ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11

Processos do Pensamento Matemático Avançado Evidenciados em Resoluções de Questões do ENADE*

Advanced Mathematical Thinking Processes Evidenced in Resolutions of Questions of ENADE

Laís Cristina Viel Gereti**

Angela Marta Pereira das Dores Savioli***

Resumo

Este artigo apresenta alguns resultados de uma pesquisa que objetivou *descrever e discutir indícios/características dos processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados na produção escrita de estudantes de Matemática ao resolverem questões discursivas do ENADE*. Analisamos os registros escritos de duas questões que foram aplicadas em uma turma do quarto ano do curso de Matemática de uma universidade norte paranaense. Concluímos, segundo a teoria de Dreyfus (2002), que: seis estudantes mobilizaram o processo de representação simbólica, três estudantes mobilizaram o processo de visualização, quatro estudantes mobilizaram o processo de mudança de representações e tradução entre elas, dois estudantes mobilizaram o processo de modelação, quatro estudantes mobilizaram o processo de sintetização e nenhum estudante mobilizou o processo de generalização. No entanto, inferimos que nenhum estudante mobilizou todos os processos do Pensamento Matemático Avançado em suas resoluções.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino Superior. Pensamento Matemático Avançado. ENADE.

Abstract

This article presents some results of a research aimed to *describe and discuss clues/characteristics of the Advanced Mathematical Thinking processes evidenced in the written production of Mathematics students to solve discursive questions of the ENADE test*. We analyzed the written records of two issues that have been applied in a class of fourth year of mathematics courses in a university north of Paraná. We conclude, on the theory of Dreyfus (2002), that: six students mobilized the process of symbolic representation, four students mobilized the process of switching representations and translating, two students mobilized the process of modeling, four students mobilized the synthesis process and no student mobilized the process of generalization.

* Este artigo é parte do resultado de uma pesquisa de Mestrado da primeira autora (GERETI, 2014), que contou com o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Nível Superior (CAPES).

** Mestra em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina/PR, Brasil. Endereço para correspondência: Rua José Ferreira Nho Belo, n° 1000, Centro, Mandaguari, Paraná, Brasil - CEP. 86975-000. E-mail: laisvielg@hotmail.com.

*** Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Professora do Programa de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina/PR, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Alexander Graham Bell, 560, apto 3204, Jardim Jamaica, Londrina/PR, Brasil – CEP. 86063-250. E-mail: angelamarta@uel.br.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11

However, we infer that no student mobilized all the processes of the Advanced Mathematical Thinking in its resolutions.

Keywords: Mathematics Education. Higher Education. Advanced Mathematical Thinking. ENADE.

1 Introdução

Até o início deste século, a preocupação com o ensino e a aprendizagem da Matemática no Brasil era focada somente na Educação Básica, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Com o tempo, a área da Educação Matemática foi se consolidando, como por exemplo, com o número de doutores deste campo de pesquisa que atuam no Ensino Superior. Começa-se, então, segundo Pinto (2002), a perceber novas propostas, como o uso de modelagem, de novas tecnologias e de outras perspectivas metodológicas para o Ensino Superior.

Na década de 80, foi constituído o *Advanced Mathematical Thinking Group*, durante o encontro do *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, que segundo Pinto (2002), visava explicar questões relativas ao ensino e à aprendizagem da Matemática por pessoas adultas. A pesquisa desenvolvida pelo grupo não se fundamenta em um único referencial teórico, coexistindo diversas abordagens para o termo Pensamento Matemático Avançado. No entanto, as ideias de tais pesquisadores convergem para o questionamento de como a Matemática está sendo ensinada no Ensino Superior.

De acordo com Domingos (2003), o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Superior tem sido alvo de uma crescente preocupação, por revelar níveis de insucesso elevados. O autor acredita que as dificuldades que são apresentadas nesta área disciplinar resultam da falta de compreensão de conceitos matemáticos pelos estudantes. No entanto, a maioria dos conceitos matemáticos que são ensinados no Ensino Superior possui certa complexidade, precisando recorrer a um Pensamento Matemático Avançado.

Neste sentido, apresentamos alguns resultados de uma pesquisa que teve como objetivo *descrever e discutir indícios/características dos processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados na produção escrita de estudantes de Matemática ao resolverem questões discursivas do ENADE*. Para tanto, as análises das resoluções dos estudantes foram embasadas na teoria de Dreyfus (2002).

Os participantes deste estudo foram treze estudantes do curso de Matemática, de uma universidade norte paranaense. Dos treze estudantes, quatro ingressaram no curso de licenciatura em Matemática no ano de 2008, três estudantes ingressaram em 2009, seis

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11

estudantes em 2010, sendo que um destes faz o curso de Licenciatura em concomitância com o Bacharelado.

Em relação às questões que utilizamos para coletar informações, referem-se a prova do ENADE (Exame Nacional de Avaliação dos Estudantes[1]) que é uma das três dimensões que constitui o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (SINAES), tendo como unidade de análise os estudantes.

Abordamos a seguir, aspectos teóricos a respeito do Pensamento Matemático Avançado.

2 Pensamento matemático avançado

Uma das preocupações da Educação Matemática se refere à maneira que os estudantes pensam os objetos matemáticos e, em especial, o pensamento matemático desenvolvido pelos mesmos, seja de modo elementar, seja de modo avançado.

Diversos autores se dedicaram ao estudo do Pensamento Matemático Avançado, como por exemplo, Dreyfus (2002), Tall (2002), Gray *et al*. (1999), Resnick (1987), entre outros.

Segundo Brandemberg (2010), o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado favorece a aprendizagem de conteúdos matemáticos, em que "[...] o estudante deve manipular mentalmente, investigar e descobrir coisas a respeito do objeto foco de seu conhecimento, não de forma parcial e fragmentada, mas buscando visualizar a sua totalidade generalizante" (p.112).

