

Conocimientos y Creencias entorno a la Resolución de Problemas de Profesores y Estudiantes de Profesor de Matemáticas

Knowledge and Beliefs on Problem Solving of In-Service and Pre-Service Mathematics Teachers

Celia Giné de Lera*

Jordi Deulofeu**

Resumen

En muchos países –como en el caso de España– los maestros de enseñanza primaria inician su carrera profesional sobre la base de una formación inicial fundamentalmente profesionalizadora e imparten diversas materias, si no todas, a su clase. El estilo didáctico predominante en secundaria, donde cada profesor imparte únicamente la materia en la que es experto, suele ser menos pedagógico y más caracterizado por el énfasis epistemológico en una asignatura concreta, en nuestro caso las matemáticas. Este artículo relaciona los conocimientos y las creencias sobre resolución de problemas con la formación inicial de cada etapa educativa y con la experiencia docente. Para ello, se realiza un estudio de casos con un estudiante de profesor de primaria, un profesor de primaria, un estudiante de profesor de secundaria y un profesor de secundaria, en el que se analizan su conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) y sus creencias sobre resolución de problemas. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto, por un lado, la necesidad de dar en la formación inicial de maestros de primaria un mayor énfasis en el conocimiento del contenido matemático, y por el otro, la necesidad de una formación continuada para profesores tanto de educación primaria como especialmente de secundaria en el ámbito didáctico.

Palabras-clave: Educación Matemática. Resolución de Problemas. Formación de Profesores. Conocimiento del Profesor. Creencias del Profesor.

Abstract

In many countries –as well as in Spain– primary teachers begin their careers on the basis of an instructive training and teach different subjects, if not all, to their class. The predominant teaching style in secondary education, in which each teacher focusses only on the subject in which they are an expert, is usually less pedagogical and more characterized by the epistemological emphasis on a specific subject, in our case mathematics. This article relates knowledge and beliefs on problem solving with teachers' training programs (and therefore the educational stage) and teaching experience. To this end, a study was conducted of cases with a pre-service primary teacher, an in-service primary teacher, a pre-service secondary teacher and an in-service secondary teacher, in which their mathematical knowledge for teaching (MKT) and their beliefs about problem solving are analyzed. The results show, on the one hand, the need for greater emphasis on mathematical content knowledge in the initial training of primary school teachers, and on the other, the need for ongoing training for both primary and especially secondary school teachers in the educational field.

Keywords: Mathematics Education. Problem Solving. Teacher Education. Teacher knowledge. Teacher beliefs.

* Doctora en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona – UAB. Profesora Asociada de la UAB, Barcelona, España. Dirección postal: Facultad de Educación. Edificio G-5. Universidad Autónoma de Barcelona, 09193 Bellaterra, Cerdanyola del Vallès, España. *E-mail:* mariacelia.gine@uab.cat.

** Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona – UAB. Profesor Titular de Didáctica de la Matemática en la UAB, Barcelona, España. Dirección postal: Facultad de Educación. Edificio G-5. Universidad Autónoma de Barcelona, 09193, Bellaterra, Cerdanyola del Vallès, España. *E-mail:* jordi.deulofeu@uab.cat.

1 Introducción

La Resolución de Problemas constituye uno de los ejes principales de la enseñanza de las Matemáticas. Las dificultades de los alumnos de todos los niveles para resolver problemas y el papel de la Resolución de Problemas en la enseñanza son uno de los temas de investigación más relevantes en el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas (POLYA, 1957; MASON; BURTON; STACEY, 1982; SCHOENFELD, 1985, 1992; CASTRO, 2008; PUIG, 2008).

Por otro lado, el papel del profesor de matemáticas es muy importante para el aprendizaje de los alumnos; sea cual sea el modelo de enseñanza-aprendizaje, y los conocimientos y creencias que éste posee sobre las matemáticas y sobre su proceso de aprendizaje son factores esenciales para planificar, desarrollar y evaluar los procesos de enseñanza-aprendizaje, determinando, en gran parte, su actuación profesional (KELLY, 1995; AZCÁRATE, 2001). Estos conocimientos y creencias se adquieren durante la escolarización, la formación universitaria inicial y la experiencia docente (y, en algunos casos, la formación permanente).

El objetivo de este artículo es relacionar los conocimientos y creencias sobre la resolución de problemas con la formación inicial de los profesores y su experiencia docente. Debemos tener en cuenta, pero, que la formación del profesorado es específica de cada etapa educativa concreta, siendo natural la existencia de diferencias muy notables entre las prácticas docentes de diferentes niveles educativos. Por otra parte, la práctica docente y la posible formación permanente es otro elemento a tener en cuenta. Por todo ello, seleccionamos cuatro tipos de individuos: estudiantes de profesor de primaria, profesores de primaria, estudiantes de profesor de secundaria y profesores de secundaria.

En concreto, para este estudio hemos elegido cuatro casos, uno de cada una de las muestras utilizadas en un estudio más amplio en el cual se caracterizan y comparan los conocimientos y las creencias sobre la resolución de problemas de profesores y estudiantes de profesor de educación primaria y secundaria (GINÉ, 2012). Para elegirlos, se ha tenido en cuenta que cada caso fuera el individuo más parecido, tanto en nivel de conocimientos como en creencias, a la media de la muestra, y por esa razón les hemos denominado *prototipos*.

