



# Los Recorridos de Estudio e Investigación en la Escuela Secundaria: resultados de una implementación

## The Study and Research Course (SRC) in the Secondary School: results of an implementation

Verónica Parra\*

María Rita Otero\*\*

María de los Ángeles Fanaro\*\*\*

### Resumen

Este trabajo presenta resultados parciales de una investigación cuyo objetivo es diseñar, implementar y analizar las condiciones de posibilidad en la escuela secundaria, de una enseñanza de la Matemática basada en Recorridos de Estudio e Investigación (REI). La implementación se realizó durante un año completo, en un curso del último año del nivel secundario (17-18 años) durante las clases habituales, sin recurrir a actividades escolares

---

\* Licenciada en Educación Matemática. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT), Departamento de Formación Docente, Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Dirección postal: NIECyT, Departamento de Formación Docente, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA. Pinto 399, (7000) Tandil, Buenos Aires, Argentina. *E-mail:* vparra@exa.unicen.edu.ar

\*\* Doctor en Enseñanza de las Ciencias. Universidad de Burgos, España. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT), Departamento de Formación Docente, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Investigador Independiente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Dirección postal: NIECyT, Departamento de Formación Docente, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA. Pinto 399, (7000) Tandil, Buenos Aires, Argentina. *E-mail:* rotero@exa.unicen.edu.ar

\*\*\* Doctor en Enseñanza de las Ciencias. Universidad de Burgos, España. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT), Departamento de Formación Docente, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Investigador Asistente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Dirección postal: NIECyT, Departamento de Formación Docente, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA. Pinto 399, (7000) Tandil, Buenos Aires, Argentina. *E-mail:* mfanaro@exa.unicen.edu.ar

paralelas al curso. Las preguntas del REI se refieren al área de la Microeconomía, específicamente, al punto de equilibrio de un modelo simple de oferta y demanda de un bien determinado. Se adoptó como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y se utilizaron los conceptos de REI y las dialécticas introducidas por Chevallard (2001, 2007). Se describió el proceso, analizando el funcionamiento de las dialécticas que permiten gestionar el REI, sus ventajas y sus desventajas.

**Palabras-clave:** Teoría Antropológica de lo Didáctico. Recorridos de Estudio e Investigación. Dialécticas de Estudio. Escuela Secundaria. Modelo Simple de Oferta y Demanda.

### Abstract

This paper presents partial results of research that aimed to design, carry out and analyze the possibility of teaching mathematics based on the Study and Research Courses (SRC) in the secondary school. The implementation was carried out during one year, in a classroom of the last year of the secondary level (17-18 years old) during the normal classes, without realizing parallel classes. The questions of the SRC are related to the Microeconomics area, specifically to the point of balance of the simple supply-and-demand model. The Anthropological Theory of the Didactic (ATD) was adopted as a framework and the concepts of SRC and the dialectics introduced by Chevallard (2001, 2007) were used. The process is described analyzing the functioning of the dialectic developed to manage the SRC and their advantages and disadvantages.

**Keywords:** Anthropological Theory of the Didactic (ATD). Study and Research Course (SRC). Dialectics of study. Secondary School. Simple model of the offer and demand.

## 1 Introducción y presentación del problema

En la actualidad, la enseñanza de la Matemática en la escuela secundaria se reduce al estudio de un conjunto de *obras muertas*, carentes de sentido y sin razón de ser. Estas obras son estudiadas en el sistema de enseñanza como si fueran transparentes e incuestionables, dotadas de sentido por sí y para sí mismas. Esta manera de enseñar Matemática está fuertemente vinculada al fenómeno que Chevallard (2004, p.4) ha dado en llamar “monumentalización de saberes”. Los estudiantes son conducidos a *visitar*, admirar y venerar estos cuerpos de saberes como si se tratara de un monumento, del que no pueden apropiarse. Chevallard (2007) ha propuesto una manera completamente diferente de enseñar matemática, que exigiría cambios radicales en la pedagogía dominante, es la llamada “pedagogía de la investigación” o del “cuestionamiento del mundo”. Esta pedagogía promueve una “enseñanza por Recorridos de Estudio e

Investigación” (REI) (CHEVALLARD, 2004, p.7). Los REI suscitan una reconstrucción funcional de la matemática como respuesta a ciertos tipos de situaciones problemáticas, y sitúan las preguntas como punto de partida del saber matemático. Realizar una enseñanza por REI exige hacer vivir la modelización matemática en los sistemas de enseñanza dotando de sentido y de legitimidad funcional, cultural y matemática a las preguntas que se estudian.

Este trabajo forma parte de una investigación cuyo objetivo es diseñar, implementar y analizar las condiciones de posibilidad de inclusión en la escuela secundaria, de una enseñanza de la Matemática basada en Recorridos de Estudio e Investigación (REI). Presentamos aquí los resultados obtenidos al implementar un posible REI en un curso del último año del nivel secundario (17-18 años).

## **2 Antecedentes de enseñanzas por recorridos de estudio e investigación**

Los trabajos de Barquero (2009) y Serrano, Bosch y Gascón (2007) proponen, implementan y analizan enseñanzas por REI en la Universidad, en cursos paralelos a los tradicionales de Matemática. En la Escuela Secundaria, los trabajos de García et al. (2005) y Fonseca, Pereira y Casas (2011) proponen organizar la enseñanza de la Matemática partiendo de preguntas, aunque no llegan a satisfacer las características esenciales de los REI. En la educación infantil, Ruiz-Higueras y García García (2011) describieron y analizaron una enseñanza por REI con un grupo de alumnos de 3 a 6 años. Estos trabajos fueron y son realizados en España. Los correspondientes a la escuela secundaria y a la universidad fueron realizados en cursos denominados *Taller de Modelización Matemática*, llevados a cabo en forma paralela a los cursos usuales de Matemática. En la Argentina, los trabajos de Gazzola, Llanos y Otero (2011); Llanos y Otero (2011, 2012); Llanos, Otero y Bilbao (2011) y Otero y Llanos (2011) abordaron una enseñanza por REI dentro de cursos usuales de Matemática en la Escuela Secundaria, partiendo de una pregunta generatriz, referida al estudio de funciones asociadas a las posibles operaciones y las diferentes curvas que se elijan. Otros trabajos pioneros en el marco de la TAD, describieron las praxeologías matemáticas y didácticas involucradas en determinados procesos de estudio en la secundaria y la universidad, donde no se realizaba una enseñanza por REI (BOSCH; ESPINOZA; GASCÓN, 2003; LIMA et al., 2010; PARRA, 2008; PARRA; OTERO, 2009, 2010; PARRA; OTERO; FANARO, 2009).

La investigación de las condiciones de posibilidad de una enseñanza por REI en la escuela secundaria sin crear dispositivos especiales, está poco desarrollada, en general, y prácticamente ausente en la Argentina. Este trabajo lleva a cabo todas las etapas de una enseñanza por REI, partiendo de preguntas generatrices referidas a la Microeconomía, específicamente a los modelos de oferta y demanda de un determinado bien (PARRA; OTERO; FANARO, 2011, 2013). En una primera fase de la investigación analizamos en profundidad los modelos de oferta y de demanda en el área de la Microeconomía, y luego consideramos posibles caminos por recorrer y las praxeologías matemáticas que estos caminos permitirían *cubrir*. La implementación se realizó en un curso de matemática habitual, es decir, sin crear clases especiales paralelas.

### 3 Marco teórico

Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) son un tipo de dispositivo didáctico definidos en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (CHEVALLARD, 1999, 2004, 2009). Los REI, como ya lo mencionamos, colocan preguntas Q como punto de partida del saber. El estudio de Q debe ser realizado por un equipo de alumnos X dirigidos por un equipo de profesores Y. Esto provoca la emergencia de un sistema didáctico de la forma  $S(X; Y; Q)$ . El funcionamiento de este sistema didáctico produce entonces una respuesta R a la pregunta Q, esto es, un fragmento de una organización de saber en construcción. Es decir, el saber surge como respuesta a una pregunta, con un sentido y una razón de ser. Esto da lugar a los REI codisciplinarios, donde pueden intervenir una disciplina, dos disciplinas o más, dependiendo de la naturaleza de la pregunta. Las características esenciales de los REI son las siguientes:

- Los REI permiten la emergencia y desarrollo de relaciones funcionales con el saber, introduciendo la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo, que se opone a la pedagogía actual dominante, la de *enumerar saberes* – esta pedagogía se refiere a estudiar obras (saberes) sin un sentido, sin una *razón de ser*, sin saber a qué preguntas responden;

- Los REI se generan por una pregunta Q viva y rica con un fuerte poder generador, denominada pregunta generatriz, es decir, capaz de imponer numerosas preguntas derivadas. La búsqueda de respuestas a estas preguntas debería conducir a la construcción de un gran número de saberes de diversas disciplinas. Así, una pregunta generatriz y sus derivadas tendrían que permitir *recorrer* el programa de estudios propuesto en un curso, o al menos, una buena parte de él;

- Los REI evitarían la atomización de la matemática que se enseña en muchas instituciones escolares, e impedirían la pérdida de sentido y del origen de las preguntas que allí se estudian. Esta función de los REI permite que la modelización matemática esté presente en los Sistemas de Enseñanza;
- Los REI permiten un proceso de modelización en cinco tiempos: observar las respuestas existentes; analizar esas respuestas; evaluarlas; desarrollar una nueva respuesta, y finalmente, defender esa nueva respuesta producida;
- Los REI demandan que estos tiempos del estudio sean llevados a cabo en un espacio de trabajo estructurado por las dialécticas: dialéctica del paracaidista y de las trufas, dialéctica de entrar y salir de tema, dialéctica de las cajas negras y las cajas claras, dialéctica de la excripción y de la inscripción, dialéctica de la conjetura y de la prueba, dialéctica de la producción y la recepción, dialéctica del individuo y del conjunto, y la dialéctica de preguntas y respuestas. Cada una de estas dialécticas se explicarán en la sección 3.3.