Dreyfus (2002) afirma que este tipo de pensamento consiste na interação entre vários processos, como os processos de representar, visualizar, generalizar, entre outros. Para o autor, não existe uma diferença nítida entre os processos envolvidos do Pensamento Matemático Avançado e do Pensamento Matemático Elementar. Há tópicos da matemática elementar que podem ser tratados de forma avançada, assim como há pensamento elementar sobre temas avançados. O que distingue estes dois tipos de pensamentos é a complexidade como são tratados e gerenciados tais processos presentes em cada um deles.

---

[1] Algumas informações a respeito do ENADE: http://portal.inep.gov.br/enade. A prova é aplicada periodicamente a todos os estudantes concluintes do último ano, que tenham expectativas de conclusão do curso e tenham concluído mais de 80% da carga horária mínima do currículo do curso. Para os estudantes ingressantes, a prova é opcional. O ENADE é realizado anualmente e para cada curso avaliado a periodicidade é trienal (todos os cursos de Matemática participaram das provas nos anos de 2005, 2008 e 2011). A avaliação do desempenho dos estudantes é expressa por meio da escala de 1 a 5, sendo que 1 é o resultado mais baixo e 5 é o mais alto resultado.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11

Os principais processos destacados por Dreyfus (2002) são os processos de representação e de abstração[2]. Tais processos mentais podem ser encontrados tanto no Pensamento Matemático Elementar quanto no Pensamento Matemático Avançado.

Dreyfus (2002) ainda destaca que os processos mentais estão intimamente ligados aos aspectos psicológicos (imagens matemáticas), e é esta ligação que torna interessante a compreensão e a aprendizagem da Matemática avançada. Um exemplo dado pelo autor se refere à criação do gráfico de uma função, quando executa-se um processo matemático, seguindo várias regras que podem ser expressas em linguagem matemática, e, ao mesmo tempo, gera-se uma imagem mental do gráfico da função. Para esse mesmo exemplo, Domingos (2003, p.72) afirma que “[...] ambas as imagens criadas (mental e matemática) estão relacionadas e uma não pode aparecer sem a outra, pelo que elas representam os aspectos matemático e psicológico deste processo”.

Os processos que estão presentes na representação, segundo Dreyfus (2002), são: representação simbólica; representação mental; visualização; mudança de representações e tradução entre elas; e modelação.

Para Dreyfus (2002), as representações são fundamentais na Matemática, na medida em que os símbolos tornaram-se indispensáveis para a Matemática Moderna[3]. Os símbolos envolvem relações entre signos e significados, proporcionando explicitar em símbolos aquele conhecimento pessoal antes implícito.

As representações possibilitam aprender e pensar matematicamente. Ao pensar a respeito de um grupo, uma integral ou qualquer outro objeto matemático, cada um relacionará com algo que se tem em mente. A isso Dreyfus (2002) chama de representação mental do objeto em questão. Embora se espere que as pessoas cheguem a definições matemáticas semelhantes, cada uma apresenta representações mentais diferentes do mesmo conceito.

No entanto, Dreyfus (2002) esclarece que não se pode afirmar que o exemplo gerado seja simbólico ou mental. Assim, se a representação mental concerne a esquemas internos que as pessoas utilizam para se relacionar com o mundo externo, a representação simbólica deve ser externalizada de forma escrita ou falada, com o objetivo de tornar a comunicação mais compreensível sobre o conceito.

[2] Por meio de nossos estudos, entendemos que os processos de representação e de abstração são os mais globais, sendo constituídos por outros processos como representar, visualizar, generalizar, classificar, conjecturar, induzir, verificar, analisar, sintetizar, abstrair, provar, definir, formalizar, entre outros.

[3] Em uma das leituras a respeito da Matemática Moderna apresentadas por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), há a concepção de que a Álgebra se distingue em três momentos: a retórica ou verbal, a sincopada e a simbólica. A Matemática Moderna se encontraria nesta última fase, em que as ideias algébricas eram expressas por meio de símbolos ao invés do uso de palavras.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11

Outro processo envolvido na representação é a *visualização*. Este processo permite que as representações sejam criadas. De acordo com Domingos (2003) a visualização oferece intuição e compreensão, sendo um processo de formação de imagens utilizando-as na descoberta e compreensão de conceitos matemáticos.

Um indivíduo ao possuir diversas representações mentais pode utilizá-las de maneira complementar e pode ser possível integrá-las em uma única representação. Como resultado, Dreyfus (2002) afirma que o indivíduo terá várias representações ligadas, o que permite utilizá-las simultaneamente e alterná-las de forma eficientes em determinados momentos. Considera ainda que o processo de mudanças de representações e a tradução entre elas está envolvido na representação.

O autor explica que, mesmo tendo muitas representações de um conceito, isso não é suficiente para o seu uso flexível. Segundo Domingos (2003), é preciso que as várias representações estejam ligadas correta e fortemente para ter sucesso na manipulação dos conceitos.

O último processo envolvido na representação é a modelação. Dreyfus (2002) diz que geralmente este processo associa uma representação matemática a um objeto não matemático, mas, no caso do Pensamento Matemático Avançado, modelação "significa a construção de uma estrutura matemática ou teoria que [...] pode ser usada para estudar o comportamento do objeto ou o processo a ser modelado" (DREYFUS, 2002, p.34, tradução nossa).

Quanto aos processos envolvidos na abstração, está a generalização e a sintetização.

Segundo Dreyfus (2002) "generalizar é derivar ou induzir a partir de particularidades, identificar semelhanças e expandir domínios de validade" (p.35, tradução nossa). Sendo assim, este processo é importante, pois estabelece a partir de um caso particular, um resultado para grande quantidade de casos.