2 Marco teórico

La formación de profesores es un campo de creciente interés e inquietud para los responsables y gestores de la política educativa en los últimos años. En esta consideración, destaca el alcance y efecto que se atribuye a los conocimientos del profesor sobre la calidad de los aprendizajes escolares. La preocupación generada por los resultados de distintos estudios nacionales e internacionales sobre el rendimiento escolar en matemáticas (MULLIS et al., 2007), perceptible en muchos países, ha dirigido la atención de los expertos hacia la formación del profesorado de primaria y secundaria obligatoria. De este modo, surge el Estudio Internacional sobre Formación Inicial del Profesorado de Matemáticas: TEDS-M (TATTO et al., 2008). Este proyecto elabora, a partir de un enfoque comprensivo, un marco para estudiar y entender la formación inicial de profesores, que incluye un estudio sobre el conocimiento matemático que los futuros profesores han adquirido como resultado de su formación, y otro sobre las creencias e ideas que tienen los futuros profesores sobre la naturaleza de las matemáticas y de su enseñanza-aprendizaje. En el estudio participaron 17 países, entre ellos Chile y España.

Dado que, aunque a una escala mucho mayor, el estudio sobre el conocimiento matemático de los profesores del TEDS-M guarda muchos paralelismos con nuestro trabajo, nos hemos basado en su marco teórico para formular el nuestro. De acuerdo con Ball, Thames y Phelps (2008), en el TEDS-M se considera que el *Mathematical Content Knowledge* (MKT) tiene dos dimensiones: el *Mathematics Content Knowledge* (MCK) y el *Mathematics Pedagogical Content Knowledge* (MPCK), siendo el primero el conocimiento del contenido de la disciplina en sí misma, y el segundo la relación que existe entre saber un conocimiento por uno mismo y ser capaz de hacer que otros lo entiendan. El MCK se subdivide en tres niveles de exigencia cognitiva (conocer, aplicar y razonar), y cada uno se descompone en niveles más concretos. De igual forma, el MPCK se subdivide en tres dominios: el conocimiento curricular de las matemáticas, el conocimiento de la planificación para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento de la transformación de las matemáticas para su enseñanza-aprendizaje.

En nuestro estudio, entendemos las *creencias matemáticas* como una de las componentes del conocimiento subjetivo implícito del individuo sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje; conocimiento que está basado en la experiencia (GÓMEZ-CHACÓN, 2000). En este ámbito, aunque nuestro estudio tiene semejanzas al TEDS-M, hemos utilizado un marco específico de creencias sobre resolución de problemas: es el

propuesto por Vila (2001), dónde se distinguen dos tendencias en torno a cómo deben ser enseñadas las matemáticas. La primera tendencia pone el centro de atención en los contenidos matemáticos, pero enfatizando la ejecución y considerando los problemas como subsidiarios de estos contenidos matemáticos.

Aquí se encuadran tanto aquellas visiones instrumentalistas de las matemáticas (THOMPSON, 1984), como aquellas que reducen el papel de los problemas al de herramientas que permiten aplicar los conocimientos matemáticos. Estas visiones, estrechamente ligadas a una tradición conductista del aprendizaje (imitación de conductas, reproducción del saber...), están íntimamente asociadas a un modelo observable de trabajo en el aula, que Vila define como *reducción de los problemas a no-problemas*. La segunda tendencia pone el centro de atención en la construcción del conocimiento matemático por parte del propio aprendiz, y relaciona el conjunto de creencias de aquellos profesores que entienden que el problema es una herramienta didáctica para favorecer el *pensamiento matemático* del alumno, entendiendo el término pensamiento matemático como la capacidad de ser flexible y dominar los recursos dentro de la disciplina, usar el conocimiento propio eficientemente, y comprender y aceptar las reglas *tácitas de juego* (SCHOENFELD, 1992).

Un aspecto observable que caracteriza esta visión es que los problemas son tratados en el aula a la vez *como objeto y como instrumento de estudio*. Según Vila (2001), estos sistemas de creencias entorno a la idea problema de matemáticas y su papel, conducen al profesorado a un conjunto de decisiones (a veces, incluso inconscientes) entorno a la tipología de enunciados de las cuestiones que deben ser propuestas en el aula.

3 Metodología

Se ha realizado un estudio de cuatro casos: un estudiante de profesor de secundaria, un profesor de secundaria, un estudiante de profesor de primaria y un profesor de primaria. Cada uno de los sujetos ha sido elegido de una de las cuatro muestras tomadas en un estudio más amplio (GINÉ, 2012) y los hemos llamado *prototipos*. Para determinar qué sujetos serían el prototipo de cada muestra se calculó el coeficiente de correlación de Pearson entre los datos de cada sujeto y la media de los datos de toda la muestra, de manera que los individuos de cada muestra que obtuvieron un coeficiente de correlación de Pearson más cercano a 1 son nuestro prototipo. Hemos codificado los prototipos como EPS (Estudiante de Profesor de Secundaria), PS (Profesor de Secundaria), EPP (Estudiante de Profesor de Primaria) y PP (Profesor de Primaria).

Para la obtención de los datos, se han elaborado un protocolo de problemas para la determinación de conocimientos y un cuestionario para la determinación de creencias. A continuación explicaremos la estructura de cada uno de los instrumentos de recogida de datos.

El diseño de los instrumentos se incluye inmediatamente previo al análisis de datos de cada tipo (conocimientos y creencias respectivamente), a modo de facilitar la comprensión del análisis.

4 Análisis de los conocimientos sobre resolución de problemas

Para llevar a cabo el diseño del protocolo de problemas, hemos tenido en cuenta qué conocimientos queremos analizar (respecto tanto al contenido matemático como al tipo de conocimiento) para que nuestro instrumento nos permita hacerlo correctamente.

