

# Grandeza Volume: um estudo exploratório sobre como alunos do ensino médio lidam com situações de comparação

## Volume Quantities: An Exploratory Study on How High School Students Deal with Situations of Comparison

Ana Paula Nunes Braz Figueiredo\*

Paula Moreira Baltar Bellemain\*\*

Rosinalda Aurora de Melo Teles\*\*\*

### Resumo

Este artigo consiste em um estudo exploratório sobre o modo como alunos do Ensino Médio lidam com situações de comparação relativas ao volume. A partir do aporte teórico da Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Gérard Vergnaud e colaboradores, analisamos como os alunos do Ensino Médio lidam com situações de comparação de sólidos a partir de seu volume, aplicando três atividades com 51 alunos de três escolas, uma da rede particular, uma da rede pública federal e outra da rede pública estadual. Observamos que a maioria não compreende volume como grandeza diante de situações de comparação que exigem do aluno a articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas. Percebemos também lacunas e entraves com respeito às relações entre volume e outros conceitos como o de densidade, massa, bem como à trilinearidade do volume.

**Palavras-chave:** Grandezas e Medidas. Volume. Teoria dos Campos Conceituais.

### Abstract

This article consists of an exploratory study on how high school students deal with situations of volume comparison. From the theoretical framework of the Conceptual Fields Theory, developed by Gérard Vergnaud and colleagues, we analyzed how high school students deal with situations of solids comparison from their volume, by applying three activities with 51 students from three schools, one of a private network, one of the federal system and one from public school. We observed that most do not understand volume, how quantities in situations of comparison that require of student articulation between frames geometric, numeric and magnitudes.

\* Mestra em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). (Professora substituta de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco- Centro Acadêmico do Agreste), Caruaru, Pernambuco, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Escritor Lins do Rego, 45, Barro, CEP: 50780540, Recife, PE, Brasil. *E-mail*: apnbf@yahoo.com.br .

\*\* Doutora em Didática das Disciplinas Científicas pela Universidade de Grenoble I, (Genebra, França). (Professora adjunta da Universidade Federal de Pernambuco), Recife, Pernambuco, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Acadêmico Hélio Ramos, s/n, Cidade Universitária. CEP:50670-901, Recife, PE, Brasil. *E-mail*: paula.baltar@terra.com.br.

\*\*\* Doutora em Educação pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). (Professora adjunta da Universidade Federal de Pernambuco), Recife, PE, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Luis Rodolfo de Araújo, nº60, apto 302, Aflitos, CEP:52.050-052, Recife, PE, Brasil. *E-mail*: rosinaldateles@yahoo.com.br.

We also see gaps and barriers with respect to the relationship between volume and other concepts such as density, mass and trilinearity of the volume.

**Keywords:** Magnitudes and Measurements. Volume. Theory of Conceptual Fields.

## 1 Introdução

A grandeza volume está inserida no campo conceitual das grandezas geométricas, o qual por sua vez, faz parte de um campo conceitual mais amplo das grandezas e medidas, que inclui, além das grandezas geométricas, a massa, a duração de intervalos de tempo e outras grandezas físicas.

O trabalho com grandezas geométricas foi marcado durante um longo período por uma ênfase exagerada na utilização de fórmulas e conversão de unidades, o que ainda se observa nos livros didáticos, de acordo com a avaliação do Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2011) para o Ensino Médio.

Ainda que alguns dos aspectos a serem estudados sejam complexos, em relação à grandeza volume, a necessidade do uso social gera a responsabilidade da escola em explorá-los desde o ingresso do aluno nos Anos Iniciais, para possibilitar a consolidação das habilidades e das competências do aluno a respeito deste conteúdo no Ensino Médio, pois, segundo o artigo 35 da LDBEN, o Ensino Médio tem como finalidades:

- I. a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
- II. a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
- III. o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento crítico;
- IV. a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina (BRASIL, 1996, p. 28-29).

Pesquisas anteriores, como de Barros (2002) e de Oliveira (2002), revelaram diversos tipos de erros cometidos por alunos do Ensino Fundamental relacionados à compreensão do princípio de conservação de volume. Além disso, mostraram a persistência das dificuldades conceituais em torno do conceito de volume, da distinção entre volume e capacidade, e entre outras grandezas como massa e peso. Também observaram que os alunos recorrem, na maioria dos casos, à utilização de fórmulas para calcular o volume.

Dessas constatações, surge a questão central da pesquisa desenvolvida por Figueiredo (2013), da qual o artigo aqui apresentado é um recorte: como os alunos de Ensino Médio lidam com problemas sobre volume? Em busca de respostas para essa questão, esta pesquisa objetivou analisar a compreensão de volume como grandeza por alunos do Ensino Médio, adotando como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1991). Para isso, utilizamos dois instrumentos de coleta de dados: um teste de sondagem e entrevistas com alunos do terceiro ano do Ensino Médio.

O recorte escolhido para esse artigo busca elementos de resposta à seguinte questão: Como os alunos do Ensino Médio lidam com problemas nos quais está em jogo a comparação de volume de sólidos a partir de condições dadas?

## 2 Volume como grandeza

A consideração de volume como grandeza tem sua origem na adaptação da hipótese didática oriunda das pesquisas desenvolvidas por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989), as quais distinguem três quadros para compreensão do conceito de área como grandeza: o quadro geométrico, o quadro das grandezas e o quadro numérico.

Segundo Douady e Perrin-Glorian (1989), um quadro é constituído, de forma dinâmica, por objetos matemáticos, bem como das relações desses objetos, de suas formulações e imagens mentais que podem estar relacionadas ao objeto pelo sujeito, num determinado momento. Dois quadros podem ser constituídos pelos mesmos objetos, mas apresentarem diferenças quanto às imagens mentais e formulações associadas a esses objetos.

