *Trazar la gráfica de funciones*, y la cuestión generatriz asociada es Q_3: *¿Cómo trazar la gráfica de una función conociendo su comportamiento en torno a un punto?* El tipo de tareas que compone a esta organización tiene como objetivo partir de la noción del límite de una función cuando $x \to x_0$, y conociendo ciertos valores de tendencia de la función, o puntos de discontinuidad de la misma, aproximar su representación gráfica. Destacamos que no se informa en la tarea del comportamiento de la función cuando $x \to \infty$, reduciendo el estudio sólo al comportamiento de la función en ciertos puntos x_0. Esto pone nuevamente en evidencia la importancia otorgada al estudio de las funciones en torno a puntos y no en el infinito.

También, con relación a la OMP_4, se observan desconexiones entre las tareas propuestas en el material destinado al estudio del límite y la continuidad funcional. Pues, en ambos materiales se proponen tareas relativas a T_1^3. Sin embargo, para el estudio de la continuidad, se propone representar funciones involucrando sólo nociones de continuidad y desaprovechando lo estudiado para el límite de funciones.

La OMP_5 queda representada por el tipo de tarea T_2^4: *Analizar la continuidad de una función en su dominio natural*, y tiene como cuestión generatriz asociada Q_4: *¿Cómo estudiar la continuidad?* Esta OMP tiene como propósito abordar tareas que impliquen el estudio de la continuidad en el dominio natural de las funciones. Para ello, el entorno tecnológico – teórico es parcialmente explicitado en el material para las CP, pues para realizar algunas de las tareas que la conforman, relativas a la composición de funciones, se propone:

> *Proposición: Continuidad de la función compuesta*
> Sean f y g funciones de $\Re$ en $\Re$. Si f es una función continua en x_0 y g una función continua en $f(x_0)$, entonces la función compuesta $(g_o f)(x)$ es continua en x_0.

Destacamos que no se hace ninguna mención respecto a la validez de esta proposición para el estudio de la función en su dominio natural. Además, para realizar el tipo de tareas que compone a la OMP_5, se requiere de las siguientes proposiciones, las que no son mencionadas en ninguno de los materiales estudiados:

1. Toda función polinómica es continua.
2. Una función racional (cociente de funciones polinómicas) es continua en todos los puntos en donde el denominador es distinto de cero.
3. Si a>0, la función $f(x) = a^x$ definida de $\Re \rightarrow \Re$ es continua.

El tipo de tarea que conforma a la OMP_6 es T_1^4: *Analizar la continuidad de funciones en un punto* x_0, y comparte la misma cuestión generatriz que la OMP_5. El entorno tecnológico que justifica el hacer de la OMP_6, se encuentra explícito sólo en el material para las CP. Para realizar T_1^4, es necesario emplear técnicas que emergen de OMP_1. Esto evidencia articulaciones entre las OMP_1 y OMP_6, recobrando sentido el estudio de la OMP_1.

Finalmente, el tipo de tareas que conforma a la OMP_7 es T_3^4: *Analizar los ceros de una función en intervalos cerrados*, y la cuestión generatriz asociada es Q_5:*¿Cómo establecer la existencia de los ceros de una función de variable real?* El propósito de T_3^4 es estudiar la existencia de ceros en intervalos del dominio de la función, más que poderlos hallarlos exactamente. El entorno tecnológico – teórico que justifica el hacer de T_3^4, se explicita tanto en el material para las CP como para las CT. En esta última OMP encontramos conexiones con la OMP_5, pues el tipo de tareas que compone a la OMP_7 requiere de algunas de las técnicas desarrolladas en la $OMP_{5.}$

Hemos presentado resultados relativos a la *OM a enseñar*, donde identificamos una serie de OMP, desarticulaciones entre ellas y deficiencias en el entorno tecnológico. Este estudio fue ampliado a partir del análisis de la OM que, efectivamente, se acaba por estudiar en el curso (CORICA; OTERO, 2009, 2010). De esta investigación destacamos que las tareas que aquí se engloban bajo el género demostrar, en la OM efectivamente enseñada se transforman en tareas relativas al género calcular. Aparecen, también, aquellas relativas a definir y a demostrar teoremas y proposiciones, que forman parte del entorno tecnológico de la organización.