En cuanto al contenido matemático, decidimos elegir los Números, y dividirlo en números enteros (operaciones y divisibilidad) y números racionales (fracciones, decimales y porcentajes).

Respecto al marco sobre el tipo de conocimiento del profesor, nos hemos basado en la categorización del conocimiento usada en el estudio TEDS-M 2008 para crear una propia adaptada a los objetivos específicos de nuestro trabajo, y hemos dividido el MKT en los siguientes subdominios:

Mathematical Content Knowledge (MCK)

A. Conocer

- *Recordar*: Recordar definiciones, terminología, propiedades, notación, cálculos, procedimientos mecánicos...
- *Reconocer*: Reconocer objetos matemáticos o sus propiedades en un contexto matemático donde no se está habituado a utilizarlos.

B. Razonar:

- *Analizar*: Determinar las relaciones entre variables u objetos en situaciones matemáticas; hacer inferencias a partir de información dada.
- *Integrar*: Combinar (varios) procedimientos matemáticos para establecer resultados, y combinar los resultados para producir más resultados; hacer conexiones entre diferentes elementos de conocimiento matemático.

- *Generalizar*: Ampliar el dominio al que el resultado del pensamiento matemático y la resolución de problemas se aplica mediante la reformulación de los resultados en términos más generales.
- *Justificar*: Elaborar una justificación de la verdad o falsedad de una declaración en función de los resultados matemáticos o propiedades.

Mathematics Pedagogical Content Knowledge (MPCK)

C. Curricular

- Conocer los contenidos del currículo de matemáticas.

D. Planificación

- Planificar problemas adecuados al contenido matemático que se quiere enseñar.
- Adaptar problemas para que sean más fáciles / difíciles para los estudiantes.

E. Transformación

- Explicar o representar diferentes enfoques / procedimientos para resolver problemas matemáticos.
- Analizar o evaluar las soluciones de los estudiantes.

En cuanto a la estructura externa del protocolo, lo hemos dividido en dos: el protocolo 1 (P1), donde están los problemas relativos a números enteros, y el protocolo 2 (P2), donde están los relativos a los números racionales.

Tomando como referencia los ítems liberados del TEDS-M 2008, hemos creado algunos ítems de respuesta cerrada (los referidos al MCK) y otros de respuesta abierta (los referidos al MPCK), como se muestra en el siguiente ejemplo:

1a. Los alumnos a veces sólo recuerdan parte de una regla. Suelen decir, hablando de números enteros, que dos negativos dan positivo. Para cada una de las siguientes operaciones, decide si esta afirmación es siempre cierta, nunca o algunas veces.

a) Suma; b) Resta; c) Multiplicación; d) División.

1b. Escribe un problema que utilice un contexto real que podrías poner en clase para ejemplificar en el caso de la resta que dos negativos dan positivo.

Los resultados obtenidos según el tipo de conocimiento de cada prototipo los recogemos en el gráfico 1. Para el análisis, hemos agrupado el nivel de conocimiento en tres grupos: [-3, -1) nivel bajo, [-1, 1] nivel medio y (1, 3] nivel alto. Recordemos, también, los dominios de conocimiento estudiados de cada dimensión: MCK (A. Conocer, B. Razonar) y MPCK (C. Curricular, D. Planificación, E. Transformación).

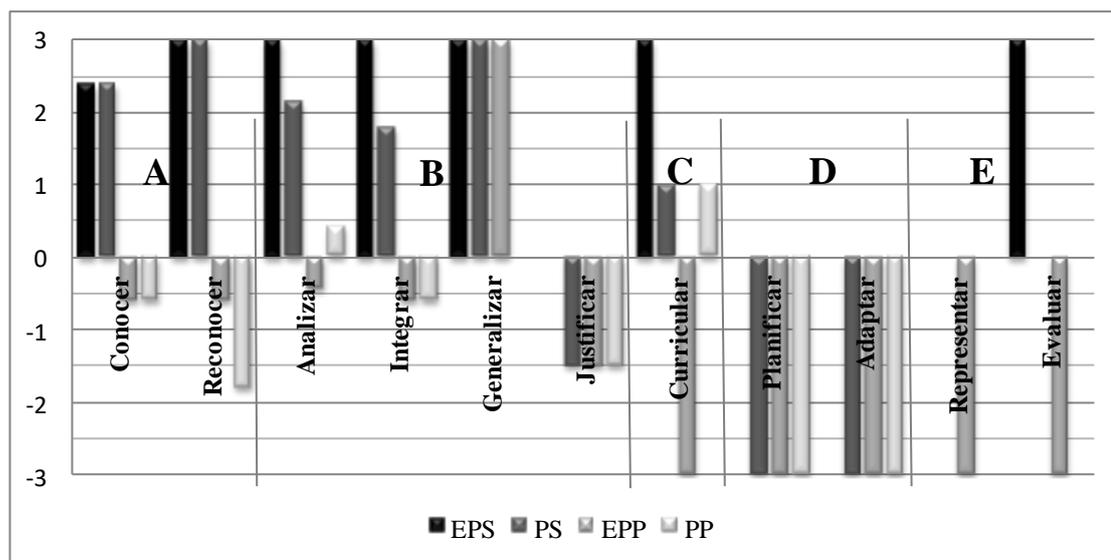


Gráfico 1 – Nivel en los subdominios de conocimiento sobre resolución de problemas
 Fuente: desarrollado por los autores

Respecto a los resultados relacionados con el conocimiento del contenido matemático (MCK), en los subdominios de *recordar* y *reconocer*, los prototipos de secundaria tienen un nivel alto, en contraposición a los prototipos de primaria, que tienen un nivel medio (excepto el profesor PP que tiene un nivel bajo en *reconocer*). En *razonar* pasa algo parecido, pero, aunque también podríamos establecer estos dos subgrupos primaria-secundaria, donde los primeros tienen un nivel mucho más bajo que los segundos, el que tiene claramente un nivel más alto de razonamiento es el EPS.