### 3.1 Estructura de los REI

Tal como lo mencionamos anteriormente, el hecho de colocar las preguntas  $Q$  como punto de partida del saber supone la emergencia de sistemas didácticos de la forma  $S(X;Y;Q)$  cuyo funcionamiento engendra una respuesta  $R$  a la pregunta  $Q$ . Es decir, el grupo de alumnos ( $X$ ) con la ayuda del profesor ( $Y$ ) aportará una respuesta  $R$  a una cuestión  $Q$ . Chevallard (2009) propone la estructura de los REI a partir del esquema herbartiano – el calificativo utilizado aquí remite al filósofo y pedagogo alemán Johann Friedrich Herbart (1776-1841). En su forma reducida, este esquema se escribe como  $S(X; Y; Q) \rightsquigarrow R^\heartsuit$ . El exponente  $\heartsuit$  colocado en  $R^\heartsuit$  indica que la respuesta  $R$  a la cuestión  $Q$  fue producida bajo ciertas limitaciones y *funciona* como respuesta a esa cuestión bajo esas limitaciones (esto es lo que indica la flecha  $\rightsquigarrow$ ) (CHEVALLARD, 2009).

La elaboración de  $R^\heartsuit$  a partir de la cuestión  $Q$  supone la *fabricación* del medio didáctico,  $M$ . Esto se expresa en el esquema herbartiano semi-desarrollado:  $[S(X; Y; Q) \rightsquigarrow M] \rightsquigarrow R^\heartsuit$ . Es decir, el sistema didáctico construye y organiza ( $\rightsquigarrow$ ) el medio  $M$  con el cuál engendrará o producirá ( $\rightsquigarrow$ ) una respuesta  $R^\heartsuit$ . Este esquema indica que la elaboración del medio  $M$  se articula de modo complejo con la elaboración de la respuesta  $R^\heartsuit$ . Esta observación se aplica el esquema herbartiano desarrollado, que se escribe así:  $[S(X; Y; Q) \rightsquigarrow \{R^{\circ}_1, R^{\circ}_2,$

...,  $R_n^\circ$ ,  $O_{n+1}, \dots, O_m$ }]  $\hookrightarrow R^\heartsuit$ . Donde  $M = \{R_1^\circ, R_2^\circ, \dots, R_n^\circ, O_{n+1}, \dots, O_m\}$ . Las entidades nombradas como  $R_i$  para  $i=1, \dots, n$  son respuestas *hechas*, por ejemplo, un libro, la Web, el curso de un profesor, etc.; las entidades  $O_j$  para  $j=n+1, \dots, m$  son otras obras, por ejemplo, teorías, montajes experimentales, praxeologías, etc. consideradas útiles para deconstruir las respuestas  $R^\circ$  y extraer de ellas lo necesario para construir la respuesta  $R^\heartsuit$ .

### 3.2 Mesogénesis, topogénesis y cronogénesis

Para que pueda llevarse a cabo una enseñanza por REI, es necesario que la organización didáctica posea un cierto número de condiciones relativas a las funciones didácticas, llamadas mesogénesis, topogénesis y cronogénesis. La mesogénesis es el proceso de *fabricación* del medio M. En un REI, el medio M no está *totalmente hecho o construido de antemano*. El medio M es construido por la clase a partir de las producciones diversas, tanto externas a la clase como internas a ella. Estas últimas, incluyen particularmente las respuestas propuestas por los alumnos a partir de su propia actividad. El medio M, conformado así por las distintas  $R^\circ$  y las obras disponibles O, debe permitir desarrollar las diferentes dialécticas, en este caso, la dialéctica media-medio.

La condición mesogenética puesta en marcha en una enseñanza por REI ocurre junto con una condición propia de la topogénesis: la construcción del medio M es un producto de la clase, no solo del profesor. En el idioma griego, *topos* significa *lugar*: el *topos* de cada alumno es entonces el *lugar de cada alumno*, su *sitio*, el lugar donde experimenta la sensación de desempeñar, en la realización de una tarea determinada, *un papel a gusto para él*. En el caso de una clase, no sólo se hablará del *topos* del alumno, sino, también, del *topos* del profesor. Por ejemplo, en una clase de matemáticas, la tarea de producir por escrito una solución a un problema es considerada perteneciente al *topos* de los alumnos, mientras que la tarea de construir el enunciado de ese problema, corresponde al *topos* del profesor. (CHEVALLARD, 1999).

En un REI, el *topos* de los alumnos en la clase debe sufrir una extensión considerable: no solamente un alumno podrá aportar su respuesta personal, sino que también podrá proponer introducir en M cualquier obra que desee, y que considere pertinente para la elaboración de  $R^\heartsuit$ . A este cambio en el *topos* de los alumnos corresponde un cambio importante en el *topos* del profesor, pues es el profesor quien decidirá, en última instancia, explicitando las razones, si la clase incorporará o no en su medio de estudio a cierta obra. La respuesta que puede

aportar el profesor será considerada como una de las respuestas R. La cronogénesis es lo que distingue a los REI de cualquier otro dispositivo didáctico, porque la *fabricación* del medio M genera una dilatación del tiempo didáctico y una extensión del tiempo de reloj (CHEVALLARD, 2009).

### 3.3 Las dialécticas en la Teoría Antropológica de lo Didáctico

Realizar una enseñanza por REI implica poner en funcionamiento maneras de hacer o *gestos del estudio y de la investigación* denominados *dialécticas*. Chevallard (2001, 2007) establece las siguientes dialécticas, para poner en marcha, *pilotear*, organizar y a la vez describir el proceso de estudio.

La *dialéctica del paracaidista y de las trufas* tiene sus orígenes en los términos *paracaidistas* y *buscadores de trufas*, acuñados por el historiador francés Emmanuel Le Roy Ladurie. Por un lado, los paracaidistas realizan una exploración en extensas áreas del territorio mientras los buscadores de trufas, sacan a la luz tesoros enterrados:

Los buscadores de trufas hurgan en torno a sí con las narices metidas en la tierra, a la búsqueda de algún prolijo y preciado hecho; en tanto que los paracaidistas descienden en medio de las nubes, inspeccionando el panorama de todo la campaña, pero desde una altura tan elevada que no alcanzan a percibir con claridad nada en detalle (STONE, 1990, apud ALVAREZ, 1990, p.99).

Estas metáforas aluden a la condición de exploradores que asumen los actores del sistema didáctico durante un REI, quienes toman una gran distancia del problema y exploran el terreno desde muy arriba, para lo cual, se requiere incorporar el gesto de *inspeccionar zonas de gran alcance*. Pero tal inspección, difícilmente encuentra de inmediato lo que se busca, y requiere de gestos de acercamiento y enfoque sobre el terreno, para analizar la utilidad de lo encontrado, lo cual posibilita hallar cosas *inesperadas*, que pueden resultar *semillas* que permitirán progresar en la investigación y en algunos casos, obtener respuestas parciales a la pregunta. Esta dialéctica pone en acto una manera de proceder totalmente contraria a la idea de inmediatez y a su consecuencia directa: la trivialización de las preguntas y de las soluciones, que suele ser habitual en las clases de matemática, donde las respuestas se presentan como inmediatas, predigeridas y *viven* a lo sumo, una clase.

La *dialéctica de entrar y salir de tema* se refiere a que en el transcurso de un REI, se buscan respuestas en *sentido fuerte* a una pregunta permitiendo salirse del tema al que inicialmente pertenece dicha pregunta, incluso hasta la posibilidad de salirse de la disciplina de referencia, para reingresar posteriormente. Las preguntas generatrices que pueden dar lugar a recorridos amplios de estudio e investigación, pocas veces pueden circunscribirse en el ámbito limitado de un único sector o incluso una única disciplina (CHEVALLARD, 2007).