7 Conclusiones

Se analizó el programa del curso y el material editado por los profesores con fundamento en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, y empleando la OM de referencia concebida por los investigadores. La TAD es un poderoso referencial que posibilita el análisis de estas características metodológicas.

Al comparar el programa del curso con el material diseñado por los profesores y como consecuencia de la textualización realizada por los docentes del propio curso, se observa como desarticulan las OM a *enseñar* relativas al límite y la continuidad de funciones, generando lo que Chevallard (1985) denomina *ficción del saber*.

El análisis de los tipos de tareas que aparecen en el material editado por los profesores, permitió identificar 7 OM estructuradas alrededor de un único tipo de tareas. Esto contrasta con las 16 OM que propusimos en la OM de referencia. El conjunto de tareas que se proponen estudiar definen a OM desarticuladas, reducidas al nivel de los temas. Sólo existe una débil conexión entre algunas de ellas, pero en ningún caso se formulan tareas que conduzcan a la elaboración y validación de elementos tecnológicos. Este fenómeno es atribuible al proceso de transposición didáctica, y se origina en la necesidad de que todo saber enseñado aparezca como definitivo e incuestionable. Dicha necesidad se contrapone con la dinámica de cualquier proceso de estudio que supone retomar las organizaciones matemáticas estudiadas anteriormente para mostrar sus limitaciones y contradicciones, y reestructurarlas e integrarlas en organizaciones cada vez más amplias y complejas. Otra de las causas de este fenómeno sería atribuible a las restricciones impuestas por el tiempo didáctico y a la exigencia de un aprendizaje rápido, en un tiempo muy limitado, en correspondencia con la exigencia cultural del aprendizaje instantáneo.

Esta forma de estructurar el curso en clases teóricas y prácticas, y en base al análisis realizado sobre el material editado por los profesores, se concluye que, los estudiantes tendrían el primer encuentro con las definiciones y teoremas en las clases teóricas. Mientras que las tareas para las clases prácticas estarían diseñadas con el propósito de aplicar los saberes de las clases teóricas, y no para cuestionar los elementos tecnológicos y las técnicas propuestas. Aquí se interpreta que la actividad de resolver tareas es secundaria dentro del proceso didáctico global y auxiliar en el aprendizaje de las teorías. No juegan ningún papel importante en su constitución ni en su estructura. Interpretamos que las tareas para las clases prácticas se pueden utilizar para aplicar, ejemplificar o consolidar las nociones teóricos e, incluso, para motivarlas, introducirlas o justificarlas pero, en cualquier caso, estas funciones son consideradas como meramente pedagógicas, en el sentido de no constitutivas del conocimiento matemático. La característica esencial del curso bajo estudio es que se ignora absolutamente los procesos de la actividad matemática como tal y, como consecuencia, no se concede ninguna importancia, tanto epistemológica como didáctica, a la génesis y el desarrollo de los conocimientos matemáticos.

Un proceso de estudio superador al que produce el estudio de la *OM a enseñar* requiere, al menos, de una reorganización de dicha organización. Es necesaria una organización didáctica con características específicas. Consideramos que, en principio, estas características se sintetizan en correspondencia con los momentos didácticos propuestos en la TAD. Es necesario que se propongan tareas que sean la razón de ser de la organización, y que le permitan, al estudiante, elaborar técnicas para su hacer y, a su vez, cuestionarlas y modificarlas. Y, es necesario que el entorno tecnológico no se presente para su uso, sino que emerja del conjunto de tareas que se proponen estudiar en el curso. Una dinámica de estudio con las características mencionadas produciría cambios en el lugar del profesor y del alumno y en sus respectivas relaciones al saber matemático, nuestros futuros trabajos se dirigen a analizar su viabilidad.

Referencias

APARICIO, E.; CANTORAL, R. Sobre la noción de continuidad puntual: Un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes universitarios en contextos de geometría dinámica. **Épsilon. Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática**, Thales**,** v. 56, n. 19(2), p. 169 - 198, 2003.

APARICIO,E.; CANTORAL, R. Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,** México, v. 9, n. 1, p. 1 - 29, Mar. 2006.