En el conocimiento didáctico del contenido (MPCK), los resultados no son tan diversos como en el MCK. El EPS es el que obtiene un nivel más alto, a pesar de tener nivel medio en todo menos en conocimiento curricular y en evaluar, donde su nivel es alto. Los dos profesores (PP, PS) obtienen exactamente los mismos resultados: conocimiento curricular alto, medio de transformación y bajo de planificación. El EPP obtiene un nivel bajo en todos los tipos de conocimientos, debido mayoritariamente a que no ha respondido muchas preguntas abiertas de planificación o representación de problemas o resoluciones, y las que ha respondido lo ha hecho incorrectamente.

5 Análisis de las creencias sobre resolución de problemas

La estructura interna del cuestionario de creencias está basada en el trabajo de Vila (2001), y adaptada teniendo en cuenta las características de nuestra investigación. Hemos estudiado tres categorías de creencias:

A. Creencias sobre el objeto problema de matemáticas

B. Creencias sobre la naturaleza de la actividad de RP

C. Creencias sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la RP

De forma análoga a como lo define Vila, se han definido lo que llamaremos *rangos de creencias* que están referidos a un imaginario continuo en los siguientes términos:

- 1) Creencias cercanas a un sistema de creencias relacionado con lo que Schoenfeld (1992) llama *pensar matemáticamente* en el marco de la RP.
- 2) Creencias cercanas a sistemas de creencias definidos por características de rigidez, reducción al instrumentalismo, tradición conductista del aprendizaje, de *reducción de los problemas a no-problemas* (VILA 2001).

El cuestionario definitivo no resulta un cuestionario estructurado de forma habitual, sino un conjunto de 9 bloques homogéneos de ítems que no están organizados – en su presentación – según las categorías de creencias que intentamos identificar.

Las preguntas del cuestionario atienden a tipologías de formato diversas. En particular, podemos encontrar:

a) Preguntas abiertas:

Si tuvieras que explicar qué es un problema de matemáticas a alguien que no lo sabe, ¿cómo se lo explicarías para que te entendiera fácilmente?

b) Baterías de ítems con opción de escala *poco - mucho*, o *muy de acuerdo - muy en desacuerdo*, como la siguiente: *Quien no sabe resolver problemas es porque no sabe suficientes matemáticas.*

En el análisis trabajaremos con creencias que se pueden desprender de cada categoría de creencias, analizando si los prototipos las comparten o no (y en qué grado), y poniendo de manifiesto los rasgos que tiene cada sujeto tanto en relación con los otros tres prototipos, como con el sistema de creencias relacionado con lo que Schoenfeld (1992) llama *pensar matemáticamente* en el marco de la RP.

5.1 Creencias sobre el objeto problema de matemáticas

La primera pregunta del cuestionario de creencias es abierta y hace referencia a la definición de problema de matemáticas: *si tuvieras que explicar qué es un problema de matemáticas a alguien que no lo sabe, ¿cómo se lo explicarías para que te entendiera fácilmente?*

Para captar la idea que tienen los prototipos sobre el objeto problema de matemáticas, no nos bastará con la definición que den, pero, sí, que será un buen inicio para empezar a entender sus creencias al respecto. Estas son las definiciones que han dado los cuatro prototipos sobre qué es un problema de matemáticas:

- *EPS: Un enunciado dónde entiendes perfectamente lo que se te da pero no tienes un camino directo para hacerlo, las herramientas que utilizas para resolverlo son las matemáticas.*
- *PS: Una duda o cuestión que queremos resolver utilizando el lenguaje de los números.*
- *EPP: Un problema que consiste en aplicar los conocimientos adquiridos para darle solución.*
- *PP: A partir de unos datos resolver una situación que se nos plantea para obtener un resultado.*

Los cuatro prototipos están de acuerdo en que un problema de matemáticas es una situación matemática (enunciado, duda, cuestión...) que se tiene que resolver (dar solución). El matiz está en si añaden algún aspecto más a la definición, como por ejemplo si la situación es nueva o tiene contexto real, o qué herramientas se utilizan para resolverla. Nos queremos fijar en estos matices y también compararlos con la definición de problema que adoptamos en este estudio, que es la siguiente (CALLEJO, 1994, p. 73):

Una situación que plantea una cuestión matemática el método de la cual no es inmediatamente accesible al que intenta resolverla porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos y la incógnita o los datos y la conclusión, y debe, por tanto, buscar, investigar, establecer relaciones, implicar a sus afectos, etc... para hacer frente a una situación nueva.

La definición de Callejo añade dos ideas importantes: la primera, que la situación es nueva, y por tanto el método para resolverla no es directo; la segunda, que para resolverla no basta con aplicar directamente los conocimientos que se tienen, sino que hay que buscar, investigar, establecer relaciones, implicar a los afectos.