La *dialéctica de las cajas negras y las cajas claras* se refiere al proceso según el cual se establece qué conocimiento es pertinente y merece ser aclarado, analizado etc., mientras se dejan, si es necesario, ciertos saberes a enseñar en un *nivel de gris* (CHEVALLARD, 2007). Así, quedan en *gris*, ciertos saberes que no son necesarios para responder la pregunta generatriz o sus preguntas derivadas. Esta dialéctica se opone al hábito escolar que, en general, aspira a una claridad completa.

La *dialéctica de la excripción y de la inscripción* se refiere a evitar la transcripción formal de respuestas parciales ya existentes, respuestas que tienen sentido y son consideradas pertinentes porque pueden conducir a la construcción de la respuesta buscada, pero no necesariamente deben ser transcriptas. Se trata entonces de tomar la parte útil, el sentido de estas respuestas parciales y re-escribirlas en notas de síntesis, glosarios, etc. (CHEVALLARD, 2007).

La *dialéctica de la conjetura y de la prueba* inicialmente se refiere a que el saber construido en un REI y considerado producto de una conjetura, debe ponerse a prueba. Posteriormente, esta dialéctica adoptó el nombre de *medio-media*. Un *media* es cualquier sistema que emite mensajes en dirección a ciertos públicos (como por ejemplo, un diario, un programa de televisión, el curso del profesor, un tratado sabio etc.). En la TAD se entiende al *medio* de manera similar a como lo hace la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau.

La *dialéctica de la conjetura y de la prueba* inicialmente se refiere a que el saber construido en un REI y considerado producto de una conjetura, debe ponerse a prueba. Posteriormente, esta dialéctica adoptó el nombre de *medio-media*. Un *media* es cualquier sistema que emite mensajes en dirección a ciertos públicos (como por ejemplo, un diario, un programa de televisión, el curso del profesor, un *tratado* sabio, etc.). En la TAD se entiende al *medio* de manera similar a como lo hace la Teoría de las Situaciones Didácticas de



Brousseau. La actividad de modelización matemática, que es esencial en una enseñanza por REI, sólo puede desarrollarse si los estudiantes disponen de algunas respuestas ya establecidas, con las cuales pueden elaborar respuestas provisionales, siendo los diferentes medios de comunicación y difusión la vía de acceso a las primeras.

La *dialéctica de la producción y la recepción* se refiere a la gestión del proceso que conduce a difundir y defender la respuesta desarrollada por la comunidad de estudio. Los saberes no son importantes *per se* – monumentalismo –, sino por el tipo de respuestas que permiten aportar. Se trata de un saber que es el producto de la actividad matemática de la comunidad de estudio.

La *dialéctica del individuo y del conjunto* consiste en el estudio y la investigación colectiva de la pregunta problemática que se ha planteado, que a su vez exige repartir las responsabilidades y asignar tareas individuales, para volver a incorporarse a un proceso colectivo, para dar una respuesta. Integrar la modelización matemática en la actividad matemática escolar requiere potenciar el papel de la comunidad de estudio junto con el papel del profesor como director del proceso. ¿Quién es ahora el *actor del estudio*? No es el individuo, sino la comunidad. El estudio conjunto -en comunidad- de las preguntas, es lo que permite defender las respuestas que esta comunidad produce, en lugar de aceptar la imposición de las respuestas *oficiales* admitidas por la institución escolar. La dialéctica de preguntas y respuestas está en el corazón de una enseñanza por REI. Se refiere al hecho de que toda búsqueda genuina y no simulada de respuestas a las preguntas, genera nuevas preguntas que la comunidad de estudio decidirá cuándo y cómo se van a responder.

#### **4 Preguntas de la investigación**

¿Qué características en términos de dialécticas, tiene el proceso de estudio del grupo de alumnos considerado durante una enseñanza por REI?  
¿Qué características en términos de topogénesis, mesogénesis y cronogénesis tiene este proceso de estudio?

#### **5 Metodología de la investigación**

Se trata de una investigación cualitativa, de tipo etnográfica y de carácter exploratorio, cuyo objetivo es describir cómo se desarrolla el proceso de estudio en un curso de Matemática usual, correspondiente al último año del nivel

secundario, cuando se realiza una enseñanza por Recorridos de Estudio y de Investigación (REI). El curso fue seleccionado por muestreo intencional y estaba compuesto por 28 alumnos (17-18 años) conformando 6 grupos. Se trata de un caso que es representativo pues reúne las características de una clase. Se decidió implementar en un curso pues el investigador permaneció en el campo durante todo el ciclo escolar, desde el primer día de clases. A cada grupo de alumnos (G) se le asignó un número del 1 al 6 (G1, G2, G3, G4, G5 y G6) y, a su vez, cada alumno-miembro (A) del grupo se le asignó un número (desde A1 al A28). Los protocolos presentados en este trabajo corresponden a representantes prototípicos de los grupos. El profesor introducía las preguntas, cada grupo de alumnos tenía la tarea de aportar una respuesta, comunicarla y defenderla ante el resto. Las preguntas que surgían en los distintos grupos de alumnos eran consideradas por la comunidad de estudio y también debían responderse.

El investigador fue el director de este proceso de estudio, durante el ciclo escolar 2011, realizando observación participante, tomando notas de campo, registrando todo el desarrollo de las clases en audio y recolectando las producciones de los alumnos. Las clases se realizaban en dos sesiones semanales de 2 horas cada una. Es importante mencionar que la implementación del REI se realizó desde el primer día del ciclo lectivo 2011. Es decir, los estudiantes no sabían con qué nociones matemáticas o organizaciones matemáticas podrían responder las preguntas planteadas. Las preguntas generatrices del REI se refieren a la Microeconomía y, más específicamente, al comportamiento de las leyes de oferta y demanda de mercado. Describiremos aquí el recorrido de estudio e investigación cuyas preguntas generatrices son: ¿cómo hallar el punto de equilibrio? y ¿cómo y cuánto variará el punto de equilibrio? bajo las hipótesis de equilibrio alcanzable y la linealidad de las funciones de oferta y de demanda.

Llevar a cabo una enseñanza por REI modifica fuertemente las acciones al nivel de la topogénesis, cronogénesis y mesogénesis. Respecto a la topogénesis, para posibilitar el desarrollo de REI y su ecología, se redistribuyeron las responsabilidades de los alumnos y del profesor. El profesor no aportó respuestas a las preguntas planteadas permitiendo que los alumnos asuman su papel en la construcción de respuestas y plantearan nuevas preguntas. Los alumnos debían hacerse cargo de las preguntas y comprometerse con la elaboración de respuestas genuinas y no simplemente buscando información. Con relación a la cronogénesis, una enseñanza por REI requiere un período de tiempo superior a los de una enseñanza tradicional.

## 6 Análisis de resultados de la implementación del REI

Se ha desarrollado un REI cuyas preguntas e hipótesis de partida ( $H_0$ ,  $H_1$  y  $H_2$ ) permiten construir y analizar las variaciones de un modelo lineal de oferta y de demanda, donde las ecuaciones dependen únicamente del precio del bien ( $p$ ) y de las cantidades del mismo (siendo  $Q_d$  la cantidad demanda y  $Q_s$  la cantidad ofrecida). Estas hipótesis, no se explicitaron al grupo de alumnos como tales, sino que fueron consideradas durante las primeras fases de la ingeniería didáctica, específicamente, cuando se diseñó el recorrido implementado. Las hipótesis son:

$H_0$ : Existe el estado de equilibrio y es accesible.

$H_1$ : El equilibrio en el mercado se alcanza si y solo si la demanda excedente es cero. Esto es:

$Q_d - Q_s = 0$ , siendo  $Q_d$  la función de demanda (cantidad demandada de mercancía) y  $Q_s$  la función de oferta (cantidad ofrecida de la mercancía).

$H_2$ : Las funciones  $Q_s$  y  $Q_d$  son lineales y dependen de una única mercancía.

Cada grupo de alumnos debía aportar una respuesta a las siguientes preguntas formuladas por el profesor:

$Q_1$ : Supongamos que se están elaborando sorrentinos de jamón y queso con la intención de venderlos y de recaudar dinero para la fiesta de egresados y/o para el viaje. De un ensayo de ventas previo se obtuvo la información ofrecida en las tablas siguientes:

Cantidad ofrecida (en docenas)	Precio por docena (en \$)
155	10 330
307	18 250
98	7 270

Cantidad demandada (en docenas)	Precio por docena (en \$)
7	
15	
13	

¿Cómo podemos determinar a qué precio por docena no se estaría perdiendo ni ganando dinero? ¿Qué modelo lineal permitiría estudiar el comportamiento de la oferta y demanda en este mercado de sorrentinos?