O outro processo presente na abstração é a sintetização. De acordo com Dreyfus (2002), este processo se refere à combinação ou composição de partes com o intuito de formar um todo. Na graduação, por exemplo, vários conteúdos são ensinados de maneira isolada, e mais tarde, durante o processo de aprendizagem, o que se espera é que tais conteúdos sejam assimilados pelos estudantes de maneira a formar um conjunto, composto por esses conteúdos aparentemente isolados, buscando relacioná-los e interligá-los.

Os processos de generalização e sintetização, que foram descritos anteriormente, complementam o processo de abstração em uma ligação íntima, mas nenhum destes dois processos exige tanto esforço cognitivo dos estudantes quanto o processo de abstração.

Para organizar e resumir os processos descritos anteriormente exibimos o Quadro 1:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11

Processos envolvidos na REPRESENTAÇÃO	
Representação Simbólica	Pode-se representar um conceito/objeto matemático por meio da escrita, em forma de notações ou símbolos. No entanto, é necessário que se tenha antes um significado associado ao conceito/objeto matemático representado.
Representação Mental	A representação de um conceito/objeto matemático ocorre na mente do indivíduo, relacionando-se ao conjunto de representações concretas que possui do conceito/objeto.
Visualização	Por meio da intuição e da compreensão, este processo permite que as representações mentais sejam criadas.
Mudança de representações e tradução entre elas	Transitar por diversas representações de um conceito/objeto matemático demanda habilidade para interligá-las corretamente, sempre que necessário. Traduzir representações se refere à passagem de informações de um enunciado/propriedade matemático(a) para outro(a), assim como a tradução entre linguagens (matemática e verbal).
Modelação	O objeto/processo a ser modelado requer a construção de uma estrutura/teoria matemática que abrange suas características.
Processos envolvidos na ABSTRAÇÃO	
Sintetização	Utilizar uma composição de objetos/conceitos matemáticos (distintos), inter-relacionando-os com o propósito de resolver a tarefa como um todo.
Generalização	A partir de casos particulares, identificar características comuns para a validade ser expandida. Pode ser que seja preciso incluir a formulação de outros conceitos matemáticos.

Quadro 1 – Descrição dos processos do Pensamento Matemático Avançado, segundo Dreyfus (2002), conforme nossas interpretações
Fonte: As autoras.

Portanto, com base na teoria desenvolvida por Dreyfus (2002) é que analisaremos os registros escritos dos estudantes participantes desta pesquisa.

3 Procedimentos metodológicos

Esse estudo se refere a uma pesquisa qualitativa, que seguiu algumas características segundo Bogdan e Biklen (1994), pois:

- a coleta de informações ocorreu por meio de registros escritos de estudantes do quarto ano do curso de Matemática ao resolverem questões discursivas do ENADE;

- por meio dos registros escritos e com base no referencial teórico adotado, analisamos as informações que emergiram das resoluções;

- a metodologia da Análise de Conteúdo contribuiu para que tratássemos as informações, as quais foram analisadas considerando as resoluções dos estudantes com o intuito de analisar os processos mentais do Pensamento Matemático Avançado evidenciados, tratando de uma pesquisa descritiva interessada no envolvimento do estudante com essas questões.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11

Em relação ao instrumento para coleta de informações, fizemos uma busca pelas provas de Matemática do ENADE, que ocorreram nos anos de 2005, 2008 e 2011, e escolhemos questões discursivas por considerar que as mesmas permitem ao estudante resolver e justificar suas escolhas e estratégias, não sofrendo a influência das alternativas de uma questão objetiva.

Das quatro questões que aplicamos em nosso estudo, trazemos para este trabalho apenas duas, as quais foram resolvidas por seis estudantes, do total dos treze que participaram.

Durante a disciplina de Seminários de Matemática e Educação Matemática da universidade onde realizamos a pesquisa, convidamos os estudantes do quarto ano do curso de Matemática para participarem do nosso trabalho. Fizemos um esclarecimento acerca da pesquisa e firmamos o compromisso de manter o anonimato dos participantes que se disponibilizassem a contribuir com nossa investigação.

Os registros escritos dos estudantes foram analisados seguindo procedimentos à luz da Análise de Conteúdo (BARDIN, 2004), que é uma modalidade da pesquisa qualitativa. Ao iniciar os procedimentos, que se referem à fase da pré-análise, realizamos uma leitura flutuante ao estabelecer um primeiro contato com os documentos que foram analisados, verificando quais registros escritos se referiam às resoluções completas, às incompletas, às anotações de informações do enunciado e às que não foram resolvidas.

Em relação a escolha dos registros escritos para análise, Bardin (2004) afirma que esta pode ser determinada *a priori* ou que podem ser escolhidos os registros que oferecem informações para o problema levantado. Sendo assim, escolhemos as resoluções (completas e incompletas[4]) que atendiam o objetivo dessa pesquisa, considerando as resoluções que podiam nos dar informações para análise dos processos do Pensamento Matemático Avançado, constituindo o *corpus* da investigação.

De modo aleatório, utilizamos um código de identificação para resguardar o nome do participante e empregamos a letra E para nos referirmos aos estudantes e um número para diferenciá-los (E1, E2, ..., E13).

A fase seguinte a pré-análise refere-se a exploração do material. Nosso primeiro passo foi descrever cada resolução do *corpus*, separadas por questão, considerando as estratégias escolhidas pelos estudantes, assim como possíveis erros. Posteriormente, a cada resolução descrita, realizamos as análises com base na teoria estudada, de acordo com Dreyfus (2002),

[4] Em nossa pesquisa, assumimos que resolver de modo completo significa que o estudante resolve todos os passos ou todas as alternativas da questão até chegar a uma resposta, sendo que não fizemos distinção entre as respostas consideradas corretas ou incorretas. E resolver de modo incompleto significa que o estudante não resolve todos os passos ou todas as alternativas da questão.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11

inferindo a respeito dos processos do Pensamento Matemático Avançado que os estudantes puderam mobilizar em suas resoluções.