En nuestro caso, dos de los prototipos añaden aspectos interesantes: el EPS, como Callejo, hace referencia a la no existencia de un camino directo para resolver el problema; el EPP, en cambio, especifica que las herramientas mediante las cuales se resuelve el problema son los conocimientos adquiridos, creencia contrapuesta a nuestra definición. Los otros dos prototipos no concretan ninguno de estos aspectos.

A continuación mostramos en el Cuadro 1 los resultados obtenidos en las cuestiones de respuesta cerrada del cuestionario sobre sus creencias entorno al objeto problema de

matemáticas. Para ello, de cada creencia determinaremos si el prototipo está de acuerdo o no según el siguiente baremo:

- Posición claramente definida -> SÍ / NO
- Posición definida -> sí / no
- Posición no definida -> -

Para mostrar la proximidad a un rango o a su opuesto, hemos sombreado el fondo de las celdas: gris claro para el sistema de creencias próximo a *pensar matemáticamente* (SCHOENFELD, 1992), y gris oscuro para su opuesto.

| A. Creencias sobre el objeto problema de matemáticas | EPS | PS | EPP | PP |
|---|-----|----|-----|----|
| 1. Es muy importante que los problemas trabajados en clase sean situaciones reales del entorno. | no | - | no | - |
| 2. La presencia de referentes matemáticos en el enunciado que lleven a identificar el problema como <i>problema de matemáticas</i> y dentro de determinadas tipologías es un aspecto determinante en los problemas. | no | no | - | no |
| 3. Toda cuestión dada por enunciado verbal es un problema, un problema <i>es</i> un texto. | no | sí | - | sí |
| 4. Los enunciados de los problemas que se trabajan en clase, es importante que siempre sean precisos. | no | no | sí | - |
| 5. Los propósitos relevantes de los problemas son siempre cerrados. | no | - | sí | - |

Cuadro 1 – Creencias sobre el objeto problema de matemáticas
Fuente: desarrollado por los autores

Lo primero que observamos es que los cuatro prototipos tienen ideas muy diferentes sobre el objeto problema de matemáticas. En lo que más coinciden es en que la presencia de elementos matemáticos en el enunciado, que lleven a identificar el problema no es un aspecto determinante, aunque el EPP no lo tiene claro. Los dos estudiantes coinciden en que el contexto de un problema no debe ser necesariamente real, mientras que los profesores no se posicionan. Análogamente, los dos profesores coinciden en su fuerte identificación entre enunciado verbal y problema, mientras que el EPP no se posiciona y el EPS lo niega. Sobre la precisión de los problemas, en cambio, los que están de acuerdo son los prototipos de secundaria (EPS y PS creen que no tienen que ser necesariamente precisos), mientras que el EPP cree que sí y el PP no se posiciona. Finalmente, sobre los propósitos relevantes de los problemas (cerrados-abiertos), los profesores no se posicionan y los estudiantes tienen opiniones contrapuestas: el EPP cree que son siempre cerrados y el EPS cree que no.

Respecto al sistema de creencias, observamos que el que tiene unas creencias más rígidas en cuanto a qué es un problema de matemáticas es el EPP, mientras que el EPS tiene una visión mucho más amplia del concepto.

5.2 Creencias sobre la naturaleza de la actividad de resolución de problemas

De forma análoga analizaremos qué creencias tienen los prototipos sobre la naturaleza de la actividad de resolución de problemas, y lo sintetizamos primeramente en el Cuadro 2:

| B. Creencias sobre la naturaleza de la actividad de RP | EPS | PS | EPP | PP |
|--|-----|----|-----|----|
| 1. La actividad matemática es exclusivamente instrumental. | no | sí | - | - |
| 2. Las clases de matemáticas son, principalmente, rutinarias. | no | - | no | - |
| 3. Los problemas son propuestos dentro del tema de las técnicas a utilizar para resolverlos, y deben hacer referencia a conocimientos ya trabajados. | no | - | - | - |
| 4. En la actividad de RP es más importante el producto que el proceso. | NO | no | NO | No |
| 5. Hay que conseguir que el proceso de resolución de problemas sea lineal (avance directamente hasta el resultado). | NO | - | NO | No |
| 6. La RP es el aspecto más relevante dentro de la actividad matemática. | sí | - | - | - |

Cuadro 2 – Creencias sobre la naturaleza de la actividad de RP
Fuente: desarrollado por los autores

En general, podemos observar que el que tiene posiciones más extremas es el EPS, mientras que los otros en la mitad de aspectos no se posicionan. Por otra parte, también vemos una cierta semejanza entre las creencias de los dos prototipos de primaria, y quizás el que tiene opiniones más diferentes a todos es el PS. Veámoslo, acto seguido, mientras analizamos creencia a creencia.

El único que piensa que la actividad matemática es exclusivamente instrumental es el PS, mientras que el EPS piensa que es también investigativa, y los de primaria no lo tienen claro. En el momento de transportar las matemáticas a las aulas, los estudiantes de profesor piensan que las clases de matemáticas no son (o no deben ser) rutinarias, mientras que los dos profesores no se posicionan. Respecto a la contextualización matemática (tanto temporal como por temas) de los problemas, el único que tiene claro que no la hay es el EPS, mientras que los otros no se posicionan. En lo que todos coinciden es en que en la RP es tan importante el producto como el proceso, aunque los que ponen menos énfasis son los profesores en activo. Al igual que en la necesidad de que el proceso de resolución sea lineal: mientras que los otros tres se oponen, el PS no tiene clara su posición. Finalmente, el único que otorga a la resolución de problemas la máxima relevancia dentro de la actividad matemática es el EPS, los demás no lo ven claro.