**Cuadro 1** – Primera pregunta planteada a los grupos de estudio.

Fuente: datos de la investigación.

Para responder a estas preguntas, y a las siguientes, los alumnos tienen que inspeccionar *zonas de gran alcance*, de la matemática y de la microeconomía, para determinar y decidir qué de específico y qué *semillas* aportan a la respuesta, esto es, hacer funcionar la dialéctica del *paracaidista* y *de las trufas*. Los alumnos investigaron las leyes de oferta y de demanda en el campo de la microeconomía, el punto de equilibrio, la manera de hallarlo (precio y cantidad de equilibrio) y cómo construir el modelo de mercado de un único

bien. Así, se genera un REI bi-disciplinar con una *salida* al área de la microeconomía y también al área de la matemática, pues para construir el modelo, debió estudiarse como hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos y como construir y resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Luego, los alumnos debieron volver a la pregunta inicial y construir el modelo que les permitió determinar a qué precio debían venderse el bien y en qué cantidad, para estar en equilibrio. Estos procesos pueden inscribirse en el funcionamiento de la dialéctica de *entrar y salir del tema* y también de las cajas negras y *cajas claras*, pues el grupo decidió cuánto estudiar -en qué nivel de *gris*- acerca de las leyes de oferta y de demanda, de las rectas y de los sistemas de ecuaciones.

Como se considera una única mercancía, sólo es necesario incluir tres variables en el modelo: la cantidad demandada de la mercancía (simbolizada por  $Q_d$ ), la cantidad ofrecida (simbolizada por  $Q_s$ ) y su precio (simbolizado por  $p$ ). Con estas tres variables pueden construirse dos modelos diferentes: uno considera que las funciones de oferta y de demanda dependen del precio y el otro, supone que el precio depende de la cantidad demandada y de la cantidad ofrecida. Los modelos tendrán, respectivamente, la siguiente forma:

$$\begin{cases} Q_d = Q_d(p) \\ Q_s = Q_s(p) \\ Q_s = Q_d \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} p = p(Q_s) \\ p = p(Q_d) \\ Q_s = Q_d \end{cases}$$

El punto de equilibrio se obtiene resolviendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que en este caso, es lineal. La solución del sistema es el valor del precio y la cantidad del bien para el cual la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida. Las preguntas de la Microeconomía se respondieron a partir de consultas realizadas en Internet, en libros de economía y al profesor de economía. Esta actividad, dirigida a construir el medio a partir de una búsqueda múltiple de los elementos que se incorporarán a él, indica el funcionamiento de la dialéctica *media-medio*, pues, todas las respuestas preestablecidas que los alumnos encontraron en cualesquiera de los medios antes mencionados, ingresaron a la clase y se de-construyeron y reconstruyeron en la medida en que eran funcionales al medio, y pasaron a formar parte del mismo.

La Figura 1 y la Figura 2 presentan la resolución del alumno (A25), que se ha tomado como representante del grupo G3 (en estos protocolos y en los siguientes, se han introducido elipses coloreadas y comentarios agregados, a los efectos del análisis). Se aprecia la construcción del sistema considerando la cantidad ofrecida (Ver Figura 1) – y luego la cantidad demandada (Ver Figura

2) – como la variable dependiente y el precio, como la variable independiente. Luego, se escribió la ecuación general de una recta en forma explícita, y se utilizaron los valores de las tablas para obtener ambas ecuaciones.

A25 considera la "oferta" como la variable dependiente "y"

b)  $y = a \cdot x + b$   
 ↓  
 precio      ↓  
 precio

A25 considera el "precio" como la variable independiente "x"

Datos de la tabla

$$\begin{cases} 155 = a \cdot 10 + b \\ 307 = a \cdot 18 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 155 - b = a \\ 307 - b = a \end{cases}$$

$$\frac{155 - b}{10} = \frac{307 - b}{18} \quad 155 = a \cdot 10 - 35$$

$$155 + 35 = a \cdot 10$$

$$190 = a \cdot 10$$

$$\frac{190}{10} = a$$

$$19 = a$$

$$307 = a \cdot 18 - 35$$

$$307 + 35 = a \cdot 18$$

$$342 = a \cdot 18$$

$$\frac{342}{18} = a$$

$$19 = a$$

Resuelve el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (a y b)

$$\begin{aligned} \frac{155 - b}{10} &= \frac{307 - b}{18} \\ (155 - b) \cdot 18 &= (307 - b) \cdot 10 \\ 2790 - 18b &= 3070 - 10b \\ -18b + 10b &= 3070 - 2790 \\ -8b &= 280 \\ b &= \frac{280}{-8} \\ b &= -35 \end{aligned}$$

Ordenada de la recta de oferta:  $b = -35$

Ecuación para la recta de oferta:  $y = 19 \cdot x - 35$

19 Pendiente de la recta de oferta (Positiva)

Figura 1 – Respuesta parcial de uno de los alumnos (A25) a la primera pregunta.

Ecuación de oferta

Fuente: datos de la investigación.

Datos de la tabla

$$\begin{cases} 330 = a \cdot 7 + b \\ 250 = a \cdot 15 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 330 - b = a \\ 250 - b = a \end{cases}$$

$$\frac{330 - b}{7} = \frac{250 - b}{15} \quad 330 = a \cdot 7 + 400$$

$$330 - 400 = a \cdot 7$$

$$-70 = a \cdot 7$$

$$\frac{-70}{7} = a$$

$$-10 = a$$

Resuelve el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (a y b)

$$\begin{aligned} \frac{330 - b}{7} &= \frac{250 - b}{15} \\ (330 - b) \cdot 15 &= (250 - b) \cdot 7 \\ 4950 - 15b &= 1750 - 7b \\ 4950 - 1750 &= -7b + 15b \\ 3200 &= 8b \\ \frac{3200}{8} &= b \\ 400 &= b \end{aligned}$$

Ordenada de la recta de demanda:  $b = 400$

Ecuación de la recta de demanda:  $y = (-10) \cdot x + 400$

-10 Pendiente de la recta de demanda (Negativa)

Figura 2 – Respuesta parcial de uno de los alumnos (A25) a la primera pregunta.

Ecuación de demanda

Fuente: datos de la investigación.

La Figura 3 muestra la resolución del alumno A7 (representante del grupo G5) que responde las preguntas utilizando una técnica diferente a la anterior. Considera al precio como variable dependiente, y la cantidad ofrecida (y la cantidad demandada) como independiente.

**A)**  $A = 71 - 71$   
 Pendiente de la recta que pasa por dos puntos.  
 $a = \frac{10 - 7}{155 - 98} = \frac{3}{57} = \frac{1}{19}$   
 $y = \frac{1}{19} \cdot 155 + B$   
 $10 = \frac{155}{19} + B$   
 $\frac{35}{19} = B$  Ordenada de la recta de oferta  
 $A = \frac{1}{19}x + \frac{35}{19}$  OFERTA  
 Valores de tabla para la cantidad ofrecida. A7 considera a la "precio" como la variable dependiente.

**B)**  $x_1 = 250$   $x_2 = 330$   
 Valores de tabla para el precio. A7 considera esta cantidad como la variable independiente.  
 $y_1 = 15$   $y_2 = 7$   
 $A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$   
 $A = \frac{7 - 15}{330 - 250}$   
 $A = \frac{-8}{80} = \frac{-1}{10}$  Pendiente de la recta de demanda (Negativa)  
 $f = -\frac{1}{10}x + B$   
 $7 = -\frac{1}{10} \cdot 330 + B$   
 $7 = -33 + B$   
 $7 + 33 = B$   
 $40 = B$  Ordenada de la recta de demanda  
 DEMANDA

Figura 3 – Respuesta parcial del alumno A7 a la primera pregunta.

Fuente: datos de la investigación.

Ambos modelos satisfacen las leyes de la oferta y la demanda: cuando aumenta el precio, aumenta la cantidad ofrecida pero disminuye la cantidad demandada. Todas las respuestas fueron validadas por la comunidad de estudio. Los grupos estudiaron e investigaron las preguntas sobre la oferta, la demanda y las referidas a ecuaciones de rectas, variables, parámetros, ordenadas al origen, pendiente, y sistemas de ecuaciones sólo a partir de la pregunta Q. Esto puede interpretarse como una manera de hacer propia de la dialéctica denominada *de la inscripción y la excripción*, ya que la comunidad de estudio vinculó las preguntas con ciertos saberes matemáticos, sin transcripciones textuales, es decir, utilizó sólo los saberes relevantes y útiles para responder la pregunta. Luego, el profesor propuso la segunda pregunta:

$Q_2$ : ¿Cómo se podría estudiar el comportamiento de las leyes de oferta y la demanda para cualquier par de funciones lineales de oferta y de demanda? ¿Cómo podría hallarse en este caso el punto de equilibrio?