Após uma intensa análise, começamos a *olhar* para os processos mobilizados nas resoluções de cada questão e, a partir disso, construímos os agrupamentos (unidades de registro). De maneira mais clara, em relação às resoluções de cada questão, observamos quais processos haviam sido manifestados e construímos os agrupamentos de acordo com este critério.

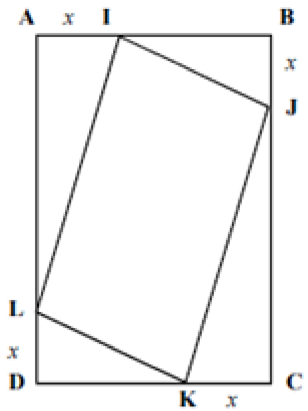
Quanto a etapa de categorização, assumimos, conforme Bardin (2004), as categorias como *a priori*, em que “é fornecido os sistemas de categorias e repartem-se da melhor maneira possível os elementos, à medida que vão sendo encontrados” (p.113). Procuramos classificar os agrupamentos de cada questão e analisar o que havia de comum entre os mesmos, ou seja, reagrupamos conforme critérios semelhantes. Como havíamos construído os agrupamentos conforme a mobilização de cada processo do Pensamento Matemático Avançado, decidimos utilizar os próprios processos para servir de categorias.

4 Informações, análises e discussões

Para tratar alguns dados desta pesquisa, apresentamos os enunciados e alguns resultados referentes a duas questões, seguidas, cada uma, de suas análises.

Iniciemos com a primeira questão, retirada da prova do ENADE do ano de 2008 (BRASIL, 2008):

No retângulo ABCD ao lado, o lado AB mede 7 cm e o lado AD mede 9 cm. Os pontos I, J, K e L foram marcados sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, de modo que os segmentos AI, BJ, CK e DL são congruentes.



Com base nessa situação, faça o que se pede nos itens a seguir e transcreva suas respostas para o Caderno de Respostas, nos locais devidamente indicados.
a) *Demonstre que o quadrilátero IJKL é um paralelogramo.*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11

***b)** Escreva a função que fornece a área do paralelogramo IJKL em função de x e determine, caso existam, seus pontos de máximo de mínimo.*

Dos treze estudantes, apenas três (E2, E4 e E11) resolveram esta questão, sendo que os dois primeiros apresentaram uma resolução para todas as alternativas ((a), (b), (c)) e o terceiro resolveu apenas a alternativa (a). Após as análises, pudemos construir cinco agrupamentos respeitando as fases da análise de conteúdo, segundo Bardin (2004), que se referem aos indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados nas resoluções dessa questão, como podemos ver no Quadro 2:

	Agrupamentos		**Estudantes**
Representação	**A**	Utiliza notações para se referir a conceitos geométricos, como: segmentos, triângulos, retângulo, paralelogramo, área de um triângulo, área de um retângulo, área de um paralelogramo ou vértice de uma parábola.	E2, E4, E11
	B	Apresenta: cálculos referentes às áreas de um triângulo, de um retângulo e de um paralelogramo; cálculos utilizando o teorema de Pitágoras.	E2, E4, E11
	C	Retira informações do enunciado, fazendo ligações entre a figura do retângulo ABCD circunscrito no paralelogramo IJKL (representação geométrica) com as demais representações e notações utilizadas na resolução.	E2, E4, E11
	D	Utiliza a incógnita *x* para obter a função que determina a área do paralelogramo IJKL.	E2, E4
Abstração	**E**	Evidencia um domínio referente a conceitos matemáticos representados pelas notações, por meio do uso de: propriedades de figuras planas (triângulo, retângulo e paralelogramo); cálculos das áreas de figuras planas (triângulo, retângulo e paralelogramo); cálculos utilizando o teorema de Pitágoras.	E2, E4, E11

Quadro 1 – Descrição dos agrupamentos relativos às resoluções da questão 40 da prova do ENADE de 2008
Fonte: As autoras.

Como exemplo de resolução para esta questão, tomemos o estudante E2. Em seu registro escrito, na figura 1, podemos ver como o mesmo inicia a resolução da alternativa (a):

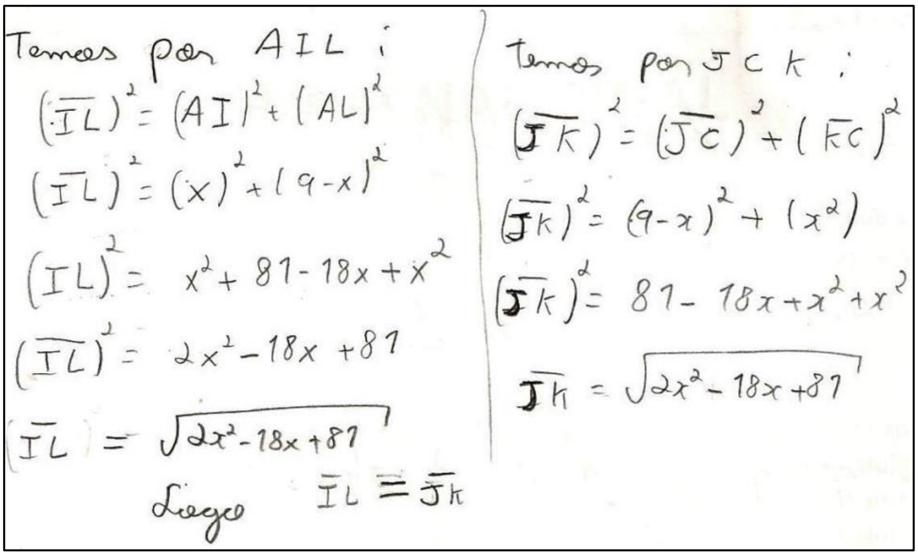
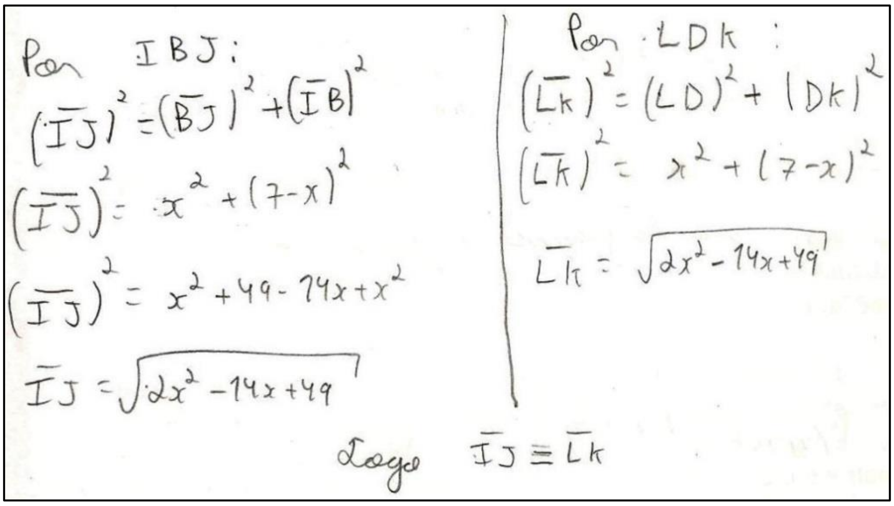