Respecto al sistema de creencias, observamos que otra vez el que más concibe los problemas como herramientas para favorecer el pensamiento matemático es el EPS, mientras que el que más se aleja de esta visión en este caso es el PS.

5.3 Creencias sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas

En el Cuadro 3 mostramos, como en los casos anteriores, las creencias-tipo de los cuatro prototipos, en este último caso sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas:

| C. Creencias sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la RP | EPS | PS | EPP | PP |
|--|-----|----|-----|----|
| 1. Aprender conocimientos de matemáticas garantiza el éxito en RP. | NO | sí | no | - |
| 2. Aprender estrategias (heurísticos) ayuda mucho en el éxito en RP. | SÍ | sí | SÍ | SÍ |
| 3. En vistas a mejorar en la RP, es importante intentar mejorar en el control de los conocimientos y de los estados de ánimo, la paciencia y la perseverancia. La RP necesita intuición y sentido común. | - | - | - | - |
| 4. Mecanizar los procesos de resolución de problemas es necesario, y hay que enseñar estos métodos-tipo. | no | sí | sí | sí |

Cuadro 3 – Creencias sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la RP
Fuente: desarrollado por los autores

Los sistemas de creencias de los cuatro prototipos son diferentes, pero siguen una especie de escala lineal de más a menos, cercano al sistema propuesto por Schoenfeld en el siguiente orden: EPS - EPP - PP - PS.

En particular, podemos decir que los cuatro casos estudiados consideran que aprender estrategias favorece el éxito en RP. En el caso de los conocimientos, mientras que los dos estudiantes consideran que aprenderlos no garantiza el éxito en RP, el PS cree que sí, y el PP no se posiciona. Sobre la conversión de problemas no problemas, el EPS es el único que no cree que deban mecanizarse los procesos de RP. Finalmente, en cuanto a la importancia del control de los estados de ánimo y el control cognitivo (intuición), ninguno de los cuatro se posiciona.

6 Caracterización de los prototipos

A continuación caracterizamos los cuatro prototipos según los conocimientos y creencias que hemos obtenido de ellos mediante el análisis realizado. Además añadimos, para cada prototipo, su formación y experiencia profesional, para después analizar las relaciones entre estos factores y los conocimientos y creencias sobre RP.

Andrea (EPS) es estudiante del Máster de Formación del Profesorado de la especialidad de Matemáticas de la promoción 2010-2011 en la Universidad Autónoma de Barcelona. Ha terminado recientemente su formación universitaria científica, y tiene un nivel muy alto de conocimientos del contenido matemático (tanto en conocer como en razonar) y también de conocimiento curricular. Sin embargo, con respecto a los conocimientos

didácticos del contenido, tiene algunas dificultades a la hora de planificar o adaptar problemas que se adecuen a sus objetivos didácticos o de representar diferentes enfoques o resoluciones de problemas. Tiene más facilidad, en cambio, para evaluar las soluciones de los alumnos. En cuanto a sus creencias sobre la enseñanza-aprendizaje de la Resolución de Problemas, podríamos sintetizar que considera los problemas como *herramienta para favorecer el pensamiento matemático*, en el sentido que le da Schoenfeld (1992).

Sobre su formación y experiencia profesional, destacamos:

- Su educación universitaria científica reciente: los conocimientos del contenido y la visión de las matemáticas y la resolución de problemas que ésta le ha aportado.
- El Máster de Formación del Profesorado que está cursando: la visión que estos estudios le aportan sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
- La falta de experiencia docente: la falta de los recursos didácticos que se aprenden en el aula, y el cambio de creencias que le podrían generar, por un lado, el impacto que suele resultar encontrarse cara a cara con el alumno real, y por otro, el posible acomodo que la rutina puede generar en un profesor.

Benjamín es profesor de educación secundaria (PS) con 28 años de experiencia docente, que, actualmente, enseña matemáticas en secundaria en el aula abierta (diversidad). Su nivel de conocimientos del contenido matemático es alto, en especial a la hora de conocer, y algo menos a la hora de razonar. En cuanto al conocimiento didáctico del contenido, tiene un nivel del conocimiento curricular alto, medio de transformación y bajo de planificación. Exceptuando sus creencias sobre el objeto problema de matemáticas (muy afines a la definición que adoptamos en este trabajo), sus creencias respecto a la Resolución de Problemas y su enseñanza-aprendizaje se caracterizan por una visión de subsidiariedad de la RP a los conocimientos matemáticos, visión que favorece la reducción de los problemas a no-problemas y el desarrollo de unas clases rutinarias.

Sobre su formación y experiencia profesional, destacamos:

- Su educación universitaria científica hace 30 años: por un lado, los conocimientos del contenido y del concepto de resolución de problemas que ésta le aportó, y por otro, la distancia en el tiempo del uso de razonamientos para resolver problemas reales para él.
- El CAP (Certificado de Aptitud Pedagógica, formación pedagógica y didáctica muy breve anterior a 2008): la poca formación pedagógica recibida puede haber comportado una falta de recursos iniciales especialmente metodológicos, y,

posiblemente, no ha modificado demasiado las creencias sobre didáctica que tenía como estudiante.

- Muchos años de experiencia docente: la reducción al instrumentalismo de la actividad matemática y la tradición conductista del aprendizaje son características comunes a una forma tradicional de enseñar las matemáticas; a menudo la continuidad del quehacer en un centro educativo, o el acomodo en la forma de hacer durante los años, o la falta de recursos o conocimientos pedagógicos hace que estas creencias sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se perpetúen.