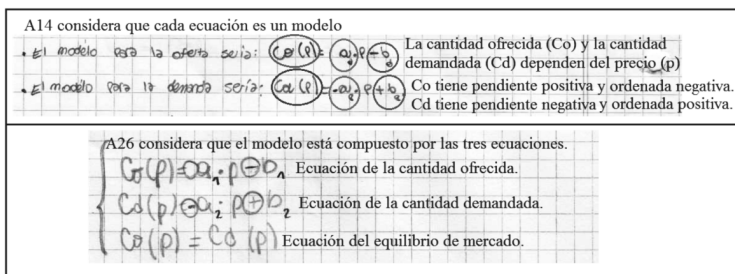
**Cuadro 2** – Segunda pregunta planteada a los grupos de estudio.

Fuente: datos de la investigación.

Responder esta pregunta exige construir el modelo para dos rectas cualesquiera, lo cuál permitirá luego, estudiar la variación de los parámetros que dará lugar al estudio de la praxeología relativa a la noción de derivada. La construcción del modelo para cualquier par de rectas de oferta y de demanda puede realizarse también de dos maneras diferentes.

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_d(p) = -m_d \cdot p + b_d \text{ con } m_d, b_d > 0 \\ Q_s(p) = m_s \cdot p - b_s \text{ con } m_s, b_s > 0 \\ Q_d = Q_s \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} p(Q_d) = -m_d \cdot Q_d + b_d \text{ con } m_d, b_d > 0 \\ p(Q_s) = m_s \cdot Q_s + b_s \text{ con } m_s, b_s > 0 \\ Q_d = Q_s \end{array} \right.$$

Siendo  $Q_d$  la función de demanda,  $Q_s$  la función de oferta y  $p$  el precio. En el área de Microeconomía se utiliza más comúnmente el primer modelo, es decir, donde la oferta y la demanda dependen del precio. En esta instancia del recorrido, consideramos necesario acordar con los alumnos que el primer modelo es el más adecuado pues es el que está disponible en diferentes medias tales como los libros de Microeconomía, Internet, y otras fuentes de información y difusión. La Figura 4 presenta los modelos construidos para responder la pregunta  $Q_2$ : el alumno A14 (representante del grupo G1) y el alumno A26 (representante del grupo G6). Ambos grupos de estudio realizaron una búsqueda en diferentes libros respecto a los modelos de mercados de oferta y demanda e incluso, consultaron al profesor del área de Economía. De esta manera, esbozaron una posible respuesta a esta pregunta.



**Figura 4** – Modelos construidos por dos alumnos (A14 y A26) para responder la segunda pregunta

Fuente: datos de la investigación.



Se advierte, aquí, la relevancia que los alumnos concedieron a los signos de los parámetros, evidenciando que la pendiente de la oferta debe ser positiva mientras que la pendiente de la demanda negativa, pues, en caso contrario, no se cumpliría una de las leyes esenciales de la oferta y la demanda. Una vez construido el modelo, lo siguiente consistió en obtener las soluciones de equilibrio para la cantidad demandada, la cantidad ofrecida y el precio,  $Q_d$ ,  $Q_s$  y  $p$ . La Figura 5 presenta la respuesta parcial del alumno A26, representante del grupo G6.

$a_1 p - b_1 = -a_2 p + b_2$  Ecuación de equilibrio  
 $a_1 p + a_2 p = b_2 + b_1$   
 $p \cdot (a_1 + a_2) = b_2 + b_1$   
 $p = \frac{b_2 + b_1}{a_1 + a_2}$  El precio de equilibrio en función de los parámetros del modelo.  
 $Q_s(p) = a_1 \cdot \left( \frac{b_2 + b_1}{a_1 + a_2} \right) - b_1$   
 $Q(p) = \left( \frac{a_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1}{a_1 + a_2} \right) - b_1$   
 $Q(p) = \frac{a_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 - (a_1 + a_2) b_1}{a_1 + a_2}$   
 $Q(p) = \frac{a_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 - b_1 \cdot a_1 + b_1 \cdot a_2}{a_1 + a_2} = \frac{a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2}{a_1 + a_2}$  Cantidad de equilibrio en función de los parámetros del modelo

**Figura 5** – Respuesta parcial a la segunda pregunta de uno de los alumnos (A26)

Fuente: datos de la investigación.

El protocolo muestra que este alumno logró obtener el precio y la cantidad de equilibrio a partir del modelo general construido previamente. Esto es, a partir de los parámetros del modelo, que en este caso, el alumno denominó  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  y  $b_2$ . Para estudiar cómo un cambio infinitesimal en uno de estos parámetros afectará al valor del precio y/o cantidad de equilibrio habría que diferenciar parcialmente los valores del precio y/o cantidad de equilibrio con respecto a cada uno de los parámetros. Así, determinando el signo de cada derivada parcial puede conocerse la dirección del cambio del valor (precio y cantidad) de equilibrio. La pregunta  $Q_3$  (Cuadro 3) fue propuesta por el profesor para estudiar y analizar estos cambios en el valor de equilibrio utilizando una técnica que no emplee las derivadas parciales, pues el programa correspondiente al último año del nivel secundario, no las incluye.



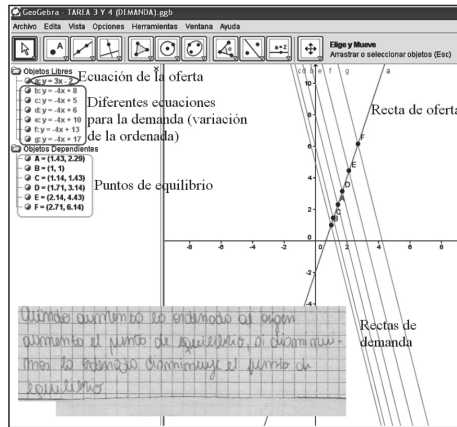
$Q_3$ : Supongamos que la función de oferta de un mercado de sorrentinos está dada por la función  $Q_s(p) = 3p - 2$  y que la función de demanda, por  $Q_d(p) = -4p + 6$ . ¿Cómo describir la variación del punto de equilibrio si sólo se modifica el valor de la cantidad inicial demandada? ¿Y si en cambio se modifica el valor de la cantidad inicial ofrecida?

**Cuadro 3** – Tercera pregunta planteada a los alumnos

Fonte: datos da pesquisa

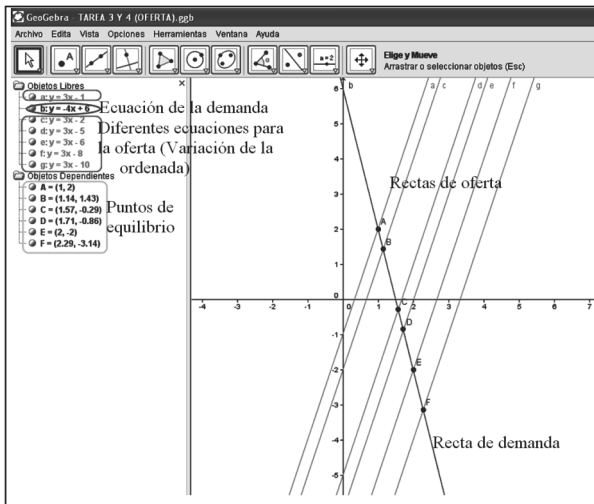
Las dos sub-preguntas de  $Q_3$  pueden responderse empleando una técnica analítica y/o gráfica para obtener como respuesta a la primera que al aumentar el valor de la ordenada de la recta de demanda, también aumenta el precio y la cantidad de equilibrio. Interesa en esta conclusión que la relación de cambio entre el parámetro ordenada al origen de la recta demanda y el precio (y cantidad) de equilibrio, es directa. La respuesta a la segunda pregunta es que si se aumenta el valor de la ordenada de la recta oferta, aumenta también el precio de equilibrio pero disminuye la cantidad, o bien, si se disminuye el valor de la ordenada, disminuye el precio y aumenta el valor de la cantidad de equilibrio.

Las figuras siguientes presentan los resultados obtenidos por el grupo 6 (G6). Este grupo, al igual que los demás, utilizó el software GeoGebra para representar la recta de oferta junto a distintas rectas de demanda con igual pendiente a la dada, pero diferente ordenada (propuestas por ellos mismos). Luego, hallaron el punto de equilibrio en cada caso y compararon los valores obtenidos (Figura 6). De forma análoga, procedieron para responder respecto a las variaciones de la ordenada de la recta de oferta (Figura 7).