O quadro geométrico, para o conceito de área, é constituído pelas figuras que possuem superfície no mundo físico. O quadro das grandezas é composto de classes de equivalência das figuras planas de mesma área. O quadro numérico refere-se ao conjunto dos números reais não negativos, que no caso da área, assim como para outras grandezas, corresponde ao valor numérico de sua medida, em determinada unidade. Cada classe de equivalência pode ser representada por um número acompanhado de uma unidade de área. Por exemplo,  $2\text{m}^2$  representa a classe de equivalência de todas as figuras que possuem a medida de área “2” na unidade “*metros quadrados*”.

Considerando de relevância para este estudo o esquema conceitual de quadros construídos por Douady e Perrin-Glorian (1989), consideramos o volume como objeto do

quadro das grandezas, os sólidos compõem o quadro geométrico e os números reais positivos referentes às medidas de volume são objetos do quadro numérico.

Então, devemos considerar que alguns aspectos válidos para a grandeza área também são válidos para volume. Por exemplo, sólidos diferentes podem ser equivalentes em relação ao volume, o que leva à necessidade de distinguir o sólido e seu volume. Do mesmo modo, a mudança de unidade de volume provoca mudança na medida do volume, mas não no volume enquanto uma grandeza, o que justifica a necessidade de distinguir volume (que no nosso marco teórico é a grandeza) e medida de volume (que na nossa base teórica é um número). O par número/unidade é uma maneira de expressar o volume como grandeza.

### 3 Estudo do conceito de volume sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais

Para Vergnaud (1991), a constituição de um conceito depende de três dimensões do conhecimento, as quais estão interrelacionadas. O conceito é, então, definido por:

$$C = \{S, I, R\}$$

Em que:

S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito;

I é um conjunto de invariantes operatórios, mecanismos utilizados pelo sujeito na resolução do problema (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação);

R é um conjunto de representações simbólicas, utilizadas tanto para apresentação quanto para resolução do problema.

Teorema-em-ação é uma proposição considerada verdadeira sobre o real. O sujeito não é necessariamente capaz de formular explicitamente os teoremas-em-ação que mobiliza e tais proposições podem ser verdadeiras ou falsas do ponto de vista da Matemática acadêmica.

Conceito-em-ação é um objeto, um predicado, ou uma categoria de pensamento tida como pertinente, relevante. Esse conhecimento geralmente está implícito e o aluno tem dificuldades em explicá-lo ou expressá-lo, porém não significa que tal conhecimento não possa ser explicitado (MOREIRA, 2002).

Para estudar o desenvolvimento e uso de um conceito, ao longo da aprendizagem ou de sua utilização, é necessário considerar esses três conjuntos simultaneamente.

Consideramos volume nesta pesquisa como conceito e, portanto, como um tripé de três conjuntos indissociáveis: o conjunto das situações que dão sentido a volume, o conjunto dos

invariantes operatórios contidos nos esquemas e o conjunto das formas de representação simbólica em jogo nas situações relativas a volume.

O sentido que uma pessoa atribui ao conceito de volume depende dos tipos de situação que é capaz de resolver, dos conceitos e propriedades que mobiliza na resolução bem como da maneira como lida com as representações simbólicas em jogo na situação e no processo de resolução da mesma. Por exemplo, suponhamos que para comparar os volumes de dois sólidos constituídos por cubinhos idênticos (situação), uma pessoa calcula os volumes dos dois sólidos e compara as medidas obtidas. Na interpretação do enunciado e na resolução vai lidar com representações simbólicas (o empilhamento de cubinhos, ou uma representação em perspectiva do sólido, fórmulas para o cálculo de volume) e vai mobilizar invariantes operatórios, tais como a medida e a propriedade segundo a qual, tomando a mesma unidade de volume, podemos comparar apenas valores numéricos (as medidas).

Diante disso, com base em pesquisas anteriores sobre o tema e sobre temas conexos, como a aprendizagem do conceito de área de figuras planas, construímos uma tipologia de situações que potencialmente podem dar sentido a volume e submetemos a uma análise de dados empíricos.

Os tipos de situações propostas na dissertação que deu origem a este artigo são os baseados na classificação dada por Baltar (1996) para o conceito de área, que consistem em situações de medida, de comparação e de produção. A situação de medida tem como subtipos situações de transformação de unidade e de operacionalização de volume.

Porém neste recorte, trataremos apenas de situação de comparação. Problemas de comparação consistem em determinar, dados dois sólidos, se eles têm mesmo volume ou qual dos dois tem volume maior. Nos casos em que são apresentados mais de dois sólidos, trata-se de ordenar os sólidos, e nesse caso, intervém a transitividade da relação de ordem. Situações de comparação exigem do aluno a passagem do quadro geométrico para o quadro das grandezas, levando em consideração a articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas construídos por Douady e Perrin-Glorian (1989). Situações em que são comparados sólidos ocultos ou maciços, ou realizar comparações estáticas ou dinâmicas, podem favorecer ou bloquear as estratégias mobilizadas pelos alunos.

Podemos esperar como estratégias nas situações de comparação de volume: visual (perceptiva), inclusão, decomposição-recomposição, imersão, medida e comparação das

medidas, e comparação das massas. As diferentes estratégias fazem intervir diversos invariantes operatórios. Por exemplo, na estratégia de comparação de massas intervém o teorema-em-ação “quando a massa de um corpo altera, o volume conseqüentemente altera no mesmo sentido”, pela compreensão da definição de densidade dos corpos. Como se sabe, esse teorema-em-ação é válido se os dois sólidos tem mesma densidade, mas não é válido no caso geral.

Ao utilizar estratégias como a visual, inclusão e comparação de massas, o aspecto numérico não estará presente. Portanto, nas situações de comparação, o campo numérico nem sempre será mobilizado.