Figura 1 – Registro escrito presente na resolução do estudante E2
Fonte: Dados da pesquisa.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11

O estudante considera os triângulos *AIL* e *JCK* e utiliza o Teorema de Pitágoras para calcular a medida da hipotenusa de tais triângulos, chegando ao resultado que as hipotenusas $\overline{IL}$ e $\overline{JK}$ são congruentes. Em seguida, considera os triângulos *IBJ* e *LDK*, como podemos ver em sua resolução apresentada na figura 2:


Por IBJ:
$(\overline{IJ})^2 = (\overline{BJ})^2 + (\overline{IB})^2$
$(\overline{IJ})^2 = x^2 + (7-x)^2$
$(\overline{IJ})^2 = x^2 + 49 - 14x + x^2$
$\overline{IJ} = \sqrt{2x^2 - 14x + 49}$

Por LDK:
$(\overline{LK})^2 = (LD)^2 + (DK)^2$
$(\overline{LK})^2 = x^2 + (7-x)^2$
$\overline{LK} = \sqrt{2x^2 - 14x + 49}$

Logo $\overline{IJ} \equiv \overline{LK}$

Figura 2 - Registro escrito presente na resolução do estudante E2
Fonte: Dados da pesquisa.

Do mesmo modo, E2 utiliza o Teorema de Pitágoras para calcular as medidas das hipotenusas dos triângulos considerados, obtendo a congruência delas. Com os resultados de que $\overline{IL} = \overline{JK}$ e de $\overline{IJ} = \overline{LK}$, o estudante chega a seguinte resposta apresentada na Figura 3:

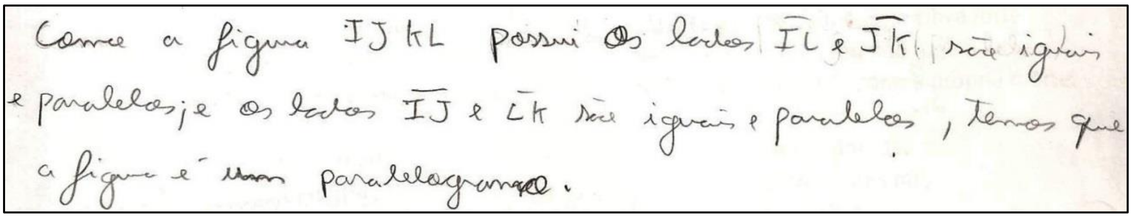

Como a figura IJKL possui os lados $\overline{IL}$ e $\overline{JK}$ são iguais e paralelos; e os lados $\overline{IJ}$ e $\overline{LK}$ são iguais e paralelos, temos que a figura é um paralelogramo.

Figura 3 - Registro escrito presente na resolução do estudante E2
Fonte: Dados da pesquisa.

E2, por meio da linguagem natural, esclarece que como o quadrilátero *IJKL* possui os lados opostos congruentes, e são paralelos dois a dois, segue que é um paralelogramo.

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, há evidências de três. O primeiro se refere ao de representação simbólica, pois o estudante apresenta:

- Notação para se referir a um triângulo, por exemplo, ao escrever *AIL*;
- Notação para se referir a um segmento, quando escreve, por exemplo, $\overline{IL}$;
- Notação para segmentos congruentes, quando utiliza o símbolo = ao escrever, por exemplo, $\overline{IL} = \overline{JK}$;
- Notação para se referir ao cálculo utilizando o Teorema de Pitágoras.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11

O segundo processo é o de mudança de representações e tradução entre elas, quando E2 traduz as informações do enunciado para sua resolução, ao provar que *IJKL* é um paralelogramo. Além disso, o estudante teve que compreender a figura apresentada no enunciado, transitando pelas representações geométrica e algébrica.

O terceiro processo é o de sintetização, pois E2 mobiliza diferentes conceitos em sua resolução, quando apresenta:

- Noção a respeito das propriedades de um triângulo retângulo;
- Noção a respeito do cálculo da fórmula do Teorema de Pitágoras;
- Noção a respeito da definição de paralelogramo.