**Figura 6** – Respuesta parcial del grupo 6 (G6): variaciones en la ordenada de la recta de demanda.

Fuente: datos de la investigación.



**Figura 7** – Respuesta parcial del grupo 6 (G6): variaciones en la ordenada de la recta de oferta.

Fuente: datos de la investigación.

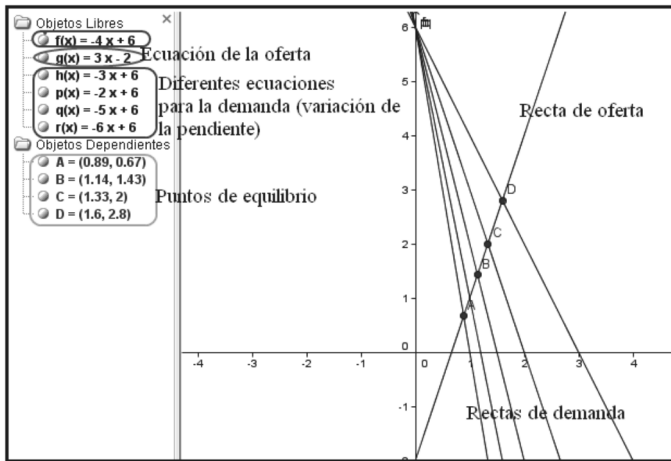
La forma de utilizar este software (recomendado por el profesor) relativamente autónoma por parte de los alumnos mostraría cómo un *media* ingresa al *medio* de manera funcional para lograr la identificación de las variaciones del punto de equilibrio según se varíe la ordenada de la recta de oferta o la ordenada de la recta de demanda. Luego, el profesor propuso la pregunta  $Q_4$  (Cuadro 4) cuyo objetivo es estudiar las variaciones del equilibrio modificando las pendientes de las rectas de oferta y demanda, de a una a la vez.

$Q_4$ : Sigamos considerando las mismas funciones de oferta y de demanda del caso anterior. ¿Cómo describir la variación del punto de equilibrio si ahora sólo se modifica el valor de la pendiente de la función de demanda? ¿Y si sólo se modifica el valor de la pendiente de la función de oferta?

**Cuadro 4** – Cuarta pregunta propuesta a los estudiantes

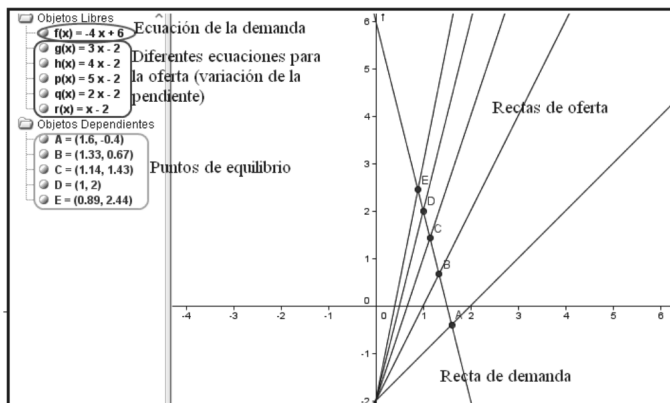
Fuente: datos de la investigación.

Para responder puede utilizarse la misma técnica de variaciones empleada en  $Q_3$ : variar la pendiente de la función que corresponda y analizar qué pasa con el punto de equilibrio utilizando el GeoGebra. La Figura 8 y la Figura 9 muestran los gráficos realizados por el grupo G1.



**Figura 8** – Representaciones del Grupo G1: variaciones en la pendiente de la recta de demanda

Fuente: datos de la investigación.



**Figura 9** – Representaciones del Grupo G1: variaciones en la pendiente de la recta de oferta

Fuente: datos de la investigación.

Por su parte el grupo G5, además de los gráficos, confeccionó una tabla donde colocaron los valores de la pendiente y los respectivos valores de intersección de la rectas de oferta y de demanda (precio y cantidad de equilibrio), presentada en la Figura 10. Con estos datos, identificaron el punto de equilibrio inicial (resaltado en color rojo por ellos mismos) y luego compararon este valor con los obtenidos al colocar pendientes mayores y menores a la dada.

Ordenada función demandada	Precio de equilibrio Pe	Cantidad de equilibrio Pe
2	0.57	-0.29
3	0.71	0.14
4	0.86	0.57
5	1	1
6	1.14	1.43
7	1.29	1.86
8	1.43	2.29

Punto de equilibrio inicial

A) si la pendiente de la demanda es mayor el punto de equilibrio va a aumentar en X y en Y  
y si es menor va a disminuir el punto de equilibrio en X y en Y

B) si la pendiente de la oferta aumenta X disminuye e Y aumenta.  
si la pendiente de la oferta disminuye Y disminuye e X aumenta

**Figura 10** – Tabla confeccionada por el grupo G5 y sus conclusiones

Fuente: datos de la investigación.

Aquí, además del uso del software GeoGebra, este grupo de alumnos consideró la necesidad de utilizar un procesador de textos para construir la tabla y elaborar sus conclusiones. De esta manera ingresó al medio la tabulación, lo cuál fue validado por la comunidad de estudio como una manera pragmática de organizar los datos.

Si bien, las preguntas anteriores fueron formuladas en términos de *¿Cómo?*, es importante destacar que este grupo de alumnos (G5) dio una respuesta cuantitativa. Luego de la puesta en común, surgió una nueva pregunta relativa a *¿Cuánto?* variará el punto de equilibrio en cada caso. Aquí, conviene destacar la presencia de un cambio relevante a nivel de la topogénesis, pues los mismos estudiantes preguntaron, respecto a las variaciones:

Q<sub>3</sub>: Hasta aquí hemos podido determinar cómo variará el precio y la cantidad según varíen las pendientes y las ordenadas (cantidades iniciales) de las funciones oferta y de demanda. Pero ¿Cuánto varía exactamente el punto de equilibrio en cada caso?

**Cuadro 5** – Pregunta formulada por los alumnos y reformulada junto con el profesor

Fuente: datos de la investigación.

Para responder Q<sub>3</sub>, los alumnos buscaron las diferencias entre un estado de equilibrio y el otro. El profesor sugirió considerar la confección de una tabla similar a la elaborada por el grupo G5 para organizar los datos de los diferentes valores del equilibrio. La Figura 11 muestra las tablas construidas y las conclusiones obtenidas por el alumno A25 (representante del grupo G6). En la

primera tabla se colocó, en la primera, segunda y tercera columna respectivamente, los valores de las ordenadas de la recta de demanda, el precio y la cantidad de equilibrio. En la segunda tabla colocó, en la primera y segunda columna respectivamente, las diferencias entre el nuevo valor de equilibrio obtenido y el anterior. De forma análoga, analizó las variaciones de la ordenada de la recta de oferta, obteniendo en ambos casos, una respuesta cuantitativa, como puede observarse según lo escrito debajo de cada par de tablas.

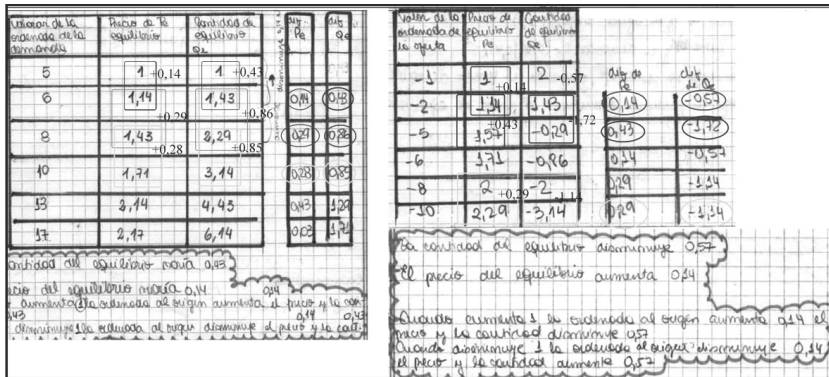
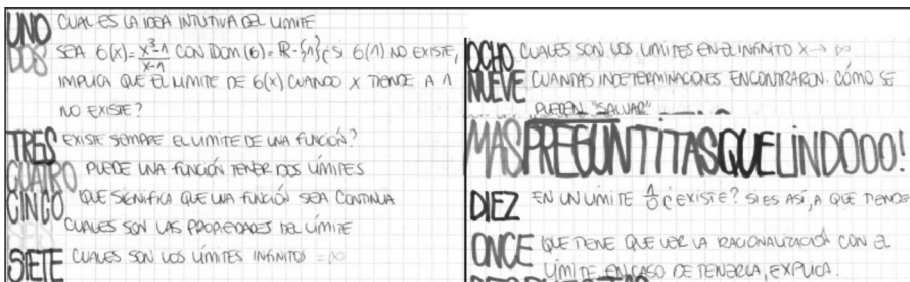


Figura 11 – Respuesta del alumno A25

Fuente: datos de la investigación.