Aspectos importantes que devem ser observados diante de situações de comparação como ao se comparar sólidos em que envolve apenas comparação estática, ou seja, os sólidos não mudam de forma, ou casos em que há alteração na forma dos sólidos envolvidos (comparação dinâmica), casos em que há mais de dois sólidos a serem comparados, em que será necessário o conhecimento sobre transitividade da relação de ordem, casos em que utilizam sólidos ocos e/ou maciços, envolvendo assim o conceito de capacidade além de volume.

#### **4 Metodologia da pesquisa**

Devido à existência de poucos trabalhos sobre esse tema, optamos por realizar um estudo exploratório, no qual trabalhamos com um grupo de 51 alunos do Ensino Médio de uma escola da rede particular, uma escola da rede pública estadual e uma escola da rede pública federal de ensino da cidade de Recife-PE. As escolas foram selecionadas por serem de referência para o Ensino Médio nessa cidade, porém, na análise dos dados, todos os sujeitos são tratados indiscriminadamente por não haver intenção de comparar performances das escolas e sim, analisar procedimentos de resolução diversificados.

O teste de sondagem permitiu observar como cada aluno, em situação individual e sem consulta, lida com problemas de diversos tipos, envolvendo volume, além de permitir uma confrontação com a análise a priori. As entrevistas objetivaram validar ou não as pistas e evidências sobre a construção do conceito do volume obtidas a partir da aplicação do teste de sondagem, para esclarecer as respostas dadas por eles no teste escrito, confirmando ou não a

interpretação dada à resolução deles. Foram selecionados para as entrevistas, dez alunos que deixaram respostas incompletas, que não apresentaram justificativas nas respostas, ou cujas resoluções indicavam dificuldades diante de situações que exigiam a articulação e distinção entre os quadros numérico, geométrico e das grandezas.

Para construção do teste de sondagem, levamos em consideração os estudos de Barros (2002), Oliveira (2002) e Anwandter-Cuellar (2008), a partir dos quais refletimos a respeito das situações de comparação, e como os alunos do Ensino Médio lidam com elas.

Desta forma, agrupamos as atividades que foram aplicadas aos alunos de acordo com o tripé de Vergnaud (1991) para a obtenção de um conceito (situações, invariantes operatórios e representações simbólicas) e levando em consideração a articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas construídos por Douady e Perrin-Glorian (1989).

O teste, aplicado para o terceiro ano do Ensino Médio, do total de doze questões envolvendo as situações de volume, continha três questões de comparação.

As três questões exploravam diferentes formas de se comparar volume: através da contagem de cubinhos, pela decomposição e recomposição (Q2), utilizando imersão de objetos em depósito com líquido no seu interior, e verificando o nível de líquido a cada imersão para comparação (Q1), através da fórmula para calcular volume (Q3), pelo método visual, perceptivo (Q1). Observe as questões:

A primeira foi inspirada em uma questão do trabalho de Oliveira (2002). Modificamos a forma dos dois objetos, pois no caso da pesquisa de Oliveira (2002), eram entrevistas e que havia, desde o início, material a ser manipulado à disposição do aluno, enquanto que neste estudo, a situação é evocada pelo texto. O material a ser manipulado só foi colocado à disposição do aluno durante a entrevista.

1) Você está com dois pedaços iguais de massa de modelar, forme com um deles uma esfera e com outro uma pizza e marque a alternativa correta:

- a) Os dois objetos formados têm o mesmo volume.
- b) A esfera tem volume maior que a pizza.
- c) A esfera tem volume menor que a pizza.

Justifique sua resposta:



Esta questão trata da distinção entre o sólido geométrico e seu volume. O aluno deve imaginar a deformação de dois sólidos idênticos e a transformação de um sólido em uma pizza e do outro em uma esfera, pois durante o teste não era possível a manipulação do material, que no caso era a massa de modelar. Para resolver corretamente a questão, o aluno deve considerar o argumento de conservação de volume, mobilizando conhecimentos do quadro das grandezas.

A resposta certa é a letra a, os dois objetos formados têm o mesmo volume. Os alunos devem mobilizar o teorema-em-ação correto: *“Sólidos de mesma massa e mesma densidade têm mesmo volume”*, ao observar que houve invariância da massa e da densidade.

Por ser uma situação de comparação entre dois objetos, o aluno pode dispor de estratégias como: visual-perceptiva, durante o teste de sondagem e comparação de massas e imersão, durante a entrevista, pois foram colocados a seu dispor materiais para a imersão e massa de modelar apenas durante a entrevista.

Se os alunos não desenvolveram ainda o princípio de conservação de volume, podem mobilizar o teorema-em-ação errôneo do ponto de vista matemático: *“O volume de um sólido se altera na mesma proporção que seus comprimentos”*, podendo justificar a escolha da alternativa b desta forma: *“a esfera tem volume maior por ter maior altura”*; ou a escolha da alternativa c : *“a pizza tem volume maior por ter maior raio”*. Como foi observado no trabalho de Oliveira (2002), em que houve teoremas-em-ação errôneos do tipo: *“tem volume maior porque é mais comprido”*, *“o corpo que tem maior peso, tem maior volume”*, *“se altera a figura, altera a medida, então o volume é modificado”*.

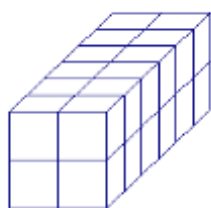
A ausência de outras representações simbólicas, como material concreto para ser manipulado, durante o teste de sondagem e a sua presença durante a entrevista, foi para observar a relevância da representação para compreensão da situação de comparação, caso algum sujeito escolha uma alternativa no teste e adquira outra opinião durante a entrevista, diante dos materiais a serem manipulados.