Para a alternativa (b), vejamos a resolução do estudante E4, que inicia sua resolução conforme a Figura 4:

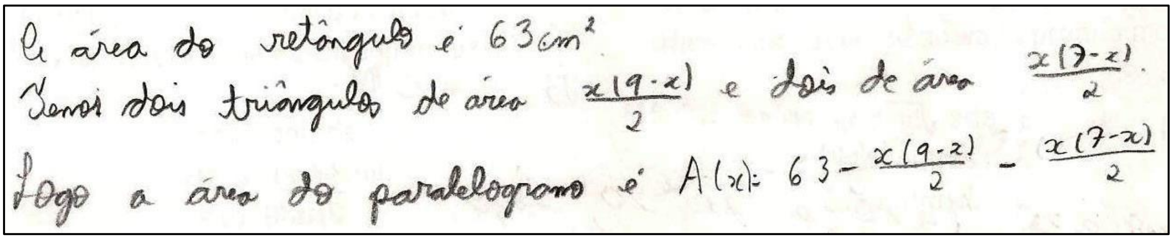

A área do retângulo é 63cm²
Temos dois triângulos de área $\frac{x(9-x)}{2}$ e dois de área $\frac{x(7-x)}{2}$.
Logo a área do paralelogramo é $A(x) = 63 - \frac{x(9-x)}{2} - \frac{x(7-x)}{2}$

Figura 4 - Registro escrito presente na resolução do estudante E4
Fonte: Dados da pesquisa.

E4 calcula a área do retângulo ABCD, obtendo 63 cm^2, e calcula as áreas dos triângulos *AIL*, *JBI*, *JKC* e *LDK*, sabendo que $AIL \equiv JKC$ e que $LDK \equiv JBI$. Para obter a função que fornece a área do paralelogramo *IJKL*, E4 calcula a diferença entre as áreas do retângulo e dos triângulos, mas esquece de multiplicar por 2 cada área dos triângulos, definidas por $\frac{x \cdot (9-x)}{2}$ e $\frac{x \cdot (7-x)}{2}$. Continuando em sua resolução, o estudante desenvolve A(x), como podemos ver na Figura 5:

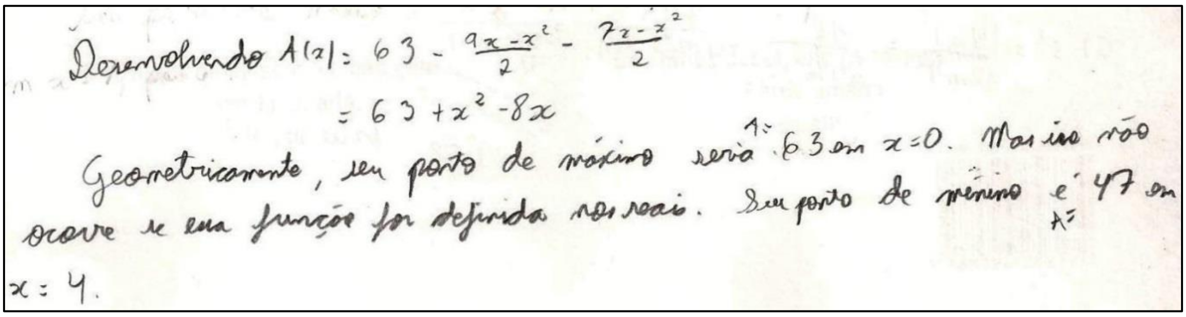

Desenvolvendo $A(x) = 63 - \frac{9x-x^2}{2} - \frac{7x-x^2}{2}$
$= 63 + x^2 - 8x$
Geometricamente, seu ponto de máximo seria $A = 63$ em $x = 0$. Mas isso não ocorre se essa função for definida nos reais. Seu ponto de mínimo é $A = 47$ em $x = 4$.

Figura 5 - Registro escrito presente na resolução do estudante E4
Fonte: Dados da pesquisa.

E4 obtém a função $x^2 - 8x + 63$ que fornece a área do paralelogramo *IJKL*, que devido a um descuido, não é a resposta correta. Para determinar o ponto de mínimo ou de máximo, conforme o enunciado, o estudante afirma que o ponto de máximo desta função seria

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11

em *A=63* para *x=0*, isto para uma visão geométrica da figura, mas como a função é definida no conjunto dos números reais afirma que seu ponto de mínimo é em *x=4* e *y=47*, que está correto para a função que o estudante obteve.

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, quatro deles foram evidenciados. O primeiro se refere ao de representação simbólica, pois o estudante apresenta:

- Notação aritmética para se referir à área do retângulo *ABCD*, quando escreve 63 cm^2;
- Notação algébrica para se referir à área dos triângulos, ao escrever, por exemplo, $\frac{x \cdot (9-x)}{2}$;
- Notação para se referir à área do paralelogramo, quando escreve A(x);
- Notação algébrica para se referir à área do paralelogramo, ao escrever $x^2 - 8x + 63$;
- Notação aritmética para se referir ao ponto de mínimo, ao escrever 47 e x=4.

O segundo processo evidenciado é o de mudança de representações e tradução entre elas. O estudante E4, para resolver à alternativa (b), teve que compreender o enunciado e a figura dada na questão, mudando de uma representação geométrica para uma representação algébrica.

O terceiro processo é o de sintetização, pois o estudante apresenta:

- Noção a respeito do cálculo da área de um triângulo;
- Noção a respeito do cálculo da área de um retângulo;
- Noção da decomposição de uma figura plana (retângulo) em outras (triângulos e paralelogramo) para o cálculo da área de uma das figuras decompostas (paralelogramo);
- Noção de uma função do segundo grau;
- Noção a respeito do cálculo do vértice de uma parábola;
- Noção a respeito de pontos críticos.

E o quarto processo diz respeito ao de modelação. Este foi evidenciado quando o estudante E4 determinou a função que fornece a área do paralelogramo *IJKL*.