Carlos es un estudiante (EPP) de 3er curso del grado de Educación Primaria de la UAB del curso 2011-2012. Su nivel de conocimientos, tanto del contenido matemático como didáctico, es bajo. En cuanto a sus creencias, concibe el objeto problema de matemáticas como un ejercicio, con lo que la RP no está presente en su idea de clase de matemáticas. Sin embargo, cree en unas clases poco rutinarias, y en la resolución de problemas da importancia al proceso por delante del producto.

Sobre su formación y experiencia profesional, destacamos:

- La poca educación científica: aparte de las dos asignaturas de matemáticas existentes en el grado, no ha estudiado matemáticas desde la ESO. Esto podría explicar la dificultad mostrada a la hora de conocer el contenido matemático, y su visión de las matemáticas como disciplina (ya que, a menudo, en la educación obligatoria se las dota de un carácter básicamente instrumental, sobre todo de cara a los alumnos que tienen dificultades).
- El Grado de Educación Primaria que cursa actualmente: le puede haber aportado la visión abierta sobre la enseñanza-aprendizaje de cualquier disciplina (clases no rutinarias).
- La falta de experiencia docente: hace, por un lado, que aún mantenga intactas sus creencias idealistas sobre la enseñanza-aprendizaje en general, y por otro, que le falten muchos recursos didácticos que se aprenden con la práctica, y que no le haya surgido la necesidad de aprender más matemáticas porque tuviera que enseñarlas.

Diana es una profesora de Educación Primaria (PP) con 5 años de experiencia docente, 3 de los cuales en el Ciclo Superior de Primaria. Tiene un nivel bajo de conocimiento del contenido matemático en cuanto a conocer, aunque lo tiene más alto (medio) en razonar. En cuanto al conocimiento didáctico del contenido, tiene un nivel del conocimiento curricular alto, medio de transformación y bajo de planificación. Tiene unas creencias de lo que es un problema muy concretas (y muy diferentes de las que adoptamos en este trabajo): problema

aritmético, en forma de texto, de contexto real, y con un método de resolución para cada tipología. Respecto a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y de la RP no se posiciona ni por unas matemáticas investigativas, ni instrumentales, ni por unas clases creativas, ni rutinarias.

Sobre su formación y experiencia profesional, destacamos:

- La poca educación científica: sólo ha estudiado matemáticas en la educación obligatoria y en las asignaturas de didáctica de las matemáticas de la diplomatura, lo que podría ser la causa de su nivel bajo en contenidos matemáticos, especialmente en los que se enseñan después de la educación primaria.
- La Diplomatura de Educación Primaria finalizada hace 6 años: le ha aportado conocimientos didácticos y unas creencias abiertas sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y de cualquier disciplina.
- La experiencia docente: por un lado, le ha aportado conocimiento curricular del contenido matemático (pero sólo en aquellos contenidos que ha impartido) y recursos didácticos y metodológicos; y, por otro lado, ha moldeado sus creencias sobre el estilo de clases a impartir (no descarta el modelo de clases rutinarias) y sobre las clases de matemáticas en concreto (en particular, sus creencias sobre qué son ejercicios y qué son problemas).

7 Discusión de los resultados y conclusiones

Mediante el estudio de estos cuatro casos hemos podido constatar que tanto la formación inicial (y por lo tanto la etapa educativa) como la experiencia docente son factores que están relacionados con algunos conocimientos y creencias sobre RP de profesores y estudiantes de profesor de matemáticas. A continuación exponemos detalladamente las relaciones detectadas.

La formación inicial de los profesores de secundaria de matemáticas tiene dos vertientes: la formación universitaria científica y la formación pedagógica y didáctica (en España, el CAP antes del 2009 y el Máster de Formación del Profesorado en la actualidad). Cada uno de estos estudios aporta a los futuros profesores diferentes conocimientos y creencias sobre la resolución de problemas. De acuerdo con nuestros resultados, la formación universitaria científica aporta mucho conocimiento del contenido matemático, así como una visión amplia de las matemáticas y de la resolución de problemas como herramienta para favorecer el pensamiento matemático.

Concerniente a la formación pedagógica, no consideraremos el CAP como tal, como tampoco lo hacen algunos estudios internacionales (TATOO et al., 2008), y como también muestran los resultados obtenidos, ya que no hemos identificado ningún resultado que denote una afectación sobre los conocimientos o las creencias sobre resolución de problemas de los profesores con esta formación.

En cambio, hemos obtenido unos resultados distintos en el prototipo que ha cursado el Máster de Formación del Profesorado, especialmente en las creencias sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y en concreto, de la resolución de problemas; creencias que, en este caso, ponen el centro de atención en la construcción del conocimiento matemático por parte del propio aprendiz. Además, en el Máster también se imparte conocimiento didáctico, aunque hemos detectado en nuestros resultados que el conocimiento didáctico no sólo depende de la formación pedagógica; también aumenta con el conocimiento del contenido matemático, ya que comprender bien un concepto es fundamental para encontrar la manera de que los otros lo comprendan.