A segunda questão foi elaborada a partir da observação de duas questões, uma presente no trabalho de Barros (2002) e a outra no trabalho de Anwandter-Cuellar (2008); porém, foram modificadas na forma dos sólidos. Acrescentamos reentrâncias no sólido B e mudamos a posição do cubinho do nível mais superior do sólido C. Ao invés de estar no canto

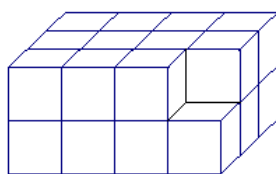


esquerdo, colocamos no centro, dificultando o cálculo de volume e assim pudemos identificar um número mais diversificado de estratégias de medida. A questão foi escolhida para verificar se os alunos sabem comparar volumes de sólidos de diferentes formas, compostos por empilhamento de cubinhos. Modificamos as alternativas e acrescentamos a alternativa “*outros*” para possibilitar a manifestação de estratégias não contempladas na análise a priori. Tanto o aluno pode escolher uma das respostas propostas nas alternativas a, b, c ou d como pode produzir outra resposta e marcar a alternativa “e” em aberto, correspondente a qualquer outra resposta. Como essa era a primeira questão do teste de sondagem que apresentava alternativas, pois nas questões anteriores não havia alternativas como resposta, para que os alunos considerassem “*outros*” como uma real escolha possível a alternativa correta desta questão é a “e”.

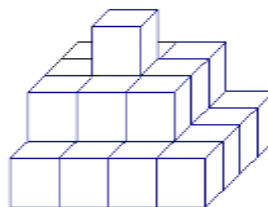
2) Os sólidos abaixo, são compostos por cubinhos de 1cm de aresta, sabendo que na parte escondida do desenho, há um cubo sob outro, até que fique visível o cubo do topo, e desta forma não há cubo suspenso e nem sobrando. Compare o volume dos sólidos abaixo e marque a alternativa correta:



SÓLIDO A



SÓLIDO B



SÓLIDO C

- a)  $V_a = V_b = V_c$
- b)  $V_a < V_b < V_c$
- c)  $V_a > V_b > V_c$
- d)  $V_a = V_b > V_c$
- e) OUTROS

Justifique sua resposta:

A questão trata da comparação entre os volumes de três blocos que estão representados em perspectiva cavaleira. Ao contar os cubinhos de cada sólido, concluímos que  $V_a=24$  cubinhos,  $V_b=23$  cubinhos,  $V_c=26$  cubinhos e como cada cubinho tem volume igual a  $1\text{cm}^3$ , podemos escrever  $V_a = 24\text{cm}^3$ ,  $V_b=23\text{cm}^3$  e  $V_c=26\text{cm}^3$ . Então colocamos em ordem crescente de volume, os blocos B, A e C, que não está representada em nenhuma das alternativas de “a” a “d”, logo, a resposta correta é a letra e.

Por dizer no enunciado da questão que os cubinhos têm 1 cm de aresta, fornece ao aluno duas possibilidades para a unidade de medida de volume dos sólidos apresentados: cubinhos ou o centímetro cúbico, embora esse aspecto não esteja em foco, uma vez que se trata da comparação de volumes.

Como estratégias que podem ser utilizadas pelos alunos, podemos citar a decomposição-recomposição e a medida seguida da comparação das medidas. Na decomposição-recomposição, o aluno irá decompor o sólido em cubinhos e montar (compor) outro sólido parecido com eles, para serem diretamente comparados. Por exemplo, posso tentar transformar o sólido C, no sólido A, com quatro fileiras de seis cubinhos dispostas duas a duas, uma em cima da outra e verificamos que irão restar dois cubinhos do sólido C. Logo, concluímos que se o sólido C tem mais cubinhos que o sólido A, então tem maior volume. O mesmo faria com o sólido B e observaria que ficou faltando um cubinho para montar o sólido A. Assim, teríamos a solução da questão,  $V_c > V_a > V_b$ .

A presença de reentrâncias nos blocos B e C, deixando de ser bloco retangular como o bloco A, pode dificultar a contagem dos blocos, levando o aluno ao erro. Caso mude as posições dos cubos por visualização, tentando transformar o sólido C, por exemplo, em um dos sólidos restantes, pode errar considerando os sólidos iguais. Desta forma, pode considerar também o mesmo volume para todos os sólidos, respondendo assim a letra a.

O aluno pode errar nos cálculos de contagem (adição e multiplicação), desconsiderar o cubinho do canto em uma das arestas, respondendo assim a letra b, contar apenas os cubinhos visíveis, desta forma responderia a letra c, ou duplicar o cubinho do canto, confundir volume com área de superfície, multiplicar as áreas das faces do sólido. Considerar que o sólido de maior volume é o sólido de maior altura, respondendo a letra d, já que o sólido C tem altura maior que os sólidos A e B, os quais têm mesma altura.

A questão 3 foi baseada em um exame de vestibular, na qual alteramos as alternativas para observarmos erros quanto aos cálculos numéricos e acrescentamos a alternativa outros, para dar possibilidades de resposta variadas. O objetivo de escolha desta questão foi observar se os alunos compreendem a concepção do volume relacionada com a sua tridimensionalidade em referência com o comprimento de suas arestas. A estratégia utilizada é a fórmula de volume.

3) Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado:

- a) 20%      b) 0,8%      c) 60%      d) 72,8%      e) OUTROS

Justifique sua resposta:

De acordo com Barros (2002) e Anwandter-Cuellar (2008) a concepção da tridimensionalidade do volume envolve, entre outros aspectos, o desenvolvimento da habilidade algébrica de transformação de semelhança, ou seja, se a razão de semelhança é  $k$  ao modificar o comprimento da aresta de um sólido, então o volume do sólido é multiplicado por  $k^3$ . Assim a resposta correta é a alternativa *d*, pois:

Como  $V = a^3$ , então: se aumentamos em 20% os comprimentos das arestas, seu volume aumenta em 72,8%, pois:

$$V' = (1,20 a)^3 = 1,728 a^3 = 1,728 V.$$

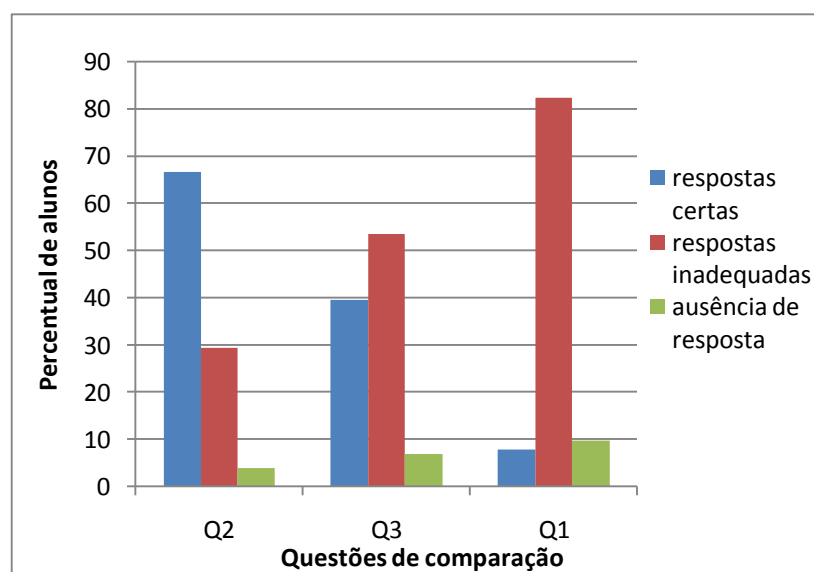
Segundo Vergnaud (1991), a grandeza volume se insere no campo conceitual das estruturas multiplicativas e para a sua compreensão faz-se necessária a passagem de uma concepção aditiva da grandeza volume (como na contagem de cubinhos para calcular o volume) para a concepção multiplicativa que, segundo o autor supracitado, é um processo lento e difícil do desenvolvimento cognitivo do sujeito. Desta forma, podemos esperar que os alunos ainda adotem a concepção linear de volume, mobilizando o teorema-em-ação errôneo segundo o qual o volume de um sólido se altera na mesma proporção que seus comprimentos, ou seja, se a aresta aumentar de 20%, então o volume também aumenta de 20%, respondendo a alternativa *a*.

Entretanto, poderá também responder a alternativa *c*, que, ao invés de elevar à terceira potência, desenvolve o princípio aditivo, somando o aumento das três arestas para encontrar o aumento do volume.

Poderá também errar no cálculo numérico e responder a letra *b*, elevando de maneira incorreta o aumento da aresta, que ao invés de ser  $(1,2 a)^3$ , eleva  $(0,2 a)$ , achando o valor de  $0,008 a^3$ , que para ele corresponde a 0,8%.

## 5 Análise dos resultados

Nas situações de comparação, observamos que, por ser estática, como no caso da questão 2, dos três sólidos formados por cubinhos de 1cm de aresta, é de mais fácil compreensão que na comparação dinâmica, como nas questões 1 e 3, como evidencia o quantitativo de acertos obtidos na Q2 superior ao observado nas questões 1 e 3. Tal resultado aponta para dificuldades em compreender volume ao modificar a forma do objeto, observada por Anwandter-Cuellar (2008). Ver o gráfico a seguir:



**Gráfico 1-** Situações de comparação  
Fonte: FIGUEIREDO (2013)

A primeira questão, que era uma situação de comparação que dependia do conhecimento sobre outras grandezas, como massa e densidade, foi a questão que obteve maior índice de respostas inadequadas (incluindo respostas certas com justificativas inadequadas e respostas erradas), 82,36%, e menor índice de acertos plenos, 7,84%. Dos que acertaram, 75% utilizaram como estratégia a fórmula de densidade e 25% utilizaram a

comparação de massas. Durante a entrevista pudemos observar a estratégia visual-perceptiva, pois estavam a sua disposição dois pedaços iguais de massa de modelar e um recipiente plástico transparente com água no seu interior, porém, não foi utilizada a imersão das massas. Outra estratégia utilizada durante a entrevista nessa questão foi a fórmula de densidade, relacionando massa e volume, como ilustra o trecho de entrevista a seguir:

*Esse aqui eu usei meio que o conceito de química, que densidade não é massa sobre volume?!..., ele diz que ia usar a mesma massa, então é a mesma densidade, como ia ser a mesma quantidade de massa, então o volume tinha que ser o mesmo. Eu botei assim.*(Aluno ERSO, entrevista)

Tal estratégia relaciona grandezas distintas: massa, densidade e volume, como foram também referenciados no trabalho de Oliveira (2002). A sua explicação dá indícios de que o sujeito compreende volume como grandeza.

O percentual elevado de respostas corretas (66,67%) na resolução da segunda questão mostra que os alunos mobilizam a transitividade da relação de ordem, colocando corretamente em ordem crescente de volume os sólidos dados. Dentre as questões do teste que obtiveram percentuais de acerto entre 50% e 75%, está a Q2, que, para comparar os volumes dos três sólidos, o aluno pode dispor de fórmulas ou contar cubinhos um a um, para obter as medidas de volume e em seguida ordenar essas medidas. Assim, sugere que talvez o elevado índice de acertos tenha sido devido às várias estratégias utilizadas pelos alunos para chegar aos resultados.

Observamos que a terceira questão, que trata da concepção de tridimensionalidade de volume, observado nos trabalhos de Barros (2002) e Anwandter-Cuellar (2008), foi a que obteve pior desempenho, entre as situações de comparação (baixo índice de resposta plenamente correta - 39,53% - e índice elevado de respostas erradas - 53,49%).

Segundo Vergnaud (1991), para a compreensão de volume como grandeza tridimensional, faz-se necessário a passagem da concepção aditiva de volume, como no caso da questão de contagem de cubinhos, para a concepção multiplicativa de volume, que é uma concepção mais difícil de ser mobilizada, como podemos observar diante dos resultados.