A segunda questão que trazemos para este trabalho foi retirada da prova do ENADE do ano de 2011 (BRASIL, 2011). Seu enunciado é:

Em um prédio de 8 andares, 5 pessoas aguardam o elevador no andar térreo. Considere que elas entrarão no elevador e sairão, de maneira aleatória, nos andares de 1 a 8.
Com base nessa situação, faça o que se pede nos itens a seguir, apresentando o procedimento de cálculo utilizado na sua resolução.
***a)** Calcule a probabilidade de essas pessoas descerem em andares diferentes.*
***b)** Calcule a probabilidade de duas ou mais pessoas descerem em um mesmo andar.*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11

Seis estudantes do total de treze resolveram esta questão: E2, E3, E4, E6, E10 e E11. Os estudantes E2 e E3 resolveram apenas a alternativa (a) da questão, e os demais resolveram as duas alternativas, (a) e (b). Após as análises dos registros escritos, seguindo as fases da análise de conteúdo, segundo Bardin (2004), pudemos construir cinco agrupamentos, que se referem aos indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados nas resoluções, como podemos ver no Quadro 3:

		Agrupamentos	Estudantes
Representação	**A**	Utiliza notações para se referir a conceitos de análise combinatória e de probabilidade.	E3, E10, E11
	B	Apresenta cálculos referentes à combinação, arranjo ou probabilidade.	E2, E3, E4, E6, E11
	C	Apresenta imagens para representar a situação do enunciado: cinco pessoas em um elevador de um prédio com oito andares.	E6, E10, E11
	D	Retira informações do enunciado fazendo ligações com as demais representações e notações referentes a conceitos de análise combinatória e probabilidade utilizadas na resolução.	E3, E4, E11
Abstração	**E**	Evidencia um domínio referente a conceitos matemáticos, por meio do uso de: cálculos de arranjo (ou Princípio Multiplicativo); cálculos de combinação ou cálculos de probabilidade.	E3, E4, E11

Quadro 3 – Descrição dos agrupamentos relativos às resoluções da questão 03 da prova do ENADE de 2011
Fonte: As autoras.

Para a alternativa (a), escolhemos trazer a resolução do estudante E11. Para compreender a situação matemática do enunciado, E11 faz o desenho apresentado na figura 6:

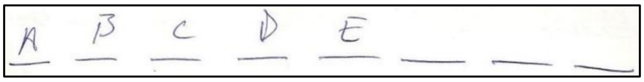


Figura 6 - Registro escrito presente na resolução do estudante E11
Fonte: Dados da pesquisa.

Podemos inferir que as letras A, B, C, D e E se referem às cinco pessoas que estão no elevador, e os traços (_) correspondem aos oito andares. Dando continuidade em sua resolução, o estudante apresenta os cálculos conforme a Figura 7:

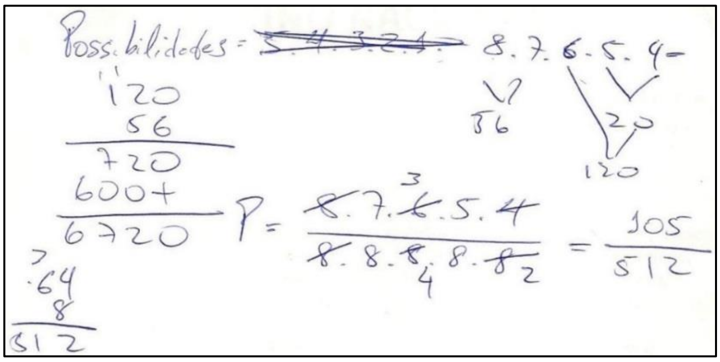


Figura 7 - Registro escrito presente na resolução do estudante E11
Fonte: Dados da pesquisa.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11

O estudante, ao calcular, em uma primeira tentativa, as possíveis escolhas, apresenta a seguinte multiplicação: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, mas logo muda sua estratégia quando faz outro cálculo multiplicativo: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. Podemos inferir ainda, que o estudante compreende o enunciado quando calcula a probabilidade do evento. Isso acontece ao encontrar o quociente entre as escolhas das pessoas ao saírem em andares diferentes pelo total de possíveis escolhas destas pessoas.

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, há evidências de quatro processos. O primeiro é o de representação simbólica, pois o estudante apresenta:

- Notação aritmética para se referir ao cálculo do Princípio Multiplicativo, ao escrever $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$;
- Notação aritmética para se referir ao cálculo de Probabilidade;
- Notações aritméticas que se referem às operações multiplicativas, quando escreve, por exemplo, 120×56.

O segundo processo diz respeito à visualização, quando o estudante apresenta um desenho que se refere à situação do enunciado da questão.

O terceiro processo é o de mudança de representações e tradução entre elas, quando E11 traduz a linguagem do enunciado para a linguagem matemática em sua resolução.

E o quarto processo se refere ao de sintetização, pois o estudante mobiliza conhecimentos a respeito do Princípio Multiplicativo e de Probabilidade.

Para a alternativa (b), apresentamos a resolução do estudante E4, como podemos ver na Figura 8:

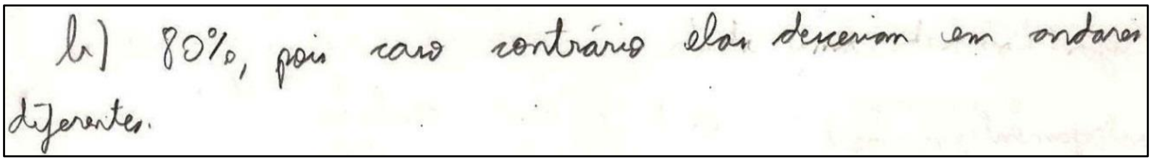


Figura 8 - Registro escrito presente na resolução da questão 03 do estudante E4
Fonte: Dados da pesquisa.

Nesta resolução, o estudante utiliza o resultado que encontrou anteriormente, de *20%*, obtendo agora *80%*. Podemos inferir que E4 resolve desta maneira, pois sabe que as somas das possibilidades de um evento deve resultar *100%*. Além disso, sabe que tal resultado se refere a um evento complementar do evento da alternativa (a).