A diferencia de secundaria, la formación inicial de los maestros de primaria se basa solamente en el Grado de Educación Primaria, estudios en los que los futuros maestros deben adquirir todo el conocimiento necesario para ejercer la profesión. Según nuestros resultados, este objetivo no se cumple, con lo que creemos que las tres materias que se imparten sobre matemáticas y su didáctica son insuficientes para garantizar el conocimiento matemático necesario para poder enseñar matemáticas de una manera satisfactoria en educación primaria. Esta conclusión es también avalada por investigaciones recientes como el TEDS-M: el informe señala insuficiencias y deficiencias en los planes de formación del profesorado de educación primaria, y concluye que “los nuevos planes de estudios de formación de maestros deberán introducir importantes cambios en la titulación, en la estructura de los planes de formación y en los programas para profundizar en la formación de maestros de matemáticas de primaria” (INSTITUTO NACIONAL DE EVALUACIÓN EDUCATIVA, 2012, p. 128).

Por otro lado, cursar el Grado de educación primaria también parece estar relacionado con algunas creencias sobre la resolución de problemas. Mientras que a duras penas, modifica las creencias sobre el objeto *problema de matemáticas* y sobre las matemáticas como disciplina (la educación obligatoria las dota de un carácter marcadamente instrumental que puede permanecer después de la universidad), estos estudios aportan una visión abierta – sobre todo en cuanto a clases no rutinarias – sobre la enseñanza-aprendizaje de cualquier materia y de las matemáticas en particular.

Respecto a la experiencia docente, esta se ve reflejada de forma distinta en los profesores de primaria y de secundaria, pero, en ambos casos, parece ser un arma de doble filo. El denominador común es que la experiencia docente aporta recursos didácticos y metodológicos que se aprenden en el aula, pero, por otro lado, también puede quebrar ciertas creencias idealistas sobre la enseñanza-aprendizaje en general, debido a la continuidad del quehacer de una escuela, al acomodo de la rutina de los años o a la falta de formación continuada. Esto puede generar una tendencia al instrumentalismo de la actividad matemática y a un modelo de clases rutinarias, especialmente a los profesores de secundaria que no tengan una formación sólida sobre didáctica.

En el caso de los maestros de primaria, la práctica docente les genera, además, la necesidad de comprender bien los contenidos matemáticos que tienen que impartir, con lo que la experiencia aporta a los maestros el conocimiento curricular que no hayan adquirido en su formación inicial. También puede modificar sus creencias sobre el objeto *problema de matemáticas*, puesto que es posible que anteriormente no fueran muy consistentes.

Los resultados obtenidos ponen de manifiesto, por un lado, la necesidad de dar en la formación inicial de maestros de primaria un mayor énfasis en el conocimiento del contenido matemático, y, por el otro, la necesidad de una formación continuada para profesores tanto de educación primaria como especialmente de secundaria en el ámbito didáctico.

Concerniente a la formación inicial de los profesores de secundaria, este estudio revela que ésta parece ser más efectiva que el anterior CAP, pero debemos esperar un tiempo para poder comprobar esta conjetura.

Referencias

AZCÁRATE, P. **El conocimiento profesional didáctico-matemático en la formación inicial de los maestros**: Una propuesta de intervención para su organización y su elaboración. Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, 2001.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, London, v. 59, n. 5, p. 389-407. Nov./Dec. 2008.

CALLEJO, M. L. **Un Club Matemático para la diversidad**. Madrid: Narcea, 1994.

CASTRO M. E. Resolución de Problemas: Ideas, tendencias e influencias en España. In: Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 12., 2008, Badajoz, *Actas...* Badajoz: SEIEM, 2008.

INSTITUTO NACIONAL DE EVALUACIÓN EDUCATIVA. **TEDS-M. Informe español.** Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012.

GINÉ, C. **Coneixements i creences sobre la resolució de problemes de professors i estudiants de professor d'educació primària i secundària:** un estudi sobre la continuïtat en l'ensenyament de les matemàtiques. 2012. 251 f. Tesis Doctoral (Doctorado en didáctica de las matemáticas) – Facultad de Educación, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, 2012.

GÓMEZ-CHACÓN, I. **Matemática emocional.** Los afectos en el aprendizaje matemático. Madrid: Narcea, 2000.

KELLY, A. **Education and Democracy:** Principles and Practices. London: Paul Chapman, 1995.

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. **Thinking Mathematically.** London: Addison-Wesley, 1982.

MULLIS, I. V.; MARTIN, M. O.; RUDDOCK, G. J.; O'SULLIVAN, C. Y.; ARORA, A.; ERBERBER, E. **TIMSS 2007 assessment frameworks.** Chestnut Hill, MA: Boston College, 2007.

POLYA, G. **How to solve it.** Garden City, NY: Doubleday and Co., Inc, 1957.

PUIG, L. Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación i en el currículo. In: Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 12., 2008, Badajoz, **Actas...** Badajoz: SEIEM, 2008. p. 93-111.

SCHOENFELD, A. **Mathematical Problem Solving.** Orlando: Academic Press, 1985.

SCHOENFELD, A. Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics. In: GROUWS, D. **Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning.** New York: MacMillan, 1992. p. 334-389.

TATTO, M. T.; SCHWILLE, J.; SENK, S.; INGVARSON, L.; PECK, R.; ROWLEY, G. **Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M):** Conceptual framework. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University, 2008.

THOMPSON, A. The relationship of teacher's conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 15, n. 2, p. 105-127, May 1984.

VILA, A. **Resolució de problemes de matemàtiques:** Identificació, origen i formació dels sistemes de creences en l'alumnat. Alguns efectes sobre l'abordatge dels problemes. 2001. 659 f. Tesis Doctoral (Doctorado en didáctica de las matemáticas) – Facultad de Educación, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, 2001.

Submetido em Dezembro de 2012.
Aprovado em Maio de 2013.