Nesta questão, Q3, dos alunos que erraram, onze alunos ainda adotam a concepção linear de volume, respondendo a alternativa *a*. Houve respostas *c*, em que, ao invés de elevar

à terceira potência, desenvolveram o princípio aditivo, somando o aumento das três arestas para encontrar o aumento do volume. Também houve erro no cálculo numérico respondendo a alternativa *b*, elevando de maneira incorreta o aumento da aresta, que ao invés de ser  $(1,2 a)^3$ , eleva  $(0,2 a)$ , achando o valor de  $0,008a^3$ , que corresponde a 0,8%, fato este observado em quatro protocolos.

Dos 17 alunos que acertaram, 10 elevaram à terceira potência e 7 consideraram um valor para cada aresta, desenharam o sólido e aumentaram 20%, calculando assim o volume, mostrando a importância da representação geométrica do sólido para auxiliar na resolução da questão. Ver figura 1.

) Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado:

a) 20%  
b) 0,8%  
c) 60%  
 d) 72,8%  
e) OUTROS

Justifique sua resposta:

$$1000 = 100\%$$

$$1728 = x$$

$$x = \frac{1728 \cancel{\phi\phi}}{100\cancel{\phi\phi}}$$

$$x = 172,8\%$$

↓  
aumento de  
72,8%

Figura 1- Extrato do protocolo do aluno ERI- Atividade Q3  
Fonte: FIGUEIREDO (2013)

Os alunos utilizaram a estratégia de medida e comparação de medida em todos os casos, porém 58,82% dos alunos que acertaram a Q3 utilizaram o aumento da aresta elevado à terceira potência, como esperado na análise a priori. A fórmula de volume do paralelepípedo

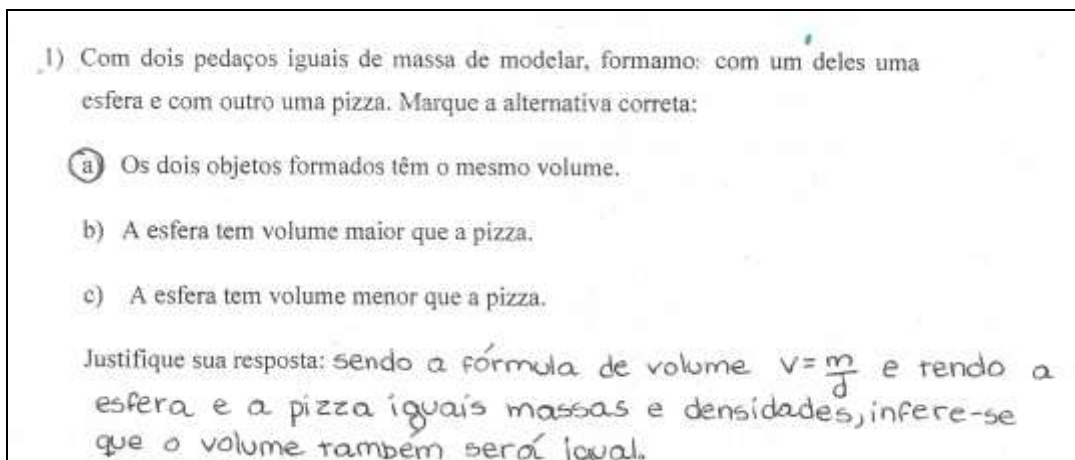
foi utilizada como instrumento de medida e comparação da medida em todas as resoluções corretas.

Podemos observar indícios de vários teoremas-em-ação possivelmente mobilizados pelos alunos diante das respostas dadas para cada situação. Eles permitem interpretar procedimentos corretos, mesmo que os sujeitos não sejam capazes de explicar, e também erros. Para isso, foi preciso explicitar através de codificação os teoremas-em-ação corretos do ponto de vista da Matemática acadêmica e os que não são. Assim, codificamos TAC os teoremas-em-ação corretos do ponto de vista da Matemática acadêmica e denominamos TAE para teoremas-em-ação errôneos do ponto de vista da Matemática acadêmica. Desta forma listamos os teoremas-em-ação mobilizados pelos alunos na resolução das questões do teste e durante as entrevistas.

TAC 1: *“Sólidos de mesma massa e mesma densidade têm mesmo volume”*

Na situação de comparação, em que eram comparados dois pedaços de massa de modelar modificados em uma esfera e o outro numa pizza, obtivemos como justificativas: *“se a massa é igual e provavelmente tem a mesma densidade, então terá o mesmo volume”*, (Protocolo do aluno LAM), *“mesmo material, mesma medida, apenas dimensões diferentes”*(Protocolo do aluno JS, Figueiredo, 2013), o que podemos observar em tais protocolos é que os alunos compreendem o princípio de conservação de volume relacionado com a invariância da massa e da densidade do objeto, como observado no trabalho de Barros (2002). O protocolo a seguir é um exemplo de resolução interpretada por nós como mobilização de TAC 1:





**Figura 2-** Extrato do protocolo do aluno SAC- Atividade Q1  
**Fonte:** FIGUEIREDO (2013)

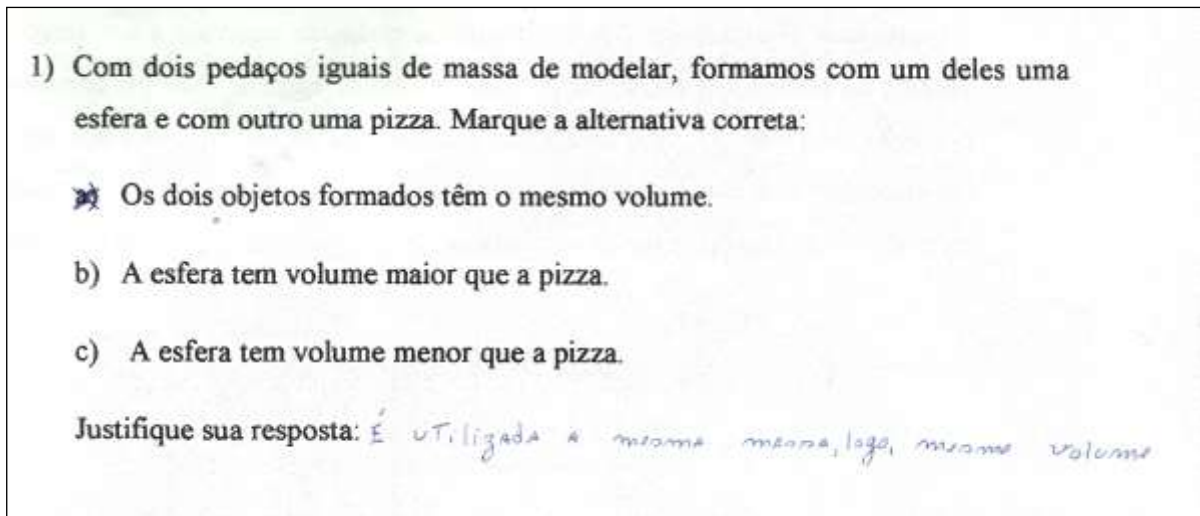
Segundo Oliveira (2007), a compreensão do conceito de densidade é importante para a aquisição do conceito de volume. Desta forma, a mobilização de TAC 1 dá indícios de compreensão das relações entre volume e outros conceitos.

TAE 1: “*Sólidos diferentes têm necessariamente volumes diferentes*”

Em algumas respostas da primeira questão, identificamos a dependência de volume com a forma do objeto, justificando ser a forma do objeto responsável pela conservação ou não do volume dos objetos formados, segundo a justificativa: “*Pois a pizza também tem a forma de uma esfera, sendo assim, ambos terão o mesmo volume*” (Protocolo do aluno LMSP, Figueiredo, 2013). Entre as respostas corretas, justificativas erradas, relacionando a forma do objeto com a conservação do volume: “*Porque eles possuem formas semelhantes*” (Protocolo do aluno BMBS, Figueiredo 2013), relacionando volume com o tamanho do objeto: “*tem o mesmo volume, pois os dois objetos têm os mesmos tamanhos, ou seja, são iguais, só que em formas diferentes*” (Protocolo do aluno LES, Figueiredo, 2013), o que mostra que o princípio de conservação de volume em relação à conservação da densidade e da massa do objeto ainda não está bem esclarecido ao aluno.

TAE 2: “*Se dois sólidos tem a mesma massa, então tem o mesmo volume.*”

Observe o protocolo a seguir que mostra como esse teorema-em-ação TAE 2 foi mobilizado:

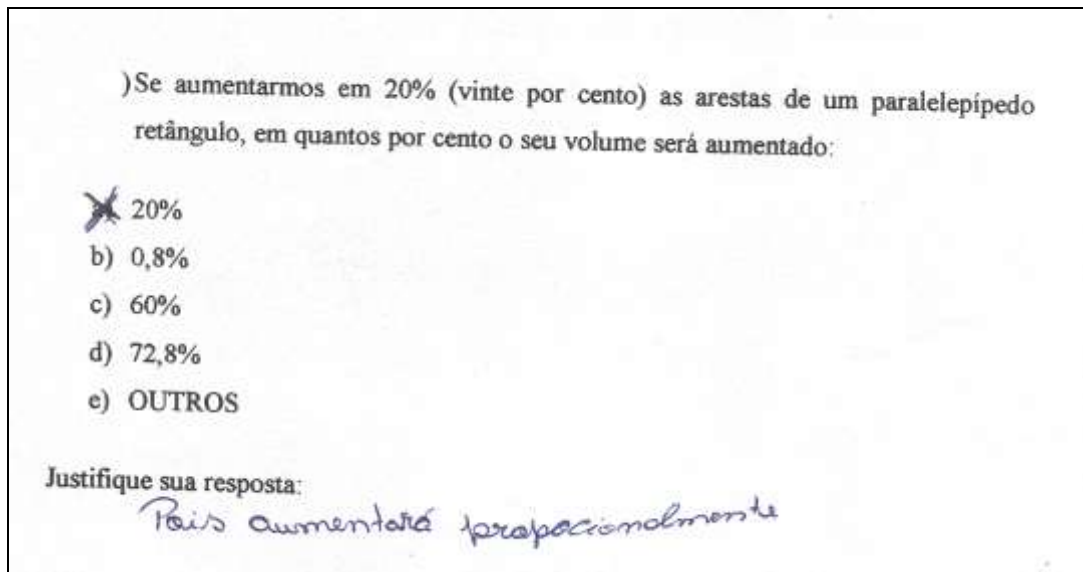


**Figura 3-** Extrato do protocolo do aluno RBM- Atividade Q1  
**Fonte:** FIGUEIREDO (2013)

O que levou ao índice elevado de erros nesta questão, 82,36%, foi os alunos terem justificado a alternativa correta desta forma representada no protocolo acima, dando indícios da mobilização desse teorema-em-ação TAE 2. Fato este também observado no trabalho de Barros (2002).