Es importante destacar que este alumno obtuvo la dirección y la magnitud del cambio sin la necesidad de recurrir a la noción de derivada. Concluyó como y cuanto varía el punto de equilibrio si se modifica la ordenada de la recta de oferta y de demanda una a la vez. Luego de realizar la puesta en común, los alumnos preguntaron al profesor – algo descontentos – si podían obtener estas conclusiones sin la necesidad de realizar todo este trabajo. Esto permitió al profesor actuar como media e institucionalizar la noción de *derivada* como un tipo particular de límite y como noción matemática que permite realizar el análisis de estas variaciones de manera directa. Fue necesario reconstruir parcialmente la praxeología relativa al límite de funciones, pues los alumnos realizaron ciertas preguntas respecto al *límite*. El estudio del límite de funciones es otras de las *salidas*, pues se realiza a partir de la definición de la derivada de funciones. Una vez estudiado el límite de funciones, el grupo debió volver y retomar el estudio de la derivada y recién entonces retornar a la pregunta. Se tiene así, una salida dentro de otra salida, que dificultó considerablemente al grupo el reingreso, es decir, volver a *entrar al tema*. Esto que acabamos de describir, no es otra cosa que el funcionamiento de la dialéctica de *entrar y salir de tema*.

Los alumnos habían estudiado el límite de funciones durante el año anterior, razón por la cual, el profesor les propuso revisar y traer sus notas, carpetas, apuntes, etc., para las próximas clases. La reconstrucción de la praxeología en torno al límite de funciones se realizó a partir de una lista de preguntas, algunas formuladas por el profesor y otras, por los propios alumnos. Es muy importante apreciar hasta qué punto se ha modificado la topogénesis durante el REI y el costo que esto ha tenido para los estudiantes, que lo expresan libremente. El tamaño de la letra y la *ironía* del texto que repite la letra final, indica las dificultades que tiene el ingreso en la pedagogía de la investigación, cuando se han por lo menos catorce años en la pedagogía tradicional. La Figura 12 presenta estas preguntas:



**Figura 12** – Lista de preguntas a responder para estudiar el límite de funciones de una variable real

Fuente: datos de la investigación.

No presentamos en este trabajo los resultados relacionados con las respuestas a estas preguntas por razones de espacio. Una vez que el grupo estudió el límite de funciones, el profesor retomó la pregunta por la derivada. Se estudiaron los casos elementales de derivación, las reglas y las propiedades. Finalmente, el profesor propuso a los grupos de alumnos realizar una síntesis de todas las preguntas estudiadas desde el primer día de clases. A continuación (Figura 13) se presenta la síntesis realizada por el grupo tres (G3).

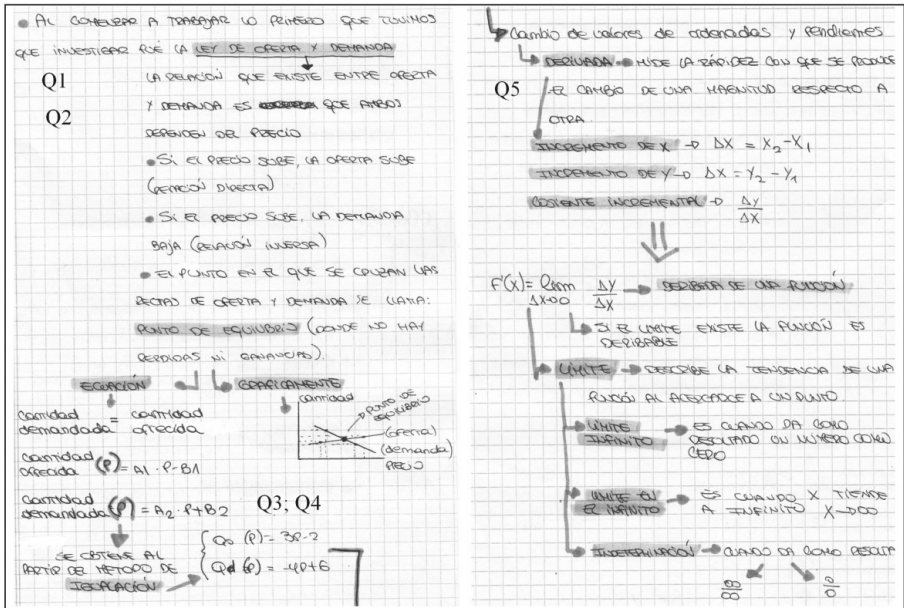


Figura 13 – Síntesis propuesta por el grupo de estudio G3

Fuente: datos de la investigación.

La síntesis realizada por los alumnos, permite reconstruir el recorrido desarrollado a partir de las preguntas. Comenzando por las leyes de oferta y demanda, el punto de equilibrio y los modelos lineales se reconstruyó parte de la praxeología relativa a *Rectas en el plano* incluyendo los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Las variaciones (constantes y no constantes) permitieron el ingreso a la praxeología relativa a la *Derivada* desde el punto de vista de la variabilidad, para luego, institucionalizarla como un límite particular, permitiendo así, reconstruir parte de la praxeología en torno al *Límite de funciones* (la cual corresponde a otra de las unidades del programa de estudios).

Finalmente, la dialéctica de las *preguntas y respuestas* – central en una enseñanza por REI –, la dialéctica de la *producción y recepción* y la del *individuo y colectivo* se manifiestan en cada tramo del recorrido. Por ejemplo, la búsqueda de respuestas a la pregunta *¿cómo hallar el punto de equilibrio?* conduce a formular otras preguntas tales como *¿qué es el punto de equilibrio?*, *¿cómo se resuelve un sistema de ecuaciones, siempre tiene solución?*, entre otras, muestra la operatividad de la dialéctica de las *preguntas y respuestas*.



La *producción y recepción* de las respuestas se presenta en cada puesta en común. Cada grupo debe comunicar su respuesta y defenderla. Esta dialéctica está estrechamente ligada a la dialéctica del *individuo y del colectivo*, pues, el trabajo en clase es realizado en grupos de alumnos, donde cada uno debe participar en la búsqueda de respuestas cooperativas.

## 7 Conclusiones

Ha sido posible en este caso realizar una enseñanza por REI en la escuela secundaria y  *cubrir* parte del programa de estudios del curso con preguntas de la Microeconomía, es decir que se desarrollo un REI bi-disciplinar, lo cual constituye un avance importante de los trabajos de nuestro propio equipo en el ámbito de la secundaria argentina.

Se pudo experimentar y describir cómo operan las diferentes dialécticas, analizando el proceso de estudio a partir de ellas, excepto, el momento de la acreditación escolar, que no debe confundirse con lo que en la TAD se denomina evaluación. El de la acreditación, es un problema originado en las restricciones de la institución, que tiene consecuencias didácticas de gran porte, y que es considerado por los docentes y por las autoridades escolares como un obstáculo para la introducción de la pedagogía de la investigación en la escuela secundaria, un obstáculo ligado al fenómeno de la dilatación del tiempo didáctico, y a una serie de mitologías y praxeologías espontáneas que operan en la institución escuela secundaria.

El proceso de gestión del REI, demanda cambios radicales en el nivel topogenético, cronogenético y mesogenético, en los cuales unas dialécticas tienen mayor incidencia que otras. La primera pregunta fue planteada el primer día del ciclo lectivo, maximizando el funcionamiento de la dialéctica del *paracaidista y los buscadores de trufas*. Así, las dialécticas del *paracaidista y las trufas, de la producción y recepción y del individuo y colectivo* inciden en la topogénesis, originando cambios de costo elevado en términos de esfuerzo para los estudiantes. Ellos debieron hacerse cargo de las preguntas a responder – en principio, con bastante resistencia – de forma individual y a su vez, de manera grupal. Cada grupo de alumnos debía, con la colaboración de todos sus integrantes, aportar una respuesta a las diferentes preguntas, comunicarlas y defenderlas. Es difícil para el profesor no ceder ante la demanda de los estudiantes, habituados al lugar del profesor explicador. Esto lleva a preguntarse por las dificultades de instalar una enseñanza por REI, cuando el profesor no es experimentado, ni está



familiarizado con la TAD.

Las dialécticas de las *cajas negras* y *cajas claras*, de la *inscripción* y *excripción* y del *medio-medias* incidieron preponderantemente en la mesogénesis. El medio didáctico fue construido a partir de las preguntas, las respuestas y de los diferentes *media* disponibles: las búsquedas en Internet, los libros de Microeconomía, las consultas al profesor de Economía y al profesor del curso. Fue necesario establecer en qué nivel de *gris* determinados saberes ingresaron al medio, tales como, el nivel de *gris* con el cuál estudiar las leyes de oferta y de demanda y, qué de esos saberes *transcribir* en sus carpetas durante las clases. Por ejemplo, qué transcribir de toda la información disponible sobre los modelos de oferta y de demanda.