ARTIGUE, M. Ingeniería didáctica. In: GÓMEZ, P. (Ed.) **Ingeniería didáctica en educación matemática**. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995, p. 97 - 140.

ARTIGUE, M. ¿Qué se puede aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? **Boletín de la Asociación Matemática Venezolana**, Caracas, v. 10, n. 2, p. 117 - 134, 2003.

AZCÁRATE, C.; DEULOFEU, J. Investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje del análisis en España. In: CANTORAL, R. (Ed.) **El futuro del cálculo infinitesimal**. México: Grupo Editorial Iberoamérica. 2000, p. 355 - 361.

BARBOSA, E.; MATTEDI, A. A Análise Matemática no Ensino Universitário Brasileiro: a contribuiçao de Omar Catunda. **Bolema,** Rio Claro, v. 23, n. 35B, p. 453 - 476, abr. 2010.

BEZUIDENHOUT, J. Limits and continuity: some conceptions of first-year students. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, Londres**,** v. 32, n. 4, p. 487 - 500, 2001.

BLÁZQUEZ, S. Y ORTEGA, T. Nueva definición de límite funcional. **UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas**, Barcelona**,** v. 30, n. 1, p. 67 - 82, 2002.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique.** Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La pensée Sauvage, 1985.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble**,** v. 19, n. 2, p. 221 - 266, 1999.

CORICA, A. Aprender Matemática en la Universidad: la perspectiva de estudiantes de primera año. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias**, Tandil, v. 4, n. 1, p. 10 - 27, Ago., 2009.

CORICA, A.; OTERO, M. Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación. **Revista Latinoamérica de Investigación en Matemática Educativa**, México**,** v. 12, n. 3, p. 305 - 331, Nov. 2009.

CORICA, A.; OTERO, M. Análisis de la dinámica de estudio en un curso Universitario de Matemática. In: CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO, 3, 2010, Catalunya. **Anales** Catalunya: i-MATH Intensive Research Programme. Disponible en: <http://www.crm.cat/Conferences/0910/cdidactic/cdidactic.pdf>. Acceso en: 11 abr. 2011.

CORNU, B. Limits. In*:* TALL, D. (Ed.) **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 153 - 166.

ESPINOZA, L.; AZCÁRATE, C. Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "limite de una función": una propuesta metodológica para el análisis. **Enseñanza de las Ciencias,** Barcelona**,** v. 18, n. 3, p. 355 - 368, nov. 2000.

GARCÍA, M.; NAVARRO, C. Una alternativa para trabajar con límites especiales. **NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas,** La Laguna, v. 75, n. 1, p. 105 - 120, nov. 2010.

GODINO, J.; CONTRERAS, A.; FONT, V. Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, v. 26, n. 1, p. 39 - 88, 2006.

HITT, F. Teacher's difficulties with the construction of continuous and discontinuous functions. **Focus on Learning Problems in Mathematic**, Framingham, v. 16, n. 4, p. 10 - 20, 1994.

MAMONA-DOWNS, J. Letting the intuitive bear on formal: a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, Holanda, NL, v. 48, n. 2 - 3, p. 259 - 288, Nov. 2001.

MORENO, M. El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. In: SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN, 9., 2005, Córdoba. **Investigación en Educación Matemática.** Córdoba: Universidad de Córdoba. , 2005, p. 81 - 96. MAZ, A.; GÓMEZ, B.; TORRALBA, M. (Eds.).

SIERRA, M.; GONZÁLEZ, M.; LÓPEZ, C. Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 1, n. 1, p. 71 - 85, mar. 2000.

TALL, D. The complementary roles of short programs and prepared software for mathematics learning. **Bulletin of the IMA,** v. 23, n. 1, p. 128-133, 1986. Disponible en: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1986m-progr-software.pdf>. Acceso en: 14 marzo 2012.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Ed.) **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1991, p. 3 - 21.

TALL, D.; BLOKLAND, P.; KOK, D. **A graphic approach to the calculus (for IBM compatible computers)**. Sunburst, Pleasantville, NY. 1990.

TALL, D.; VINNER S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, Holanda, NL, v. 12, n. 2, p. 151 - 169, May. 1981.

Submetido em Maio de 2011.
Aprovado em Julho de 2011.