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados nesta resolução (figura 8), temos presente três processos. Um se refere ao de representação simbólica, pois E4 apresenta notação aritmética para se referir a um resultado percentual. O outro processo é o de sintetização, pois o estudante teve que mobilizar:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11

- Noção do conceito de Probabilidade;
- Noção de complementaridade de um evento.

E o terceiro processo é o de mudança de representações e tradução entre elas, pois o estudante compreende o enunciado da questão, como vimos em sua resolução. Portanto, o estudante E4 em sua resolução evidenciou os processos de representação simbólica, mudança de representações e tradução entre elas e sintetização.

A seguir, apresentamos o Quadro 4, que tem por objetivo sintetizar todos os processos do Pensamento Matemático Avançado que foram evidenciados nas resoluções dos seis estudantes que resolveram as questões apresentadas neste artigo:

PROCESSOS	Questão/ano 2008	Questão/ano 2011
Representação simbólica	E2, E4, E11	E2, E3, E4, E6, E10, E11
Visualização	-	E6, E10, E11
Mudança de representações e tradução entre elas	E2, E4, E11	E3, E4, E11
Modelação	E2, E4	-
Sintetização	E2, E4, E11	E3, E4, E11
Generalização	-	-

Quadro 4 – Processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados pelos estudantes
Fonte: As autoras.

Conforme as análises destas resoluções, acreditamos que, para um processo ser mobilizado durante o desenvolvimento da resolução de uma questão, além de depender do estudante, do conhecimento que possui, entre outros fatores, a natureza da questão ainda influencia. Inferimos que pode ser por este motivo que o processo de generalização não foi mobilizado.

Outro fato que consideramos é que os processos evidenciados em cada estudante se referem a conceitos/objetos matemáticos específicos. Por exemplo, um processo de modelação foi manifestado quando se tratava do conceito de área de um paralelogramo, mas não quer dizer que o estudante que mobilizou tal processo o faça novamente para outro conceito/objeto matemático.

5 Algumas considerações

Com o objetivo de *descrever e discutir indícios/características dos processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados na produção escrita de estudantes de Matemática ao resolverem questões discursivas do ENADE*, analisamos os registros escritos de seis estudantes que resolveram as questões que escolhemos para abordar neste artigo.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11

Destes estudantes, inferimos que seis apresentaram indícios do processo de representação simbólica; três do processo de visualização; quatro do processo de mudança de representações e tradução entre elas; dois evidenciaram o processo de modelação; quatro estudantes o de sintetização; e nenhum mobilizou o processo de generalização.

Outro resultado decorrente das análises é que as questões permitiram que os estudantes evidenciassem alguns processos, mas não todos. Isso se deve, ainda, à natureza da questão, e não somente do estudante. Mas, como os estudantes participantes da pesquisa são possíveis formandos, esperávamos que resolvessem todas as questões do instrumento, assim como mobilizassem processos e, consequentemente, apresentassem indícios de um Pensamento Matemático Avançado.

A resolução de cada estudante nos permite dizer que tais processos são evidenciados de maneiras diferentes, pois, para cada um, as notações/símbolos matemáticas (os) possuem significados individuais, bem como as relações que se podem constituir entre os diversos conceitos/objetos matemáticos.

Enfim, corroboramos com os autores estudados nesta investigação que os processos do Pensamento Matemático Avançado se fazem importantes, os quais permitem que os estudantes compreendam uma gama de conceitos matemáticos. Neste sentido, Dreyfus (2002) afirma que tais processos não acontecem por si mesmos e nem sempre são conscientes por parte do estudante.

Sendo assim, acreditamos que estudantes devem ser *conduzidos* para desenvolverem os processos do Pensamento Matemático Avançado, uma vez que alguns professores ainda ensinam aspectos matemáticos mais práticos, seguindo a sequência *teorema-prova-aplicação*. Para Dreyfus (2002), a consequência disso é que estudantes realizam apenas técnicas e repetições, tendo uma quantidade considerável de conhecimento matemático, mas não o método de trabalho de um matemático, ou seja, não desenvolvem a reflexão nos processos que levaram matemáticos a construir teorias.

6 Referências

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. 3 ed. Lisboa: Edições 70, 2004.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRANDEMBERG, J. C. **Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo**. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11

BRASIL. Comissão Nacional de Avaliação da Educação Superior. Portaria nº 2.051, de 9 de julho de 2004. **Regulamenta os procedimentos de avaliação do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (SINAES), instituído na Lei nº 10.861, de 14 de abril de 2004**. Conaes, Brasília, DF, 2004. Disponível em: < http://meclegis.mec.gov.br/documento/view/id/32>. Acesso em: 12 jan. 2013.

BRASIL. **Prova de Matemática de 2008**. Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior – ENADE (Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes). Ministério da Educação. Disponível em: < http://download.inep.gov.br/download/Enade2008_RNP/MATEMATICA.pdf>. Acesso em: 09 jun. 2012.

BRASIL. **Prova de Matemática de 2011**. Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior – ENADE (Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes). Ministério da Educação. Disponível em: < http://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/provas/2011/MATEMATICA.pdf>. Acesso em: 09 jun. 2012.

DOMINGOS, A. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no ensino superior**. 2003. 387f. Tese (Doutorado em Ciências de Educação) - Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova Lisboa, Lisboa, 2003.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer. 2002. p. 25-41.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Â.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação – Unicamp, Campinas, v. 4, n. 1, p.78-91. mar. 1993.

GRAY, E.; PINTO, M.; PITTA, D.; TALL, D. Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 38, n. 1-3, p. 111-133. 1999.

GERETI, L. C. V. Processos do **Pensamento Matemático Avançado evidenciados em resoluções de questões do ENADE**. 2014. 139f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PINTO, M. M. F. Educação Matemática no Ensino Superior. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n. 36, p.223-238, dez. 2002.

RESNICK, L. B. **Education and learning to think**. Washington: National Academy Press, 1987.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer. 2002. p. 3-21.

Submetido em Abril de 2014.
Aprovado em Julho de 2014.