Las dialécticas de *entrar y salir del tema* y de las *preguntas y respuestas* incidieron en la cronogénesis, dilatando considerablemente el tiempo de reloj - empleado para realizar las *salidas* y las *entradas*- y para responder cualquier pregunta surgida durante la búsqueda de respuestas a las preguntas iniciales. Aquí, también el profesor está expuesto a restricciones relativas a si completó o no el programa, a si reunió la cantidad de calificaciones exigidas para cada alumno etc.

Finalmente, destacamos que el carácter exploratorio de esta investigación, deja una variedad de zonas grises y de aspectos a profundizar y reconsiderar, por ejemplo: ¿Cómo gestionar el costo afectivo que se percibe en los estudiantes, con relación a la incertidumbre que generan las nuevas responsabilidades y la distancia entre estas y los hábitos de obediencia y dependencia instalados en la pedagogía tradicional? ¿Cuál es el nivel de *gris* pertinente para estudiar las praxeologías matemáticas reconstruidas en el aula? ¿Cómo gestionar en una enseñanza por REI las acreditaciones de los estudiantes? ¿Cómo determinar la amplitud de los programas de estudios – la mayoría de ellos abarcar muchas nociones matemáticas y las praxeologías asociadas a las mismas – para que una enseñanza por REI permita *abrirlo* por completo? ¿Cómo introducir en la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo a los futuros profesores?

## Referencias

ALVAREZ, F. Reverenter Absolvit: Nadie ha inventado la Historia. **Manuscripts**, Barcelona, v. 8, n.1, p.87-104, ene. 1990.

BARQUERO, B. **Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas**. 2009. 564f. Tesis (Doctorado en Matemáticas) – Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra, 2009.

BOSCH, M.; ESPINOZA, L.; GASCÓN, J. El profesor como director de procesos de estudio. Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 23, n. 1, p.79 -135, 2003.

CHEVALLARD, Y. **La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD**, 2009. Disponible en: <<http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acceso en: 12 nov. 2012.

CHEVALLARD, Y. **Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique**, 2007. Disponible en: <<http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acceso en: 18 may. 2012.

CHEVALLARD, Y. **Vers une didactique de la codisciplinarité: notes sur une nouvelle épistémologie scolaire**, 2004. Disponible en: <<http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acceso en: 16 may. 2012.

CHEVALLARD, Y. **Les TPE comme problème didactique**, 2001. Disponible en: <<http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acceso en: 18 may. 2012.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v.19, n.2, p.221-266, 1999

FONSECA, C.; PEREIRA, A.; CASAS, J. Los REI en la creación de secuencias de enseñanza y aprendizaje. In: CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO, 3., 2011, Barcelona. **Actas...** Barcelona: CRM, Edifici, 2011. p. 671-684. v. 3.

GARCÍA, J.; BOSCH, M.; GASCÓN, J.; RUIZ, L. Integración de la proporcionalidad escolar en una organización matemática regional en torno a la modelización funcional: los planes de ahorro. In: CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO, 1, 2005, Baeza. **Actas...** Jaen: Universidad de Jaen, 2005. p.1-14. Disponible en: <<http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones.htm>>. Acceso en: 15 abr. 2012.

GAZZOLA, M. P.; LLANOS, V. C.; OTERO, M. R. Funciones racionales en la secundaria: primeros resultados de una actividad de estudio y de investigación (AEI). In: CONGRESO INTERNACIONAL DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LA MATEMÁTICA, I ENCUENTRO NACIONAL DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA, 2., 2011, Tandil. **Actas...** Tandil: NIECyT, 2011. p.494-500. Disponible en: <<http://iciecymienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas>> Acceso en: 10 abr. 2012.

LIMA NAGAMINE, C. M.; HENRIQUES, A.; CARDOSO UTSUMI, M.; CAZORLA, I. M. Análise Praxeológica dos Passeios Aleatórios da Mônica. **Bolema**, Rio Claro, v.24, n.39, p.451-472, ago. 2010. Disponible en: <<http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema>>. Acceso en: 21 may. 2012.

LLANOS, V. C.; OTERO, M. R. Las funciones polinómicas de segundo grado en el marco de un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI): alcances y limitaciones. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNIÓN**, España, v.31, n.3, p.45-63, 2012.

LLANOS, V. C.; OTERO, M. R. Evolución de una AEI como producto de investigación al cabo de seis implementaciones consecutivas. In: CONGRESO INTERNACIONAL DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LA MATEMÁTICA, I. ENCUENTRO NACIONAL DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA, 2., 2011, Tandil. **Actas...** Tandil: NIECyT, 2011. p.501-508. Disponible en: <<http://icieciymienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas>>. Acceso en: 10 abr. 2012.

LLANOS, V. C.; OTERO, M. R.; BILBAO, M. P. Funciones Polinómicas en la Secundaria: primeros resultados de una Actividad de Estudio y de Investigación (AEI). **REIEC**, Tandil, v.6, n.1, p.102-112, ene./jul. 2011. Disponible en: <<http://reiec.sites.exa.unicen.edu.ar/volumen-6-nro-1-2011-1>>. Acceso en: 21 may. 2012.

OTERO, M. R.; LLANOS, V. C. La enseñanza por REI en la escuela secundaria: desafíos, incertidumbres y pequeños logros al cabo de seis implementaciones. In: CONGRESO INTERNACIONAL DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LA MATEMÁTICA, I ENCUENTRO NACIONAL DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA, 2., 2011, Tandil. **Actas...** Tandil: NIECyT, 2011. p.15-22. Disponible en: <<http://icieciymienem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas>>. Acceso en: 10 abr. 2012.

PARRA, V. **Praxeologías Matemáticas y Didácticas en la Universidad: un estudio de caso relativo al límite y continuidad de funciones**. 2008. 105f. Tesis (Licenciatura en Educación Matemática) – Departamento de Formación Docente, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil, 2008.

PARRA, V.; OTERO, M. R. Praxeologías Didácticas en la Universidad: Un estudio de caso relativo al Límite y continuidad de funciones. **Zetetiké**, Campinas, v.17, n.31, p.151-190, jan./jun. 2009. Disponible en: <<http://www.fe.unicamp.br/zetetike/viewissue.php?id=41>>. Acceso en: 21 may. 2012.

PARRA, V.; OTERO, M. R. Praxeologías didácticas en la universidad y el fenómeno del “encierro”: un estudio de caso relativo al límite y continuidad de funciones. In: CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO, 3., 2010, Cataluña. **Actas...** Barcelona: CRM, 2011. p. 719-741. v. 3.

PARRA, V.; OTERO, M. R.; FANARO, M. Enseñanza de la Matemática a partir de problemas de la Microeconomía: ejemplos de posibles Recorridos de Estudio e Investigación. **Números - Revista de Didáctica de las Matemáticas**, La Laguna, España, v.82, n.3, p. 17-35, mar. 2013.

PARRA, V.; OTERO, M. R.; FANARO, M. Los Recorridos de Estudio e Investigación en la escuela secundaria: luces y sombras. In: CONGRESO INTERNACIONAL DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LA MATEMÁTICA, I ENCUENTRO NACIONAL DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA, 2., 2011, Tandil. **Actas...** Tandil: NIECyT, 2011. p.24-29. Disponible en: <<http://iciecyt.unicen.edu.ar/actas>>. Acceso en: 10 abr. 2012.

PARRA, V.; OTERO, M. R.; FANARO, M. Reconstrucción de una Organización Matemática de referencia para el estudio del límite y la continuidad de funciones en la Universidad. **REIEC**, Tandil, v. 4, n.2, p.24-38, dic. 2009. Disponible en: <<http://reiec.unicen.edu.ar/ano-5-nro-1>>. Acceso en: 21 may. 2012.

RUIZ-HIGUERAS, L.; GARCÍA GARCÍA, F. Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. **Relime**, México DF, v.14, n.1, p.41-70, mar. 2011. Disponible en: <<http://www.clame.org.mx/relime.htm>>. Acceso en: 21 may. 2012.

SERRANO, L.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. “Cómo hacer una previsión de ventas”: propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. In: CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO, 2., 2007, Uzés. **Actas...** Jaen: Universidad de Jaen, 2007. p. 835-857. Disponible en: <[http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD\\_II/listado\\_comunicaciones.htm2007](http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/listado_comunicaciones.htm2007)>. Acceso en: 19 abr. 2012.

**Submitido em Maio de 2012.**  
**Aprovado em Novembro de 2012.**