TAE 3: “*O volume de um sólido se altera na mesma proporção que seus comprimentos.*”

Em outra situação de comparação, em que havia a necessidade de compreensão da trilinearidade do volume, dos 25 alunos que erraram, onze alunos ainda adotam a concepção linear de volume, desenvolvendo o teorema-em-ação errôneo de que o volume é alterado na mesma proporção que o comprimento da aresta, como, por exemplo, no protocolo a seguir:



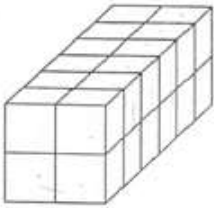
**Figura 4-** Extrato do protocolo do aluno RAS- Atividade Q3  
**Fonte:** FIGUEIREDO (2013)

O aluno, ao mobilizar o teorema-em-ação TA3E, não percebe que “volume é uma função trilinear com relação ao comprimento de suas arestas que partem de um mesmo vértice (comprimento, largura e altura)”. (BARROS, 2002, P.94)

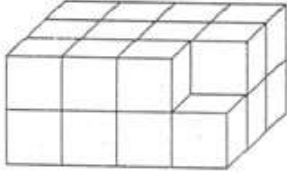
Em se tratando de volume, havia situações em que o aluno poderia representar a unidade de medida de volume em dois tipos: cubinhos ou o  $\text{cm}^3$ . Como é o caso da segunda questão, em que a maioria (31 alunos) não representou a unidade de medida de volume, também observada na pesquisa de Anwandter-Cuellar (2008). Todavia, podemos verificar a presença das duas unidades de medida: cubinhos e o centímetro cúbico, em alguns protocolos. Observe figura a seguir.

Os sólidos abaixo, são compostos por cubinhos de 1cm de aresta, sabendo que na parte escondida do desenho, não há cubinhos faltando nem sobrando. Compare o volume dos sólidos abaixo e responda a alternativa correta:

$6 \times 4 = 24$  cubinhos  
 $\times 1 \text{ cm}^3$   
 $\hline 24 \text{ cm}^3$

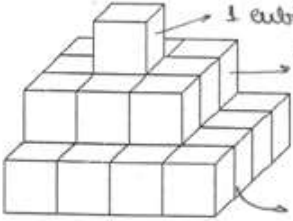


SÓLIDO A




SÓLIDO B

$8 \times 2 + 7 \rightarrow 16 + 7 \rightarrow 23$  cubinhos  
 $\times 1 \text{ cm}^3$   
 $\hline 23 \text{ cm}^3$



SÓLIDO C

$1$  cubinho  
 $+$   
 $9$  cubinhos  
 $+$   
 $16$  cubinhos  
 $\hline 26$  cubinhos  $\times 1 \text{ cm}^3 \rightarrow 26 \text{ cm}^3$

  $\rightarrow V = 1 \text{ cm}^3$

a)  $V_a = V_b = V_c$   
 b)  $V_a < V_b < V_c$   
 c)  $V_a > V_b > V_c$   
 d)  $V_a = V_b > V_c$   
 OUTROS

Justifique sua resposta:  
 $V_b < V_a < V_c$

**Figura 5-** Extrato do protocolo do aluno ARFR- Atividade Q2  
**Fonte:** FIGUEIREDO (2013)

A presença e o uso pertinente de unidades de medida de volume remetem a conhecimentos do campo das grandezas, também observada por Anwandter-Cuellar (2008). O fato de reconhecer duas unidades de volume, uma unidimensional (cubinhos) e outra tridimensional ( $\text{cm}^3$ ), foi discutido nos estudos de Oliveira (2002) e Barros (2002).

## 6 Considerações finais

Os sujeitos dessa pesquisa tiveram melhor desempenho nas situações de comparação estáticas, em que o sólido não é deformado, nem se troca a sua posição no espaço, do que as situações de comparação dinâmicas. A fórmula do volume de um prisma também é utilizada para comparar as medidas encontradas.

Os alunos do Ensino Médio apresentam dificuldades em situações que exigem o conhecimento sobre o conceito de trilinearidade e a passagem da concepção aditiva para a concepção multiplicativa, necessários para a compreensão de volume.

Os alunos do Ensino Médio parecem compreender melhor situações de volume em que o aspecto numérico está em jogo. Diante de situações em que necessitam dissociar e articular os quadros numérico, geométrico e das grandezas, como nas situações de comparação, apresentam dificuldades, quer seja no campo numérico, quer seja no campo geométrico ou no campo das grandezas. Além do mais, ao resolver situações relativas à comparação de volume, o aluno mobiliza outros conceitos interligados, como de massa, de densidade, de dimensão.

## Referências

- ANWANDTER-CUELLAR. **Étude de conceptions d'élèves à propos du concept de volume**. 2008. 96 f. Dissertação (Mestrado em história, filosofia e didática das ciências) - Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique, Education et Formation. Université Montpellier 2, Montpellier, França. 2008.
- BALTAR, P. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surface planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège**. 1996. 352 f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) - Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.
- BARROS, José Severino de. **Investigando o conceito de volume no ensino fundamental: um estudo exploratório**. 2002. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE. 2002.
- BRASIL. **Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, DF, 20 de dezembro de 1996. Disponível em: <<http://www.jusbrasil.com.br/legislacao/anotada/2701001/art-35-da-lei-de-diretrizes-e-bases-lei-9394-96>>. Acesso em: 15 jan. 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática / Brasília, 2011**.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**. Dordrecht, the Netherlands, v. 20, n. 4, p. 387-424, 1989.

FIGUEIREDO, A. P. N. B. **Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do ensino médio**: um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais. 2013. 189 f. Dissertação (Mestrado em educação matemática e tecnológica) - Programa de pós-graduação de educação matemática e tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2013.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências [online]** (UFRGS), Porto Alegre, v. 7, n.1, 2002. Disponível em: [http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo\\_ID80/v7\\_n1\\_a2002.pdf](http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf). Acesso em: 12 dez. 2012.

OLIVEIRA, G. R. F. **Construção do Conceito de Volume no Ensino Fundamental**: um estudo de caso. 2002. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE. 2002.

OLIVEIRA, G. R. F. **Investigação do papel das grandezas físicas na construção do conceito de volume**. 2007. 169 f. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE. 2007.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Genoble, v.10, n. 2 p. 133-170. 1991.

**Submetido em Junho de 2013.**  
**Aprovado em Setembro de 2013.**